



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**" Μελέτη και εξομείωση προσαρμοστικών μεθόδων αναγνώρισης συστημάτων "**

ΣΩΡΡΑΣ ΛΑΜΠΡΟΣ

ΣΑΜΑΡΤΖΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ**

**ΠΑΤΡΑ, 2020**

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

Πάτρα, \_\_/\_\_/2020

## ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

- |                   |          |
|-------------------|----------|
| 1. Ονοματεπώνυμο, | Υπογραφή |
| 2. Ονοματεπώνυμο, | Υπογραφή |
| 3. Ονοματεπώνυμο, | Υπογραφή |

### **Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή**

Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη εργασία.

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Πελοποννήσου δεν υποδηλώνει απαραίτητως και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα εκ μέρους του Τμήματος.

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία των φοιτητών ΣΩΡΡΑ ΛΑΜΠΡΟΥ και ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΣΑΜΑΡΤΖΗ που την εκπόνησαν. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

## Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε ο αλγόριθμος ελαχίστων μέσων τετραγώνων (Least Mean Square algorithm – LMS) καθώς και η εφαρμογή του στην ταυτοποίηση συστημάτων. Αρχικά, σε θεωρητικό επίπεδο, μελετήθηκε η έννοια του συστήματος και εξετάστηκαν οι κατηγορίες συστημάτων, καθώς και η έννοια της ταυτοποίησης συστημάτων και οι τεχνικές μέσω των οποίων αυτή επιτυγχάνεται. Στη συνέχεια περιεγράφηκε αναλυτικά το θεωρητικό υπόβαθρο του αλγορίθμου LMS και υλοποιήθηκε με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Matlab, με στόχο την μελέτη των συνθηκών σύγκλισης του αλγορίθμου. Πιο συγκεκριμένα μελετήθηκε η απόδοση του αλγορίθμου ως προς τις συνθήκες σύγκλισης τόσο στην περίπτωση μεταβλητού βήματος όσο και στην περίπτωση μεταβλητού μήκους κρουστικής απόκρισης. Τα αποτελέσματα της υλοποίησης καταδεικνύουν ότι η σύγκλιση του αλγορίθμου LMS επηρεάζεται τόσο από το βήμα  $\mu$  του αλγορίθμου, όσο και από το μήκος της κρουστικής απόκρισης. Πιο συγκεκριμένα, όσο μεγαλώνει το βήμα  $\mu$  του αλγορίθμου τόσο πιο γρήγορα ο αλγόριθμος επιτυγχάνει την σύγκλιση, αλλά επίσης το σφάλμα είναι μεγαλύτερο σε σχέση με την επιλογή ενός μικρότερου βήματος, ενώ επιλέγοντας ένα μεγάλο βήμα αλγορίθμου αυξάνεται η πιθανότητα ο αλγόριθμος να αποκλίνει. Παράλληλα το μήκος της κρουστικής απόκρισης επηρεάζει κυρίως το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται από τον αλγόριθμο LMS μέχρι να καταλήξει σε σύγκλιση αφού όσο μεγαλώνει το μήκος της κρουστικής απόκρισης τόσο περισσότερες επαναλήψεις απαιτούνται για την σύγκλιση του αλγορίθμου, ενώ παράλληλα παρατηρούμε ότι μεγαλύτερο μήκος της κρουστικής απόκρισης επιφέρει μεγαλύτερο σφάλμα.

## Abstract

This thesis studied the Least Mean Square algorithm (LMS) algorithm as well as its application in system identification. Initially, at a theoretical level, the concept of the system was studied, and the categories of systems were examined, as well as the concept of system identification and the techniques through which it is achieved. The theoretical background of the LMS algorithm was then described in detail and implemented using the Matlab programming language, with the aim of studying the algorithm's convergence conditions. More specifically, the performance of the algorithm in terms of convergence conditions was studied both in the case of a variable step and in the case of a variable length of the impact response. The results of the implementation show that the convergence of the LMS algorithm is affected both by the  $\mu$  step of the algorithm and by the length of the impact response. More specifically, the larger the step of the algorithm, the faster the algorithm achieves the convergence, but also the error is greater than the choice of a smaller step, while choosing a large algorithm step increases the probability that the algorithm deviates. At the same time, the length of the impact response mainly affects the number of repetitions required by the LMS algorithm until it reaches a convergence since as the length of the impact response increases, more repetitions are required to converge the algorithm makes an increased error mistake.

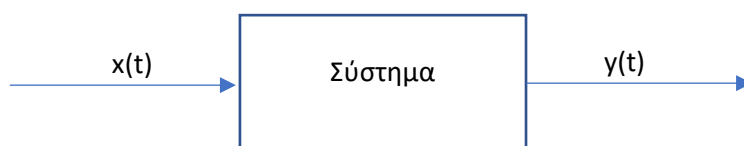
## Περιεχόμενα

Περίληψη .....	3
Κεφάλαιο 1 - Εισαγωγή .....	6
1.1. Η έννοια του συστήματος .....	6
1.2 Κατηγορίες συστημάτων .....	10
1.2.1 Στατικά και Δυναμικά συστήματα .....	10
1.2.2. Αιτιατά και Μη- Αιτιατά Συστήματα .....	11
1.2.3. Γραμμικά και Μη- Γραμμικά Συστήματα .....	12
1.2.4. Χρονικά Αμετάβλητα και Μεταβαλλόμενα Συστήματα .....	12
1.2.5. Αναλογικά, Διακριτού Χρόνου και Ψηφιακά Συστήματα .....	14
1.2.6. Συστήματα μιας εισόδου/ εξόδου και Συστήματα πολλαπλών εισόδων/ εξόδων .....	14
1.3. Ταυτοποίηση συστημάτων .....	15
1.4 Εφαρμογές της ταυτοποίησης συστημάτων .....	16
Κεφάλαιο 2 - Ταυτοποίηση Διακριτών Συστημάτων	
2.1 Υπολογισμός της εξόδου ΓΧΑ συστήματος .....	18
2.2 Ταυτοποίηση ΓΧΑ συστήματος με την μέθοδο ελάχιστων τετράγωνων .....	21
2.3 Υπολογισμός της εξόδου ενός γραμμικού χρονικά μεταβαλλόμενου (ΓΧΜ) συστήματος .....	24
2.4 Ταυτοποίηση ΓΧΜ συστήματος - Ο αλγόριθμος LMS .....	26
Κεφάλαιο 3 - Κώδικας και πειραματικά αποτελέσματα .....	30
Σύνοψη συμπερασμάτων .....	43
Βιβλιογραφία .....	44

## Κεφάλαιο 1 – Εισαγωγή

### 1.1. Η έννοια του συστήματος

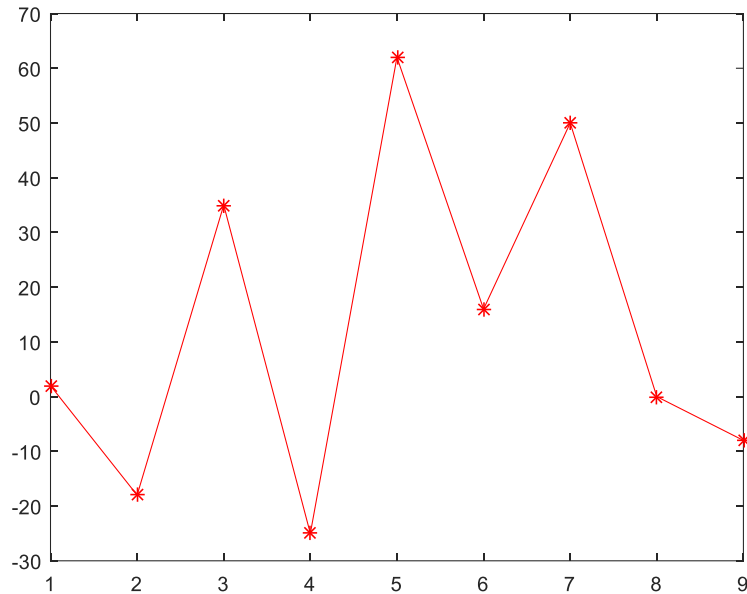
Η χρήση του όρου «σύστημα» είναι πολύ διαδεδομένη σε αρκετούς τομείς της ζωής. Με τον όρο σύστημα περιγράφουμε μια συλλογή αντικειμένων, τα οποία αποτελούν ένα σύνολο και με κάποιο τρόπο αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους. Για παράδειγμα το «Σύστημα Υγείας», το οποίο αποτελείται από νοσοκομεία, ιδιωτικούς γιατρούς, φαρμακεία κτλ. Άρα με τον όρο σύστημα αναφερόμαστε σε οντότητες, οι οποίες αποκρίνονται σε διεγέρσεις που δέχονται από το περιβάλλον τους. Πιο συγκεκριμένα για την επιστήμη των σημάτων και συστημάτων, μπορούμε να ορίσουμε ως σύστημα την οντότητα εκείνη που μετατρέπει ένα σήμα σ' ένα άλλο. Από μαθηματική άποψη ένα σύστημα είναι ένας μετασχηματισμός που μετατρέπει ένα σήμα  $x(t)$  σε ένα άλλο  $y(t)$ <sup>1</sup>. Το σήμα  $x(t)$  ορίζεται ως το σήμα εισόδου και το σήμα  $y(t)$  ως το σήμα εξόδου. Με την έννοια σήμα ορίζουμε το σύνολο των τιμών που λαμβάνει μια φυσική ποσότητα όταν μεταβάλλεται.



Εικόνα 1. Σύστημα

---

<sup>1</sup> Στο σημείο αυτό να διευκρινίσουμε ότι με την μεταβλητή  $t$  δεν ορίζουμε κατ' ανάγκη τον χρόνο, αλλά αυτό θα το αναλύσουμε στα επόμενα κεφάλαια που ακολουθούν.



Εικόνα 2. Σήμα

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στην εικόνα 1, η έννοια του συστήματος είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το σήμα που δέχεται στην είσοδο και το σήμα εξόδου, που εξέρχεται από αυτό. Το σήμα που εισέρχεται και το οποίο αντιστοιχεί σε κάποια φυσική ποσότητα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως έξοδος ενός κατάλληλα διεγερμένου γνωστού συστήματος και να ανακαλυφθεί με βάση τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το σύστημα. Αντίστοιχα ένα σύστημα μπορεί να μελετηθεί, παρατηρώντας και μελετώντας τα σήματα εισόδου και τα αντίστοιχα σήματα εξόδου. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις στην συνέχεια μπορούμε να οδηγηθούμε σε συμπεράσματα για τις ιδιότητες του συστήματος από το οποίο πέρασε το σήμα εισόδου και εξήλθε ως το συγκεκριμένο σήμα εξόδου.

Για να περιγράψουμε κάποια απλά είδη συστημάτων αρκεί ένα γραφικό μοντέλο. Για την περιγραφή πιο προηγμένων και πολύπλοκων συστημάτων είναι απαραίτητο να αναπτυχθούν μοντέλα, τα οποία περιγράφουν τις σχέσεις που ενώνουν τις μεταβλητές του συστήματος μέσω μαθητικών εκφράσεων, όπως διαφοροεξισώσεις ή διαφορικές

εξισώσεις (Λιάβας). Γενικότερα ένα μοντέλο μας βοηθά να κατανοήσουμε τους φυσικούς νόμους που διέπουν ένα σύστημα και να προβλέψουμε την συμπεριφορά του, αλλά επιπρόσθετα μας παρέχει την δυνατότητα να προσομοιώσουμε ένα σύστημα και να πειραματιστούμε με αυτό με στόχο την δημιουργία νέων συστημάτων με καινοτόμες ιδιότητες. Σε πολλές περιπτώσεις ο πειραματισμός σε ένα πραγματικό σύστημα θα ήταν αδύνατος, λόγω της επικινδυνότητάς του ή του χρηματικού κόστους, όπως για παράδειγμα ένας πυρηνικός αντιδραστήρας. Με την βοήθεια όμως των μοντέλων και της πληροφορικής ο πειραματισμός δεν εμποδίζεται.

Ένας από τους πιο δημοφιλείς προσαρμοστικούς αλγόριθμους που είναι διαθέσιμοι στη βιβλιογραφία είναι ο στοχαστικός αλγόριθμος διαβάθμισης που ονομάζεται επίσης ελάχιστο-τετράγωνο (LMS) [1], [2]. Η δημοτικότητά του προέρχεται από το γεγονός ότι είναι πολύ απλό να εφαρμοστεί. Κατά συνέπεια, ο αλγόριθμος LMS χρησιμοποιείται ευρέως σε πολλές εφαρμογές. Το προσαρμοστικό φίλτρο Least - Mean - Square (LMS) είναι το κύριο συστατικό πολλών συστημάτων επικοινωνίας. Παραδοσιακά, τέτοια προσαρμοστικά φίλτρα εφαρμόζονται σε Ψηφιακούς Επεξεργαστές Σήματος (Digital Signal Processors -DSPs). Μερικές φορές, εφαρμόζονται κυκλώματα ειδικά για εφαρμογές (Application-specific integrated circuits - ASICs,) όπου η απόδοση είναι η βασική απαίτηση. Ωστόσο, πολλά συστήματα υψηλής απόδοσης DSP, συμπεριλαμβανομένων των προσαρμοστικών φίλτρων LMS, μπορούν να εφαρμοστούν χρησιμοποιώντας προγραμματιζόμενες συστοιχίες πυλών πεδίου (Field Programmable Gate Arrays - FPGAs) λόγω ορισμένων από τα ελκυστικά τους πλεονεκτήματα. Τέτοια πλεονεκτήματα περιλαμβάνουν ευελιξία και δυνατότητα προγραμματισμού, αλλά κυρίως, διαθεσιμότητα δεκάδων έως εκατοντάδων πολλαπλασιαστών υλικού που διατίθενται σε ένα τσιπ [3]. Το προσαρμοστικό φίλτρο LMS απολαμβάνει πολλά πλεονεκτήματα



σε σχέση με άλλους προσαρμοστικούς αλγόριθμους, όπως ισχυρή συμπεριφορά όταν υλοποιείται σε υλικό πεπερασμένης ακρίβειας, καλά κατανοητή συμπεριφορά σύγκλισης και υπολογιστική απλότητα για τις περισσότερες καταστάσεις σε σύγκριση με τις λιγότερο τετραγωνικές μεθόδους [4]. Η αναγνώριση ενός άγνωστου συστήματος υπήρξε κεντρικό ζήτημα σε διάφορους τομείς εφαρμογής όπως έλεγχος, εξίσωση καναλιών, απόρριψη ήχων σε δίκτυα επικοινωνίας και τηλεδιάσκεψη κ.λπ. Η αναγνώριση είναι η διαδικασία καθορισμού του άγνωστου μοντέλου από την άποψη των διαθέσιμων πειραματικών στοιχείων, δηλαδή, σύνολο μετρήσεων των εισερχόμενων εξόδων επιθυμητά σήματα απόκρισης και ένα κατάλληλο σφάλμα που βελτιστοποιείται σε σχέση με άγνωστες παραμέτρους μοντέλου. Η προσαρμοστική αναγνώριση αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη διαδικασία όπου μαθαίνουμε περισσότερα για το μοντέλο καθώς λαμβάνεται κάθε νέο ζεύγος μετρήσεων και ενημερώνουμε τις γνώσεις για να ενσωματώσουμε τις πρόσφατα ληφθείσες πληροφορίες. Το προσαρμοστικό φίλτρο Least Mean Square (LMS) είναι ένας απλός αλγόριθμος με καλή συμπεριφορά που χρησιμοποιείται συνήθως σε εφαρμογές όπου ένα σύστημα πρέπει να προσαρμοστεί στο περιβάλλον του. Οι αρχιτεκτονικές εξετάζονται με βάση τα ακόλουθα κριτήρια: ταχύτητα, κατανάλωση ισχύος και χρήση πόρων FPGA [6]. Τα σύγχρονα FPGA περιέχουν πολλούς πόρους που υποστηρίζουν εφαρμογές DSP. Αυτοί οι πόροι υλοποιούνται στο ύφασμα FPGA και βελτιστοποιούνται για υψηλή απόδοση και χαμηλή κατανάλωση ενέργειας [7].

Ο αλγόριθμος LMS αναπτύχθηκε από τους Windrow και Hoff το 1959. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια κλίση κλίσης για να εκτιμήσει ένα χρονικά μεταβαλλόμενο σήμα. Βρίσκει ένα ελάχιστο, εάν υπάρχει, κάνοντας βήματα προς την αρνητική κατεύθυνση της κλίσης. Αυτό το κάνει προσαρμόζοντας τους συντελεστές φίλτρου για να ελαχιστοποιηθεί το σφάλμα.

Ο στόχος είναι να προσαρμοστούν οι συντελεστές ενός φίλτρου  $W$  (το οποίο μπορεί να είναι ένα FIR ή ένα IIR), ώστε να ταιριάζει όσο το δυνατόν πιο κοντά στην απόκριση ενός άγνωστου συστήματος  $H$ . Το φίλτρο  $W$  προσαρμόζεται χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο ελάχιστου μέσου τετραγώνου, που είναι ο ευρύτερα χρησιμοποιούμενος αλγόριθμος προσαρμοστικού φιλτραρίσματος. Ο χρόνος σύγκλισης του αλγορίθμου LMS εξαρτάται από το μέγεθος βήματος  $\mu$ . Εάν το  $\mu$  είναι μικρό, τότε μπορεί να χρειαστεί πολύς χρόνος σύγκλισης και αυτό μπορεί να καταστρέψει τον σκοπό χρήσης ενός φίλτρου LMS.

## 1.2 Κατηγορίες συστημάτων

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε τις βασικές κατηγορίες, βάσει των οποίων διαχωρίζουμε τα συστήματα. Οι κατηγορίες αυτές είναι διαφόρων ειδών, στην παρούσα εργασία μας ενδιαφέρουν τα μαθηματικά μοντέλα που σχετίζονται με την παρατήρηση κάποιων πειραματικών δεδομένων, δηλαδή τα μοντέλα που περιγράφουν την συμπεριφορά του συστήματος ύστερα από την εφαρμογή μιας δεδομένης εισόδου ή διαφορετικά περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο μετατρέπεται η είσοδος σε μια συγκεκριμένη έξοδο.

### 1.2.1 Στατικά και Δυναμικά συστήματα

Ένα σύστημα χωρίς μνήμη, δηλαδή το σύστημα το οποίο σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  δίνει στην έξοδο ένα σήμα  $y(t)$ , το οποίο εξαρτάται μόνο από την τιμή του σήματος

εισόδου  $x(t)$  για την ίδια χρονική στιγμή, ονομάζεται *στατικό*. Σε αντίθεση με τα στατικά συστήματα, τα συστήματα τα οποία δίνουν στην έξοδο σήμα  $y(t)$ , η οποία εξαρτάται από τις τιμές που παίρνει η είσοδος και σε χρονικές τιμές προγενέστερες του  $t$ , ονομάζονται *δυναμικά*. Συνεπώς τα δυναμικά συστήματα διαθέτουν μνήμη. Παράδειγμα στατικού συστήματος αποτελεί ένα σύστημα το οποίο περιέχει μια αντίσταση  $R$ , ενώ παράδειγμα ενός δυναμικού συστήματος αποτελεί ένα κύκλωμα στο οποίο μετράμε την τάση εξόδου στα άκρα ενός πυκνωτή.

### 1.2.2. Αιτιατά και Μη- Αιτιατά Συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται *αιτιατό* όταν το σήμα εξόδου  $y(t)$  εξαρτάται από τις τιμές του σήματος εισόδου στην παρούσα χρονική στιγμή  $t$  και σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Δηλαδή οι μεταβολές στην έξοδο (αποτέλεσμα) ενός αιτιατού συστήματος έπονται των μεταβολών που επιτελούνται στην είσοδο (αιτία) (Θεοδωρίδης, Μπερμπερίδης, & Κοφίδης, 2003). Το παράδειγμα του πυκνωτή που αναφέρθηκε προηγουμένως είναι ένα αιτιατό σύστημα.

Αντίθετα ένα *μη- αιτιατό* σύστημα είναι ένα σύστημα η έξοδος του οποίου εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι πραγματοποιήσιμο, εκτός αν δεν πρόκειται να λειτουργήσει σε πραγματικό χρόνο.

### 1.2.3. Γραμμικά και Μη- Γραμμικά Συστήματα

Για να ορίσουμε την έννοια ενός γραμμικού ή ενός μη- γραμμικού συστήματος, αρχικά πρέπει να εξηγήσουμε πότε ένα σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία. Παραπάνω αναφέραμε ότι ένα δυναμικό σύστημα δίνει στην έξοδο ένα σήμα  $y(t)$  το οποίο εξαρτάται από το σήμα εισόδου  $x(t)$ , καθώς και από διεγέρσεις που έχει υποστεί το σήμα σε κάποιες άλλες χρονικές στιγμές εκτός του  $t$ , λόγω της μνήμης που διαθέτει. Για να βρίσκεται ένα σύστημα σε *ηρεμία* θα πρέπει να μην έχει υποστεί καμία διέγερση από οποιοδήποτε σήμα σε χρονικό διάστημα εκτός της διάρκειας κατά την οποία διεγείρεται από το σήμα  $x(t)$ . Με άλλα λόγια αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν έχει αποθηκεύσει ενέργεια πριν την εφαρμογή του σήματος  $x(t)$ .

Μαθηματικά θα ορίζαμε το σήμα εξόδου ενός συστήματος  $F$  ως:

$$y(t) = F[x(t)]$$

Ένα σύστημα που βρίσκεται σε ηρεμία το ονομάζουμε *γραμμικό* αν και μόνο αν δοθέντων δυο σημάτων εισόδου  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  ισχύει η σχέση:

$$F[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1F[x_1(t)] + a_2F[x_2(t)]$$

για οποιεσδήποτε σταθερές  $a_1$  και  $a_2$ .

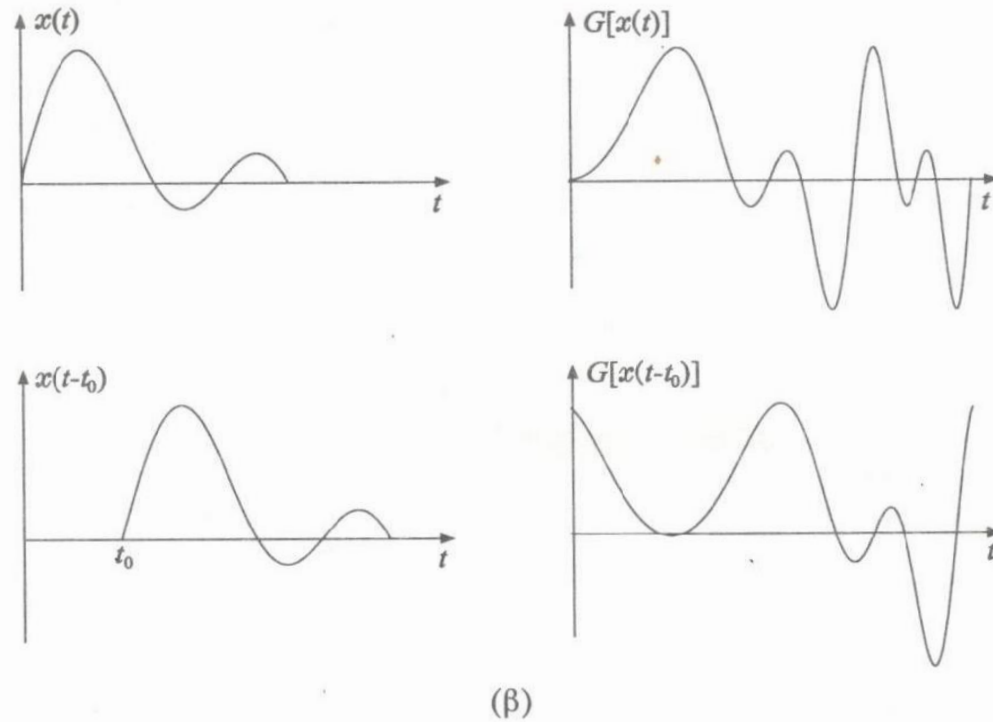
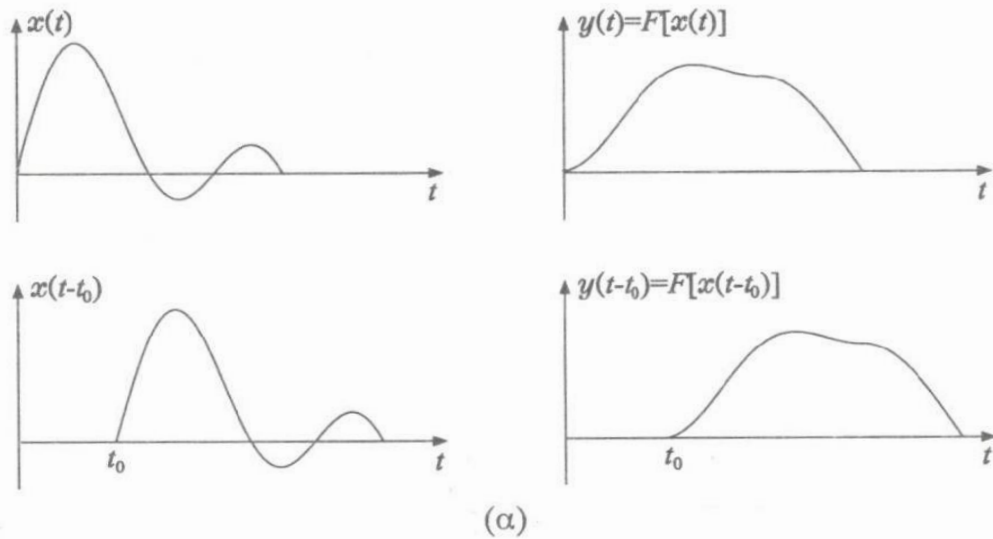
Αν η παραπάνω σχέση δε ικανοποιείται, τότε το σύστημα ονομάζεται *μη- γραμμικό*.

### 1.2.4. Χρονικά Αμετάβλητα και Μεταβαλλόμενα Συστήματα

Ένα σύστημα ονομάζεται *χρονικά αμετάβλητο* αν και μόνο αν οι χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου μεταφράζονται σε αντίστοιχες χρονικές ολισθήσεις στο σήμα εξόδου. Αυτό εκφράζεται με την παρακάτω μαθηματική σχέση:

$$y(t) = F[x(t)] \Leftrightarrow y(t - t_0) = F[x(t - t_0)], \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

Από τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι το σήμα εξόδου δεν αλλάζει μορφή και παραμένει το ίδιο, ανεξάρτητα από το ποια χρονική στιγμή θα διεγείρουμε την είσοδο με το σήμα  $x(t)$ . Στο σχήμα 1(α) παρουσιάζεται ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα που δέχεται μια είσοδο  $x(t)$  και δίνει στην έξοδο  $y(t)$ .



*Σχήμα 1. Παράδειγμα εισόδου και εξόδου γραμμικά (α) χρονικά αμετάβλητου και (β) χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος.*

Αντίστοιχα στο σχήμα 1(β) βλέπουμε την έξοδο  $y(t)$  ενός γραμμικού χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος  $G$  όταν εφαρμοστεί σε αυτό η είσοδος  $x(t)$ . Όπως είναι φανερό μια ολίσθηση στην είσοδο μπορεί να οδηγήσει σε εντελώς διαφορετική έξοδο.

#### 1.2.5. Αναλογικά, Διακριτού Χρόνου και Ψηφιακά Συστήματα

Τα συστήματα διακρίνονται σε αναλογικά, διακριτού χρόνου και ψηφιακά σύμφωνα με την αντίστοιχη κατηγορία των σημάτων εισόδου και εξόδου. Μια άλλη κατηγορία συστημάτων είναι τα *υβριδικά*, στα οποία τα σήματα εισόδου και εξόδου ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες.

Ορίζουμε ως *αναλογικά* τα συστήματα στα οποία εφαρμόζονται ως είσοδο αναλογικά σήματα και παίρνουμε ως έξοδο ένα αναλογικό σήμα. Αναλογικά είναι τα σήματα τα οποία έχουν πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών συνεχή, δηλαδή ανήκουν στους πραγματικούς αριθμούς τα σύνολα αυτά. Στην περίπτωση όπου τα σήματα εισόδου και εξόδου ενός συστήματος λαμβάνουν διακριτές τιμές (υποσύνολο ακεραίων ή πραγματικών αριθμών) στο πεδίο ορισμού και στο σύνολο τιμών τους, τότε το σύστημα ονομάζεται *ψηφιακό*. Αν το πεδίο ορισμού των σημάτων εισόδου και εξόδου είναι διακριτό, ενώ το σύνολο τιμών είναι συνεχές τότε τα συστήματα αυτά λέγονται *διακριτού χρόνου*.

#### 1.2.6. Συστήματα μιας εισόδου/ εξόδου και Συστήματα πολλαπλών εισόδων/ εξόδων

Τα συστήματα κατατάσσονται επίσης και σύμφωνα με τον αριθμό των εισόδων και των εξόδων που έχουν. Έτσι υπάρχουν συστήματα μιας εισόδου και μιας εξόδου,

πολλών εισόδων και μιας εξόδου, μιας εισόδου και πολλών εξόδων και πολλών εισόδων και πολλών εξόδων.

### 1.3. Ταυτοποίηση συστημάτων

Η ταυτοποίηση ή αναγνώριση συστημάτων είναι η θεωρία εκείνη (και η πρακτική) που ασχολείται με την μαθηματική μοντελοποίηση ενός άγνωστου συστήματος στην βάση των παρατηρούμενων πειραματικών δεδομένων (Μπερμπερίδης). Η αναγνώριση συστήματος είναι ένα πρόβλημα που απασχολεί ένα ευρύ φάσμα επιστημών και για τον λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί πολλές τεχνικές αναγνώρισης.

Για να επιτύχουμε μια αναγνώριση συστήματος πρέπει να λάβουμε σοβαρά υπόψη μας τέσσερις σημαντικούς παράγοντες:

1. Το **σύστημα**, το οποίο παρέχει τα πειραματικά δεδομένα και το οποίο είναι συνήθως η άγνωστη φυσική οντότητα.
2. Το **είδος του μοντέλου** που χρησιμοποιείται για να περιγράψει το σύστημα. Όπως αναφέραμε το μοντέλο είναι ένα μαθηματικό εργαλείο με το οποίο περιγράφουμε το σύστημα. Ενδεχομένως οι παράμετροι που χρησιμοποιούμε στο μοντέλο να μην έχουν καμία φυσική σημασία.
3. Οι **τεχνικές εκτίμησης** των παραμέτρων του μοντέλου που περιγράφει το άγνωστο σύστημα.
4. Οι **συνθήκες** κάτω από τις οποίες διεξάγεται το πείραμα.

## 1.4 Εφαρμογές της ταυτοποίησης συστημάτων

Η ταυτοποίηση συστημάτων έχει δώσει ώθηση στην ανάπτυξη πολλών συστημάτων, τα οποία βρίσκουν εφαρμογή και διευκολύνουν την καθημερινή ζωή του ανθρώπου. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε μερικές από αυτές τις εφαρμογές, αφού ο όγκος των εφαρμογών είναι τεράστιος και είναι αδύνατο να σταχυολογηθούν όλες σε μια εργασία.

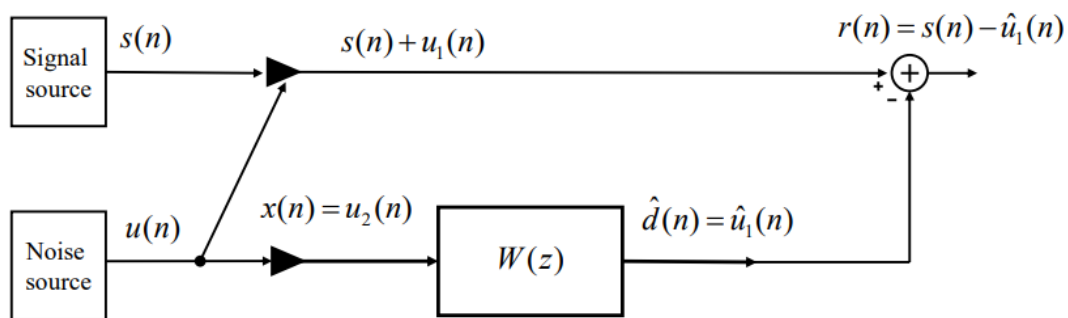
Ίσως η πιο διαδεδομένη και πολυχρησιμοποιούμενη εφαρμογή ταυτοποίησης συστημάτων αποτελούν οι **τηλεπικοινωνίες**. Από το σταθερό τηλέφωνο μέσω καλωδίου μέχρι το κινητό τηλέφωνο μέσω του αέρα η επίτευξη της επικοινωνίας βασίζεται στην κατεξοχήν ταυτοποίηση συστήματος. Η μελέτη βασίστηκε σε πειραματικές μελέτες σημάτων και πώς αυτά επηρεάζονται από το φυσικό σύστημα, το οποίο άλλοτε ήταν κάποια καλώδια, άλλοτε ήταν ο περιβάλλοντας χώρος (αέρας και φυσικά εμπόδια, όπως βουνά, κτίρια κτλ) καθώς και η χιλιομετρική απόσταση που έπρεπε να διανύσει το σήμα μέσα στο σύστημα για να φτάσει στον προορισμό του. Εκτός από την επικοινωνία με μία είσοδο και μία έξοδο, όπως είναι το τηλέφωνο έχουμε και την επικοινωνία μιας εισόδου και πολλών εξόδων, όπως είναι η τηλεόραση και το ραδιόφωνο. Στο κομμάτι των τηλεπικοινωνιών μπορεί να ενταχθεί και η μετάδοση δεδομένων, όπου και σε αυτήν την περίπτωση η αναγνώριση και ταυτοποίηση συστήματος παίζει σημαντικό ρόλο όταν το κανάλι έχει θόρυβο, όπως συμβαίνει στην πραγματική μετάδοση.

Μέσω της ταυτοποίησης αγνώστων συστημάτων στις τηλεπικοινωνίες επιτυγχάνεται η ισοστάθμιση καναλιών (channel equalization) και η εξάλειψη της ηχούς από τα μεταδιδόμενα σήματα (echo cancellation). Το πρόβλημα της ηχούς παρουσιάζεται



όταν στον ίδιο χώρο τοποθετούμε μικρόφωνο και ηχείο, αφού το αποτέλεσμα που παράγει το ηχείο εισάγεται ξανά στο μικρόφωνο και έτσι το ηλεκτροακουστικό σύστημα παρουσιάζει αστάθεια.

Άλλη μια εφαρμογή των αλγορίθμων ταυτοποίησης αγνώστων συστημάτων είναι η αποκατάσταση πολυμεσικών σημάτων (βίντεο, εικόνα, μουσική). Επιπρόσθετα στις αεροπορικές επικοινωνίες και σε οποιαδήποτε άλλη τεχνολογία ήχου η ταυτοποίηση αγνώστων συστημάτων βρίσκει εφαρμογή μέσω της ακύρωσης του θορύβου (noise cancellation) που μπορεί να επιτύχει.



Εικόνα 3. Ακύρωση θορύβου (noise cancellation)

Τέλος η αναγνώριση και ταυτοποίηση αγνώστων συστημάτων βρίσκει εφαρμογή στην ανίχνευση και τον προσδιορισμό των θέσεων των στόχων.

## Κεφάλαιο 2 - Ταυτοποίηση Διακριτών Συστημάτων

### 2.1 Υπολογισμός της εξόδου ΓΧΑ συστήματος

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα συστήματα που είναι Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα (ΓΧΑ: Linear Time Invariant – LTI Systems). Το πλεονέκτημά τους είναι ο εύκολος χειρισμός (ανάλυση, σχεδίαση, κατασκευή), με εκμετάλλευση του πεδίου της συχνότητας. Επιπλέον πολλά πραγματικά μη γραμμικά συστήματα μπορούν να θεωρηθούν προσεγγιστικά ως γραμμικά, αν η είσοδος και η περιοχή λειτουργίας του συστήματος περιοριστούν κατάλληλα.

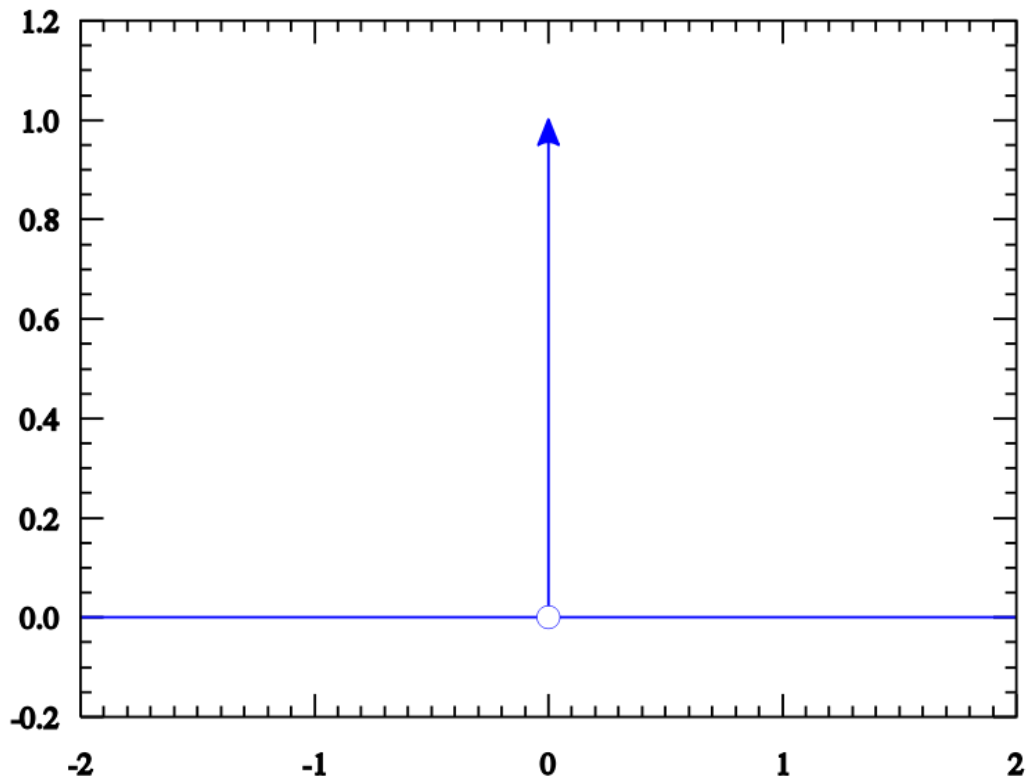
Αν το σύστημα είναι Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΧΑ) τότε μπορεί να περιγραφεί με δύο τρόπους:

- είτε στο πεδίο του χρόνου, από την Κρουστική του Απόκριση,
- είτε στο πεδίο της συχνότητας, από τη Συνάρτηση Μεταφοράς του.

Η καθεμία από αυτές τις μορφές, στο δικό της πεδίο, περιγράφει πλήρως και μοναδικά τη φύση και τη συμπεριφορά του συστήματος, αποτελώντας τη μοναδική του «ταυτότητα». Η πληροφορία που μεταφέρουν για το σύστημα είναι η ίδια, άρα οι δύο αναπαραστάσεις αυτές είναι ισοδύναμες.

Η *κρουστική απόκριση* ενός ΓΧΑ συστήματος είναι η έξοδος (απόκριση) που θα παραχθεί αν στην είσοδο δοθεί η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση  $\delta(t)$ , η οποία παρουσιάζεται στο σχήμα 2. Η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση  $\delta(t)$  ή συνάρτηση  $\delta$  του Dirac ορίζεται ως:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } t = 0 \\ 0, & \text{αν } t \neq 0 \end{cases}$$

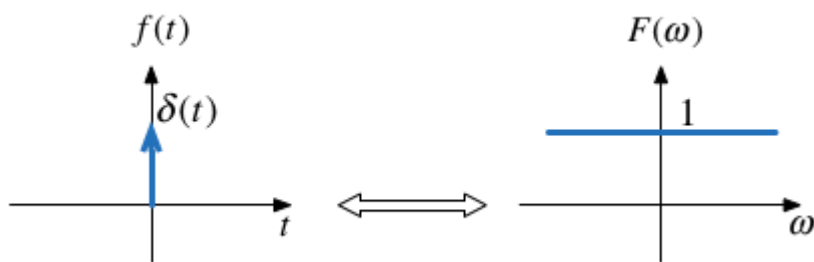


Σχήμα 2. Μοναδιαία κρουστική απόκριση  $\delta(t)$

Σύμφωνα με την αρχή της δυαδικότητας που ισχύει μεταξύ των πεδίων του χρόνου και της συχνότητας, η συνάρτηση  $\delta$  του Dirac που από τον ορισμό της είναι απείρως περιορισμένη στο πεδίο του χρόνου, καταλήγει αντίστοιχα να είναι απείρως εξαπλωμένη στο πεδίο της συχνότητας. Πράγματι, το φάσμα της (spectrum) αν υπολογιστεί μέσω του Μετασχηματισμού Fourier, είναι ίσο με τη μονάδα για οποιαδήποτε συχνότητα:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega t} \delta(t) dt = 1$$

δηλαδή παρουσιάζει ισοκατανεμημένη ισχύ σε όλες τις συχνότητες από το 0 μέχρι το άπειρο (θεωρητικά). Αυτό το φάσμα ονομάζεται λευκό.



Σχήμα 3. Μετασχηματισμός Fourier κρουστικής συνάρτησης

Η σχέση εισόδου  $x(t)$  – εξόδου  $y(t)$  που υλοποιεί το σύστημα της εικόνας 1 είναι συνελικτική στο πεδίο του χρόνου, δηλαδή η έξοδος είναι η συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση. Αυτή υπολογίζεται μέσω του συνελικτικού ολοκληρώματος:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau$$

Προφανώς από την παραπάνω εξίσωση εύκολα βγάζουμε το συμπέρασμα ότι αν γνωρίζω δυο από τις ποσότητες μπορώ εύκολα να υπολογίσω την τρίτη. Για να υπολογίσω συνεπώς την έξοδο του συστήματος θα πρέπει να γνωρίζω την είσοδο  $x(t)$  και το σύστημα στο οποίο εισέρχεται  $h(t)$ . Άρα ο υπολογισμός της εξόδου ισοδυναμεί με την επίλυση του συνελικτικού ολοκληρώματος.

Αν θέλουμε να προσεγγίσουμε το πρόβλημα της αναγνώρισης συστήματος, τότε θα πρέπει να γνωρίζουμε την είσοδο  $x(t)$  του συστήματος και την έξοδο  $y(t)$ , ώστε να υπολογίσουμε την  $h(t)$  που χαρακτηρίζει το σύστημα. Άρα η παραπάνω εξίσωση πρέπει να επιλυθεί ως προς την  $h(t)$  η οποία εμφανίζεται όμως συνελιγμένη με την είσοδο  $x(t)$ . Η επίλυση της απαιτεί την πράξη της αποσυνέλιξης του συστήματος με την είσοδο, η οποία είναι αρκετά δύσκολη για μη τετριμμένες περιπτώσεις σημάτων και συστημάτων.

Μια άλλη περίπτωση επίλυσης είναι όταν αναζητούμε την είσοδο  $x(t)$  ενός γνωστού συστήματος ( $h(t)$ ) και μιας γνωστής εξόδου  $y(t)$ . Συνεπώς και σε αυτή την περίπτωση πρέπει να προηγηθεί η αποσυνέλιξη του σήματος εισόδου με το σύστημα, ώστε στην συνέχεια να υπολογιστεί το σήμα εισόδου.

## 2.2 Ταυτοποίηση ΓΧΑ συστήματος με την μέθοδο ελάχιστων τετράγωνων

Η μέθοδος ελάχιστων τετραγώνων χρησιμοποιείται για την εύρεση μιας εξίσωσης που περιγράφει ένα σύστημα, αν γνωρίζουμε μόνο μια σειρά από πειραματικές τιμές μεγεθών που το περιγράφουν και όχι την ακριβή κρουστική απόκριση του συστήματος. Στην πραγματικότητα, κατά την μελέτη ενός συστήματος, προσπαθούμε να προσδιορίσουμε την μορφή της άγνωστης σχέσης, στην οποία ταιριάζουν καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα, ελέγχοντας μια σειρά γνωστών σχέσεων.

Κάθε φυσικό φαινόμενο μπορεί να περιγραφεί με μια μαθηματική σχέση που συνδέει τα μεγέθη που το επηρεάζουν. Τα μεγέθη που μεταβάλλονται ανεξάρτητα από την πορεία του φαινομένου είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές, ενώ εκείνα που μεταβάλλονται συναρτήσει αυτών και περιγράφουν το φαινόμενο είναι οι εξαρτημένες μεταβλητές.

Αρχικά, παρατηρώντας τα πειραματικά δεδομένα, προσπαθούμε να μαντέψουμε το είδος της καμπύλης που μπορεί να ταιριάζει καλύτερα σε αυτά. Στόχος της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων είναι ο προσδιορισμός των σταθερών συντελεστών της σχέσης που επιλέξαμε για να περιγράψουμε το φαινόμενο. Η σχέση για την οποία τα πειραματικά δεδομένα προσαρμόζονται καλύτερα πάνω στη γραφική της παράσταση είναι και η ζητούμενη.

Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε τις τιμές εισόδου του συστήματος  $x(n)$  με  $n \in \mathbb{N}$  και οι τιμές της εξόδου του συστήματος είναι  $y(n)$  με  $n \in \mathbb{N}$ . Η τιμή της εξόδου κάθε φορά εξαρτάται από ένα γραμμικό συνδυασμό τιμών της εισόδου, εντός ενός παραθύρου παρατήρησης συγκεκριμένου εύρους. Ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων κάθε φορά συντελεστών/δειγμάτων εισόδου που χρησιμοποιούνται στο γραμμικό συνδυασμό αποτελεί την τάξη του συστήματος. Έστω σύστημα τάξεως  $M+1$  όπου:

$$\hat{y}(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + \dots + a_Mx(n-M)$$

όπου  $\hat{y}(n)$  η προσεγγιστική τιμή της εξόδου. Η ελαχιστοποίηση μιας κατάλληλης ποσότητας δίνει τους συντελεστές του γραμμικού προβλέπτη (γραμμικού μοντέλου). Έστω αυτή η ποσότητα  $\varepsilon$  όπου:

$$\varepsilon = \sum_{n=M}^N (y(n) - \hat{y}(n))^2 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon = \sum_{n=M}^N (y(n) - a_0x(n) - a_1x(n-1) - \dots - a_Mx(n-M))^2$$

όπου στην πράξη το  $N$  είναι πολύ μεγαλύτερο του  $M$ . Το παράθυρο παρατήρησης είναι από 0 έως  $N$ , ενώ το παράθυρο αθροισμάτων είναι το  $[M, N]$ . Η ποσότητα  $\varepsilon$  ως τετραγωνική είναι φραγμένη κάτω από το μηδέν, επιπλέον από τη μορφή της είναι προφανώς συνεχής συνάρτηση των  $a_0, a_1, \dots, a_M$  και απειρίζεται θετικά προς όλες τις κατευθύνσεις των αγνώστων. Στα σημεία μηδενισμού του ανάδελτα (της κλίσης) η  $\varepsilon$  έχει πιθανώς τοπικά ακρότατα. Αλλά αφού είναι τετραγωνική, είναι φραγμένη κάτω από το μηδέν και είναι συνεχής, έχει τουλάχιστον μία θέση στην οποία λαμβάνει ολικό ελάχιστο. Συνεπώς στο σημείο ελαχιστοποίησης της  $\varepsilon$  όλες οι μερικές παράγωγοι αυτής είναι μηδέν. Άρα:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_1} = \dots = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_M} = 0 \quad (2)$$

όπου για την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_0} &= -2x(n) \sum_{n=M}^N (y(n) - a_0x(n) - a_1x(n-1) - \dots - a_Mx(n-M)) = \\ &-2 \sum_{n=M}^N (x(n)y(n) - a_0x(n)^2 - a_1x(n)x(n-1) - \dots - a_Mx(n)x(n-M)) \Leftrightarrow \\ &a_0 \sum_{n=M}^N x(n)^2 + a_1 \sum_{n=M}^N x(n)x(n-1) + \dots + a_M \sum_{n=M}^N x(n)x(n-M) = \sum_{n=M}^N x(n)y(n) \end{aligned}$$

Αντίστοιχα από την  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_1} = 0$  θα έχουμε:

$$a_0 \sum_{n=M}^N x(n)x(n-1) + a_1 \sum_{n=M}^N x(n-1)^2 + \dots + a_M \sum_{n=M}^N x(n-M)x(n-1) = \sum_{n=M}^N x(n-1)y(n)$$

Ομοίως δουλεύουμε και με τις άλλες εξισώσεις.

Από τις ισότητες της σχέσης (2) προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα  $(M+1) \times (M+1)$ . Η

μήτρα παρατήρησης του συστήματος έστω  $A$  είναι η ακόλουθη:

$$A = \begin{bmatrix} x(N) & x(N-1) & \dots & x(M) \\ x(N-1) & x(N-2) & \dots & x(M-1) \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ x(N-M) & x(N-M-1) & \dots & x(0) \end{bmatrix}$$

Συνεπώς προκύπτει το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$S \cdot \hat{a} = P$$

Όπου

$$S = AA^T$$

$$= \begin{bmatrix} \sum x(n)^2 & \sum x(n)x(n-1) & \cdots & \sum x(n)x(n-M) \\ \sum x(n)x(n-1) & \sum x(n-1)^2 & \cdots & \sum x(n-M)x(n-1) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \sum x(n)x(n-M) & \sum x(n-1)x(n-M) & \cdots & \sum x(n-M)^2 \end{bmatrix}$$

Και

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_M \end{bmatrix}$$

Και τελικά  $P=AY$ , όπου:

$$Y=[y(n), y(n-1), \dots, y(n-M)]^T$$

### 2.3 Υπολογισμός της εξόδου ενός γραμμικού χρονικά μεταβαλλόμενου (ΓΧΜ) συστήματος

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα μιας εισόδου και μιας εξόδου:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau)u(\tau)d\tau \quad (3)$$

όπου  $t$  είναι η μεταβλητή συνεχούς χρόνου,  $y(t)$  η έξοδος της εισόδου  $u(t)$  και  $h(t, \tau)$  η συνάρτηση μεταφοράς συνεχής στον χρόνο. Έστω με την  $\delta(t)$  δηλώνουμε τον βασικό παλμό ως  $\delta(t)=0$ , αν το  $t \neq 0$  και  $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(\lambda)d\lambda = 1$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $\epsilon > 0$ . Για κάθε πραγματικό αριθμό  $t_1$ , η χρονική ολίσθηση του παλμού  $\delta(t-t_1)$  η τιμή του



βασικού παλμού στον χρόνο  $t=t_1$ . Η έξοδος  $y(t)$  όταν στο σύστημα εφαρμόζεται η είσοδος  $u(t)=\delta(t-t_1)$  δίνεται από τον τύπο:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(t, \tau)d(\tau - t_1)d\tau = h(t, t_1)$$

Συνεπώς η συνάρτηση  $h(t, \tau)$  της σχέσης (3) είναι η έξοδος του συστήματος όταν εφαρμόζεται παλμός  $d(t-\tau)$  την χρονική στιγμή  $\tau$ .

Ένα διακριτού χρόνου, αιτιατό και γραμμικά χρονικά μεταβλητό σύστημα με μία είσοδο  $u(k)$  και μια έξοδο  $y(k)$  Μπορεί να μοντελοποιηθεί από την σχέση

$$y(k) = \sum_{j=-\infty}^k h(k-j)u(j) \quad (4)$$

Όπου  $k$  είναι μια ακέραια μεταβλητή (ένας δείκτης διακριτού χρόνου) και  $h(k, j)$  είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος για τον βασικό παλμό  $\delta(k-j)$ , όπου  $\delta(k-j)=1$  για  $k=j$  και  $\delta(k-j)=0$  για  $k \neq j$ , ο οποίος εφαρμόζεται την χρονική στιγμή  $t$ . Υποθέτουμε ότι το  $u(k)$  και/ή το  $h(k, j)$  συγκλίνουν έτσι ώστε το άθροισμα της σχέσης (4) να είναι καλά ορισμένο.

Για να είναι το σύστημα που μελετάμε πεπερασμένων διαστάσεων θα πρέπει να ισχύει η σχέση είσοδο  $u(k)$  με την έξοδο  $y(k)$  στην  $n$ -ιστή τάξη:

$$y(k+n) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(k)y(k+i) = \sum_{i=0}^m b_i(k)u(k+i) \quad (5)$$

Όπου το  $m \leq n$  και τα  $a_i(k)$  και  $b_i(k)$  είναι συναρτήσεις πραγματικών αριθμών του διακριτού χρόνου μεταβλητής  $k$ . Όταν  $m < n$  το σύστημα ορίζεται από την εξίσωση (5) και έχει το παρακάτω μοντέλο  $N$ - διαστάσεων:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

Όπου

$$A(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0(k) \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -\alpha_1(k-1) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2}(k-n+2) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1}(k-n+1) \end{bmatrix}$$

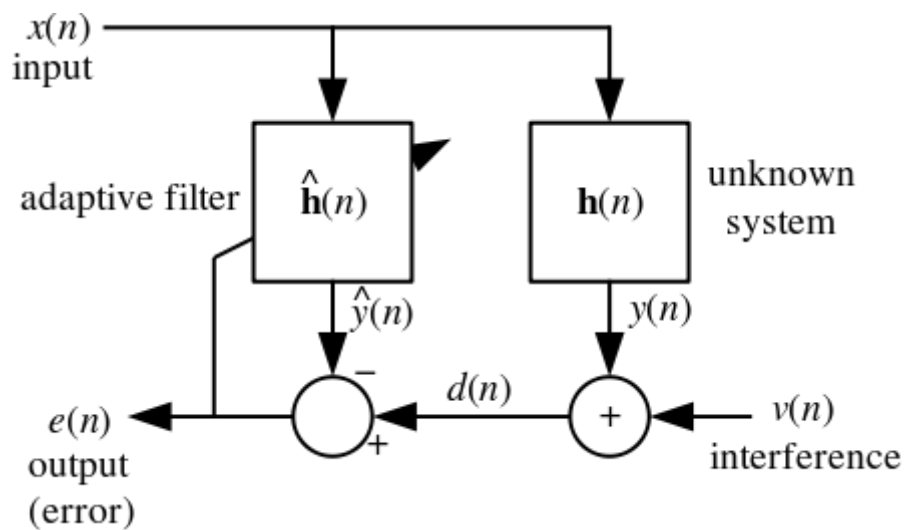
$$B(k) = \begin{bmatrix} b_0(k) \\ b_1(k-1) \\ b_2(k-2) \\ \vdots \\ b_{n-2}(k-n+2) \\ b_{n-1}(k-n+1) \end{bmatrix}$$

Και

$$C = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$$

Όπου  $b_i(k) = 0$  για  $i > m$ .

## 2.4 Ταυτοποίηση ΓΧΜ συστήματος - Ο αλγόριθμος LMS



Εικόνα 4. Αλγόριθμος LMS

Για την ταυτοποίηση γραμμικών χρονικά μεταβλητών συστημάτων αρχικά αναπτύχθηκε ο SD (steepest descent search algorithm) αλγόριθμος, ο οποίος χρησιμοποιεί μια μήτρα αυτοσυσχέτισης  $R = x(n)x^T(n)$  και ένα διάνυσμα διασταυρούμενης συσχέτισης  $p(n) = x(n)d(n)$ . Ο αλγόριθμος αρχικοποιείται αυθαίρετα με το διάνυσμα  $h(0)$ , το οποίο είναι η εξίσωση του προσαρμοστικού φίλτρου, και στην συνέχεια υπολογίζεται επαναληπτικά για  $n=0,1,2,\dots, n_{\max}$  η ποσότητα:

$$h(n+1) = h(n) + \mu[p - R w(n)]$$

όπου το  $\mu$  είναι ο συντελεστής σύγκλισης και αν θεωρήσουμε ότι το  $e$  είναι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, τότε η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως:

$$h(n+1) = h(n) + \mu[E\{e(n)x(n)}]$$

Στην συνέχεια, επειδή υπήρξε η ανάγκη να μειώσουμε το τετραγωνικό σφάλμα  $E\{e(n)^2\}$  με βάση άγνωστα στατιστικά στοιχεία υλοποιήθηκε ο αλγόριθμος LMS (least mean square algorithm). Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί εκτιμήσεις της μήτρας αυτοσυσχέτισης  $R$  και του διανύσματος διασταυρούμενης συσχέτισης  $p$ . Έστω η μήτρα και το διάνυσμα για μια στιγμή  $n$ :

$$\hat{R}(n) = x(n)x^T(n)$$

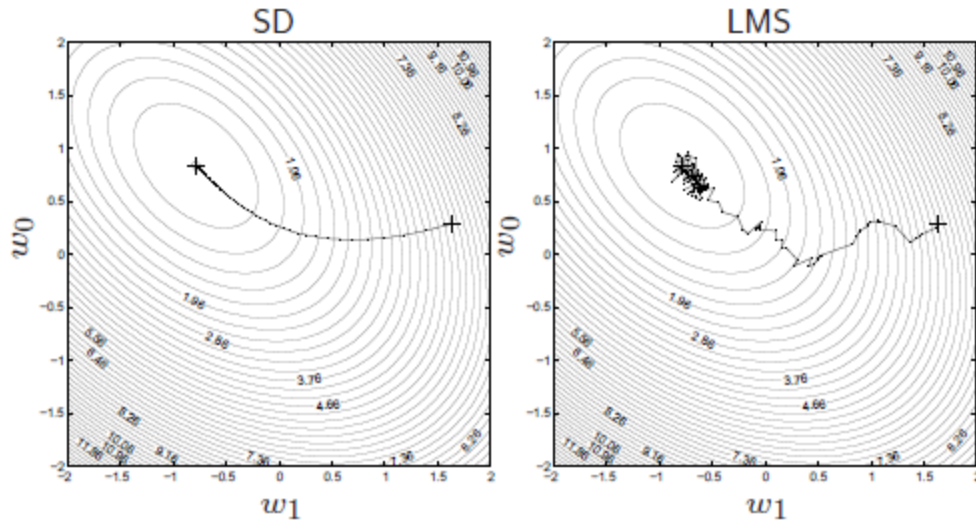
$$\hat{p}(n) = x(n)d^*(n)$$

Για να υπολογίσουμε την ποσότητα  $-2p + 2Rw(n)$  που υπολογίζαμε στον SD αλγόριθμο, στον αλγόριθμο LMS χρησιμοποιούμε την προσέγγιση των  $\hat{R}$  και  $\hat{p}$  έτσι η εξίσωση ενημέρωσης των βαρών γίνεται:

$$\hat{h}(n+1) = \hat{h}(n) + \mu e^*(n)x(n)$$

Όπου  $e^*(n) = d^*(n) - u^H(n)\hat{w}(n)$ .

Συγκρίνοντας τις δυο σχέσεις που προκύπτουν από τον υπολογισμό των βαρών του αλγορίθμου SD και του αλγορίθμου LMS, βλέπουμε ότι διαφέρουν στην ποσότητα  $E\{e(n)x(n)\}$  (για τον SD) και  $e^*(n)x(n)$  (για τον LMS). Η ποσότητα αυτή οδηγεί στον θόρυβο κλίσης, ο οποίος απεικονίζεται στην εικόνα 4.



Εικόνα 5. Θόρυβος κλίσης του LMS

Επειδή ο αλγόριθμος LMS υπολογίζει με ανατροφοδότηση τα βάρη, όπως και ο SD, υπάρχει πιθανότητα ο αλγόριθμος να αποκλίνει, αν το μέγεθος του βήματος  $\mu$  δεν έχει επιλεγεί κατάλληλα. Προκειμένου να διερευνηθεί η σταθερότητα η αρχικοποίηση του σφάλματος επιλέγεται ως:

$$e(n) = \hat{w}(n) - w_0$$

Λόγω του  $\hat{w}(n)$  το  $e(n)$  είναι στοχαστικό σήμα.

Ο αλγόριθμος των ελάχιστων τετραγώνων (LMS) ανήκει στην κλάση των αλγορίθμων που υιοθετούν ένα προσαρμοστικό φίλτρο που χρησιμοποιείται για να μιμηθεί ένα επιθυμητό φίλτρο, προσαρμόζοντας τους συντελεστές του, οι οποίοι σχετίζονται με την δημιουργία του ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος του σήματος (διαφορά μεταξύ του επιθυμητού και του πραγματικού σήματος). Πρόκειται για μια μέθοδο στοχαστικής κλίσης ως προς το ότι το φίλτρο ρυθμίζεται μόνο με βάση το σφάλμα στην τρέχουσα χρονική στιγμή.

Παρακάτω παραθέτουμε τον ψευδοκώδικα του LMS αλγορίθμου:

Παράμετροι:  $p$  (τάξη φίλτρου)

$\mu$  (μέγεθος βήματος)

Αρχικοποίηση:  $\hat{h}(0) = \text{zeros}(p)$

For  $n=0, 1, 2, \dots$

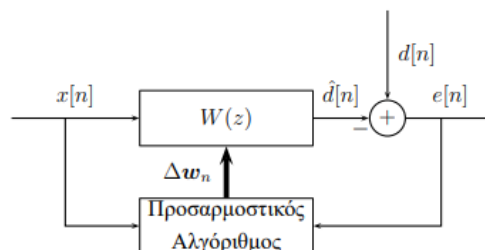
$$x(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-p+1)]^T$$

$$e(n) = d(n) - \hat{h}(n)x(n)$$

$$\hat{h}(n+1) = \hat{h}(n) + \mu e^*(n)x(n)$$

### Κεφάλαιο 3 - Κώδικας και πειραματικά αποτελέσματα

Στην παρούσα εργασία μελετάμε τον αλγόριθμο LMS, ο οποίος χρησιμοποιείται για την αναγνώριση αγνώστων χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων με την βοήθεια προσαρμοστικών φίλτρων. Με βάση τον αλγόριθμο αρχικά γίνεται μια εκτίμηση των συντελεστών του προσαρμοστικού φίλτρου και σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου οι συντελεστές υπολογίζονται και πάλι με στόχο την μείωση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος.



Η σύγκλιση του αλγορίθμου επηρεάζεται σύμφωνα με την θεωρία από το βήμα που επιλέγεται για την μεταβολή του φίλτρου σε κάθε επανάληψη. Επίσης το ίδιο το σύστημα επηρεάζει την σύγκλιση του αλγορίθμου.

Στο πειραματικό αυτό μέρος της εργασίας, στόχος είναι να επιβεβαιωθεί αν οι δυο παραπάνω λόγοι επηρεάζουν πραγματικά την σύγκλιση του αλγορίθμου και να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο την επηρεάζουν.

Για την διεξαγωγή των πειραμάτων αναγνώρισης αγνώστων χρονικά αμετάβλητων συστημάτων υλοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```

clear;
close all;

% Δημιουργούμε το σήμα εισόδου (N τυχαία δείγματα)
N = 2000;
x = randn(1,N);

%Ορίζουμε την κρουστική απόκριση του άγνωστου συστήματος
h = [1 0.8 -0.7 0.6 -0.5];
p = length(h); % Λαμβάνουμε το μήκος της κρουστικής απόκρισης

% Υπολογίζουμε την έξοδο του συστήματος και προσθέτουμε θόρυβο
z = conv(x,h);
y = z + 0.01*randn(1,length(z));

%
% Αλγόριθμος αναγνώρισης του συστήματος: Υπολογίζει το h από
το x και το y
%

% Μέγεθος βήματος ανανέωσης (step size)
mu=input('mu = ');

% Αρχικοποιούμε το άγνωστο h με μηδενικά
h_hat = zeros(1,p);

% Κρατάμε το σφάλμα καθώς τρέχει ο αλγόριθμος
MSE = zeros(1,N-p-1);

% Κρατάμε την εξέλιξη του διανύσματος βαρών
h_all = zeros(N,p);

% Τρέχουμε τον αλγόριθμο LMS
for i = 1:N-p-1,
    x_v = x(p+i-1:-1:i);
    y_hat(i) = x_v*h_hat.';

    h_hat = h_hat + mu*(y(i+p-1)-y_hat(i))*x_v;

    h_all(i,:)=h_hat;
    MSE(i)=norm(h-h_hat);
end

semilogy(MSE);
grid on;
xlabel('Επανάληψη');
ylabel('Τετραγωνικό Σφάλμα');

```

```

figure
plot(h_all(1:N-p-1,:));
hold on;
plot(ones(N-p-1,1)*h,'--');
grid on;
xlabel('Επανάληψη');
ylabel('Σωστές και Εκτιμώμενες Τιμές Βαρών');

```

Ο παραπάνω κώδικας αρχικά δημιουργεί ένα σήμα εισόδου με  $N$  τυχαία δείγματα μέσω της συνάρτησης `randn` της Matlab, η οποία επιστρέφει τυχαίους αριθμούς με βάση την κανονική κατανομή. Στην συνέχεια ορίζουμε την κρουστική απόκριση του άγνωστου συστήματος και μέσω της συνάρτησης `conv` βρίσκουμε την έξοδο του συστήματος και προσθέτουμε τον θόρυβο με την εντολή:

```
y = z + 0.01*randn(1,length(z))
```

Αφού έχουμε το σήμα εισόδου και το σήμα εξόδου θα εκτελέσουμε τον αλγόριθμο αναγνώρισης άγνωστου συστήματος LMS. Με βάση τον παραπάνω κώδικα το βήμα ανανέωσης του αλγορίθμου  $\mu$  δίνεται από τον χρήστη ( $\mu = \text{input}()$ ) και στην συνέχεια επαναληπτικά εκτελείται το τμήμα του κώδικα που υπολογίζει την διαφορά μεταξύ επιθυμητού ( $y$ ) και πραγματικού σήματος ( $y_{\text{hat}}$ ) και μεταβάλει το πραγματικό σήμα με βάση το βήμα  $\mu$  ( $h_{\text{hat}} = h_{\text{hat}} + \mu*(y(i+p-1)-y_{\text{hat}}(i))*x_v$ ) έτσι ώστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ( $\text{MSE}(i)=\text{norm}(h-h_{\text{hat}})$ ) να μειωθεί σε σημαντικό βαθμό.



```

for i = 1:N-p-1,
    x_v = x(p+i-1:-1:i);
    y_hat(i) = x_v*h_hat.';

    h_hat = h_hat + mu*(y(i+p-1)-y_hat(i))*x_v;

    h_all(i,:) = h_hat;
    MSE(i) = norm(h-h_hat);
end

```

Ο κώδικας τελικά οπτικοποιεί τα αποτελέσματα με κυματομορφές:

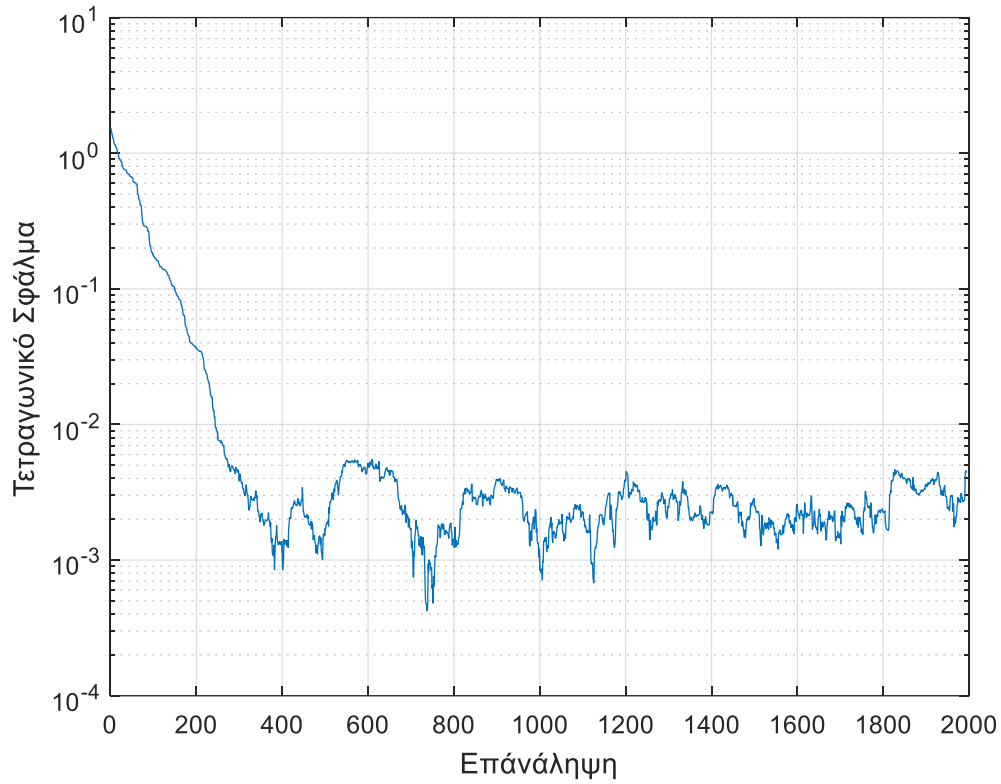
```

semilogy(MSE);
grid on;
xlabel('Επανάληψη');
ylabel('Τετραγωνικό Σφάλμα');

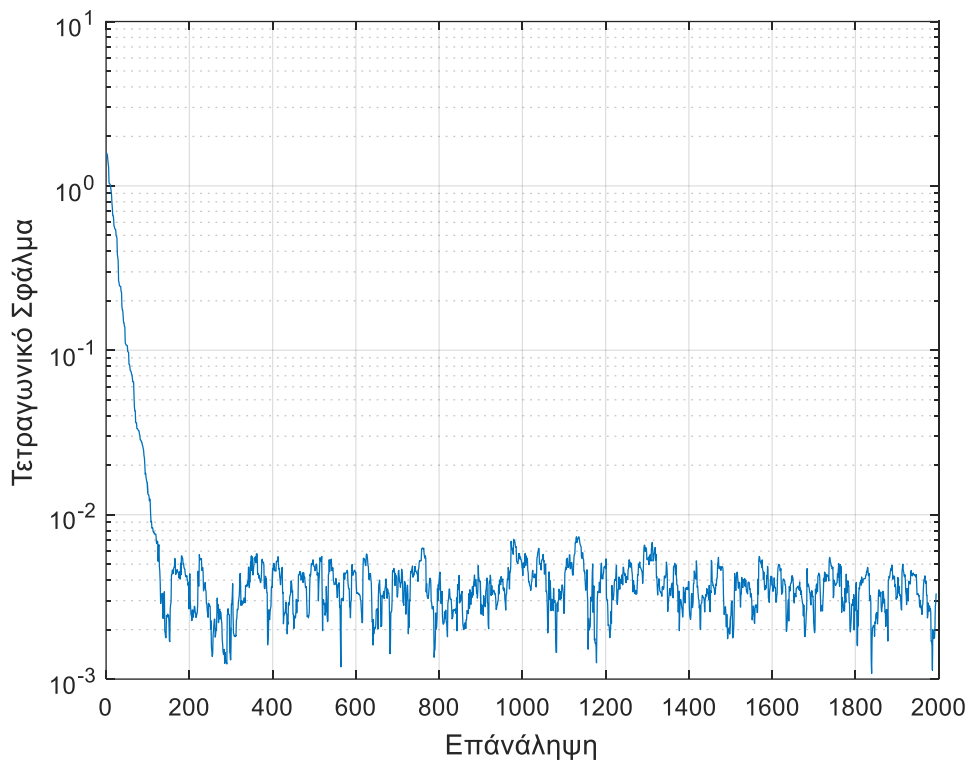
figure
plot(h_all(1:N-p-1,:));
hold on;
plot(ones(N-p-1,1)*h,'--');
grid on;
xlabel('Επανάληψη');
ylabel('Σωστές και Εκτιμώμενες Τιμές Βαρών');

```

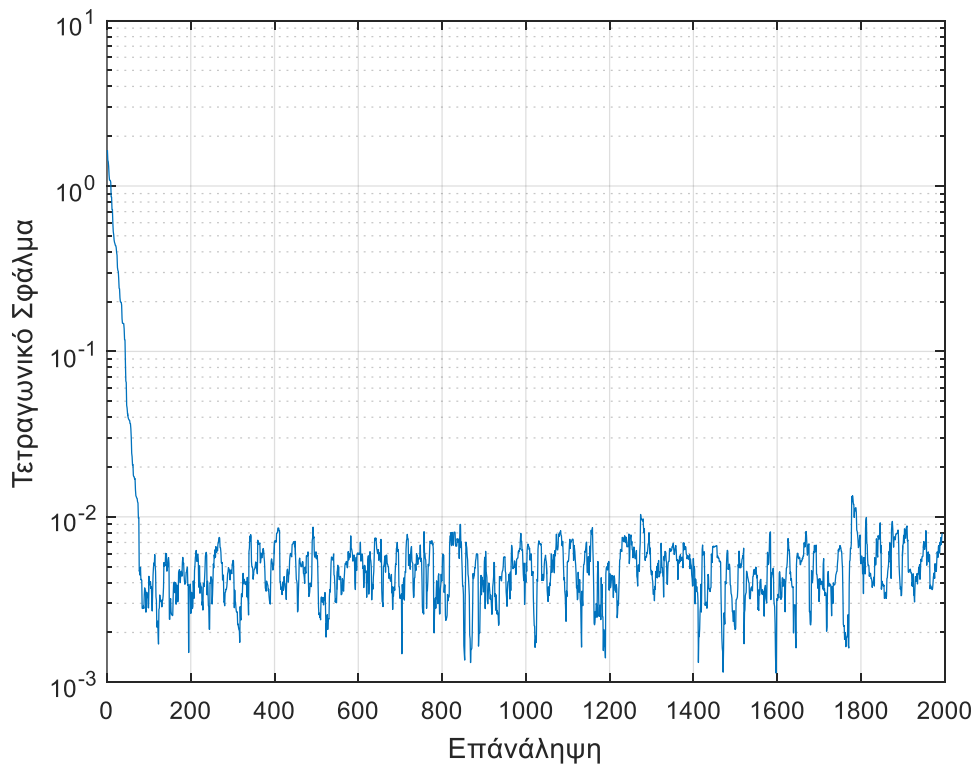
Ο παραπάνω αλγόριθμος εκτελέστηκε για διάφορες τιμές μεγέθους του βήματος ( $\mu$ ). Παρακάτω παραθέτουμε ενδεικτικά τις γραφικές παραστάσεις MSE- πλήθους επαναλήψεων που προέκυψαν μετά τις εκτελέσεις για τις διάφορες τιμές του  $\mu$ :



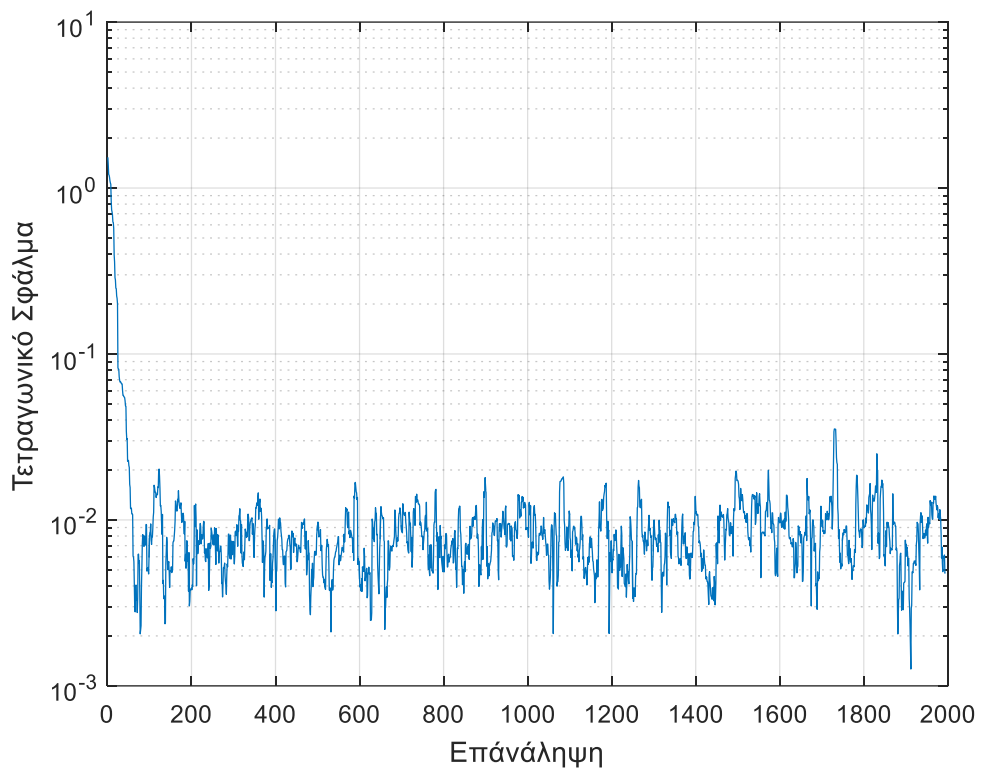
Διάγραμμα 1.  $\mu=0.02$



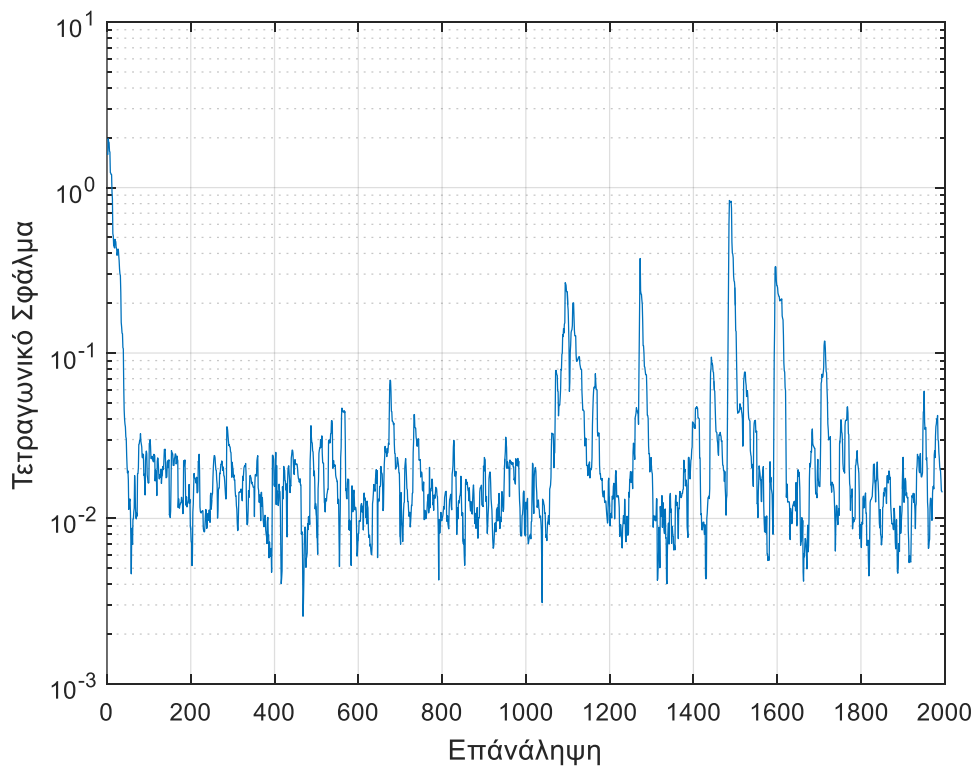
Διάγραμμα 2.  $\mu=0.05$



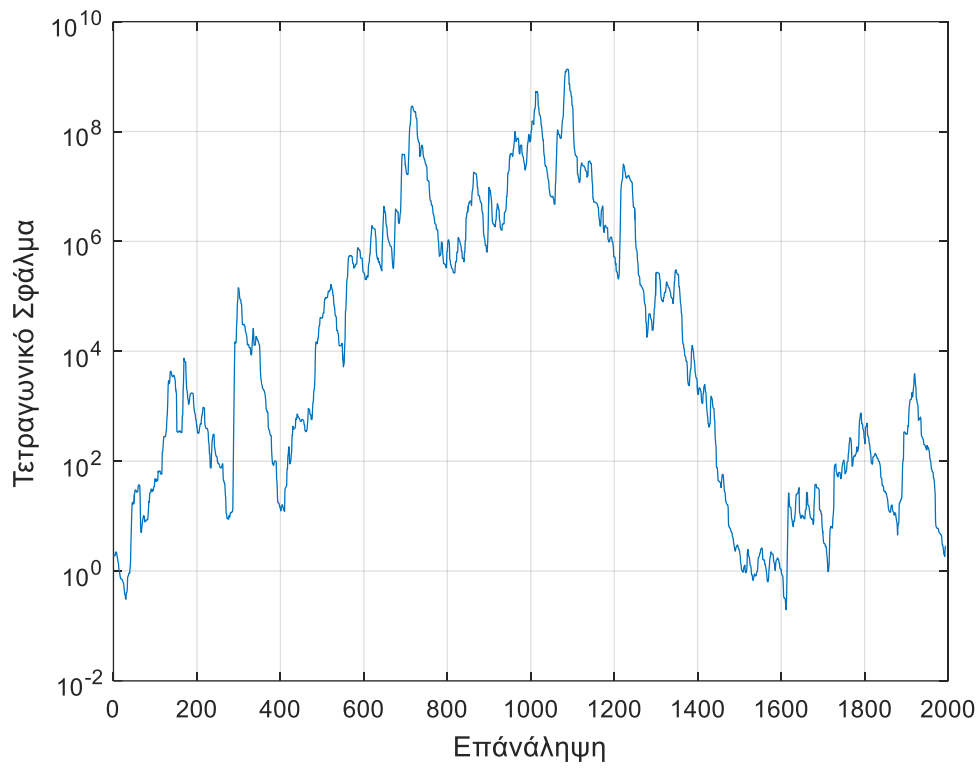
Διάγραμμα 3.  $\mu=0.08$



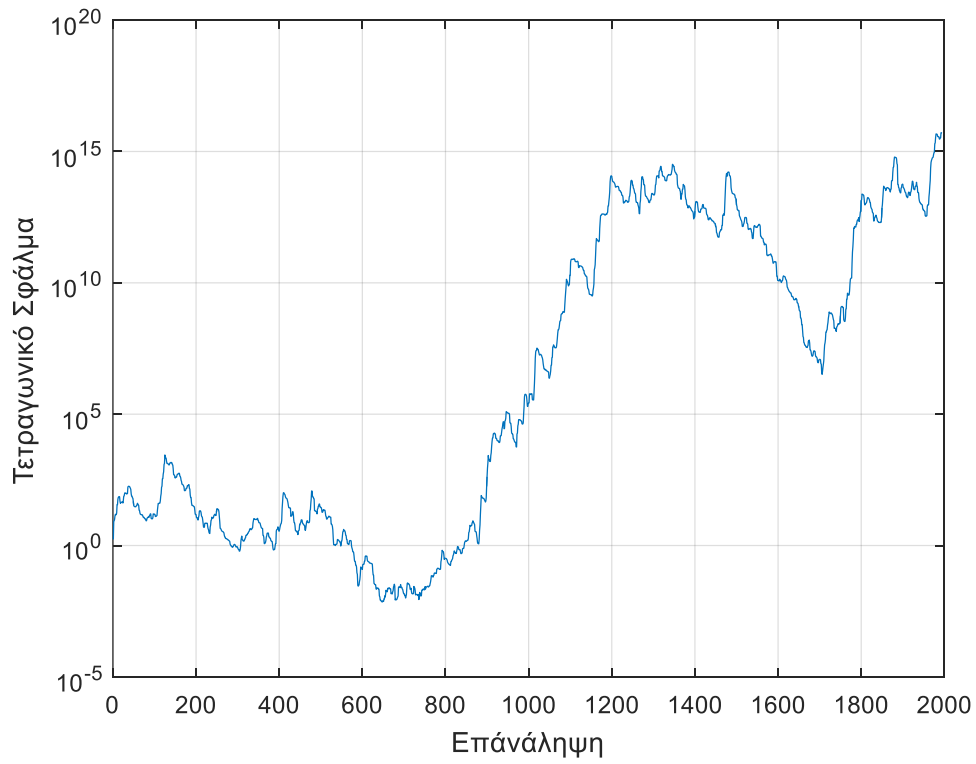
Διάγραμμα 4.  $\mu = 0.15$



Διάγραμμα 5.  $\mu = 0.25$



Διάγραμμα 6. 0.35



Διάγραμμα 7.  $\mu = 0.38$

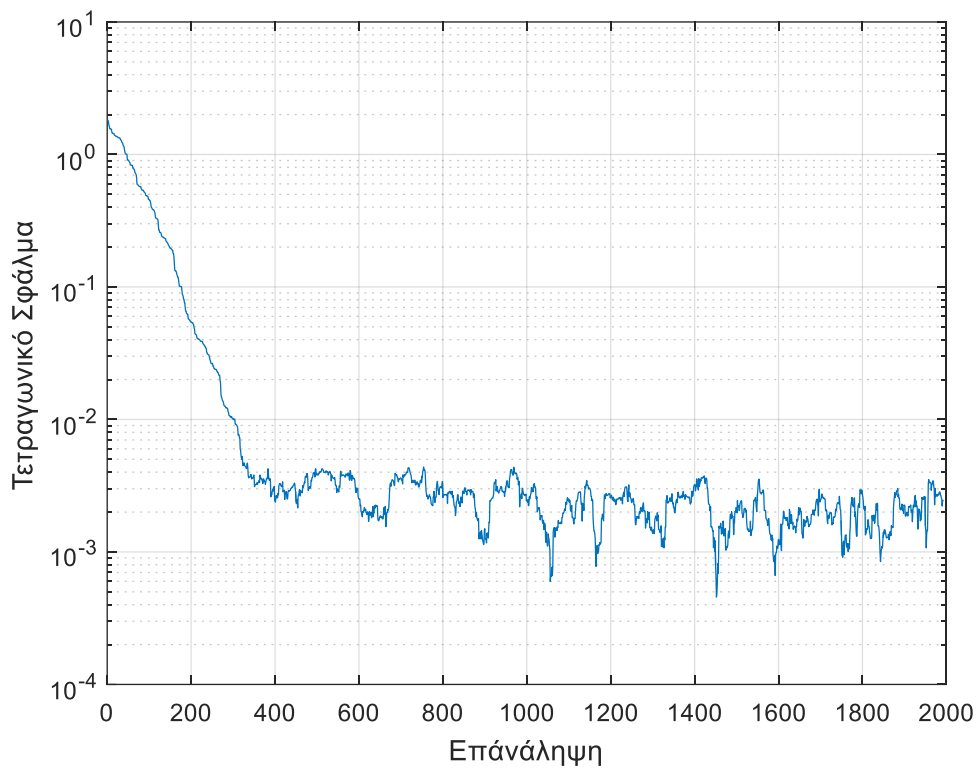
Όπως είναι φανερό και από τα παραπάνω διαγράμματα, όσο μεγαλώνει το μέγεθος του βήματος τόσο πιο γρήγορα φτάνουμε στο εκτιμώμενο σήμα, αλλά το σφάλμα είναι μεγαλύτερο σε σχέση με μικρότερες τιμές του  $\mu$ . Όταν το  $\mu$  γίνει 0.38 και πάνω τότε το τετραγωνικό σφάλμα παρουσιάζει μεγάλες τιμές, οι οποίες αυξάνονται όσο το πλήθος των επαναλήψεων αυξάνεται, που σημαίνει ότι ο αλγόριθμος πλέον δεν μπορεί να προσεγγίσει το σήμα.

Πιο συγκεκριμένα όταν το βήμα είναι 0.02 δηλαδή σχετικά μικρό χρειάστηκαν 400 επαναλήψεις για να μειωθεί το σφάλμα στο  $10^{-35}$  περίπου. Όταν το βήμα υπερδιπλασιάστηκε (0.05) το σφάλμα έφτασε στο  $10^{-3}$  μετά από 180 επαναλήψεις. Δηλαδή υποδιπλασιάστηκαν οι επαναλήψεις που χρειάζονταν για να συγκλίνει ο αλγόριθμος αλλά το σφάλμα αυξάνεται σχετικά λίγο.

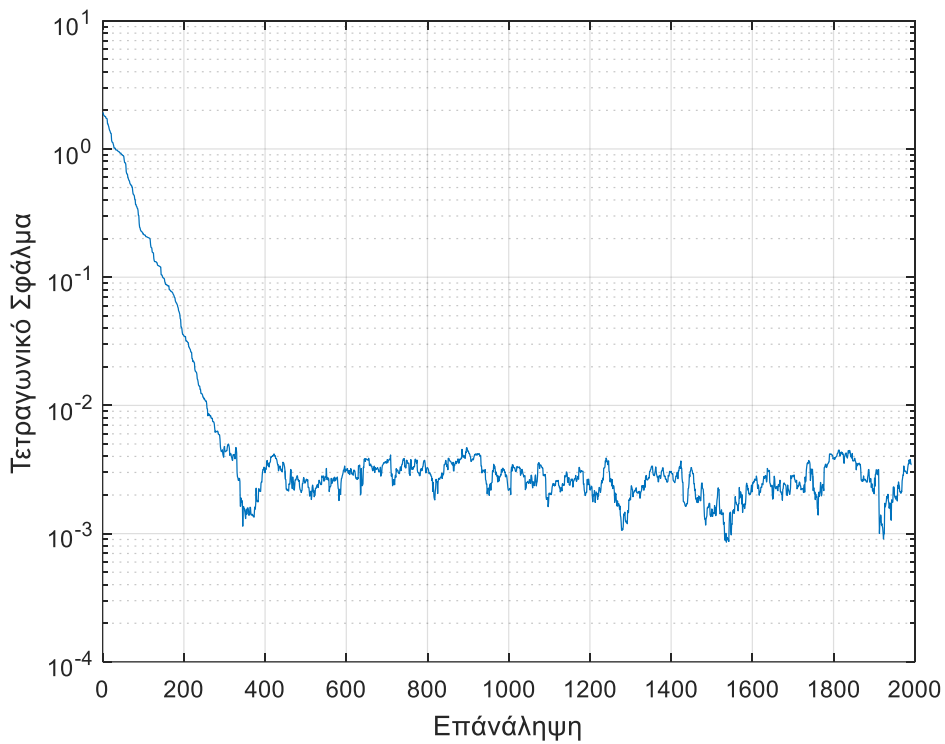
Όταν το βήμα έγινε 7 φορές μεγαλύτερο σε σχέση με το αρχικό (0.15) παρατηρούμε ότι οι επαναλήψεις που χρειάζονται για την σύγκλιση του αλγορίθμου μειώνονται 7 φορές και το σφάλμα φτάνει στο  $10^{-28}$ . Ο αλγόριθμος παρουσιάζει την ίδια συμπεριφορά μέχρι το βήμα να γίνει περίπου 0.38 όπου ο αλγόριθμος αποκλίνει.

Στην συνέχεια εκτελέσαμε τον παραπάνω αλγόριθμο μεταβάλλοντας το μήκος της κρουστικής απόκρισης κρατώντας σταθερή την τιμή του  $\mu$ , ώστε να μελετήσουμε την συμπεριφορά του αλγορίθμου στις διάφορες τιμές της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

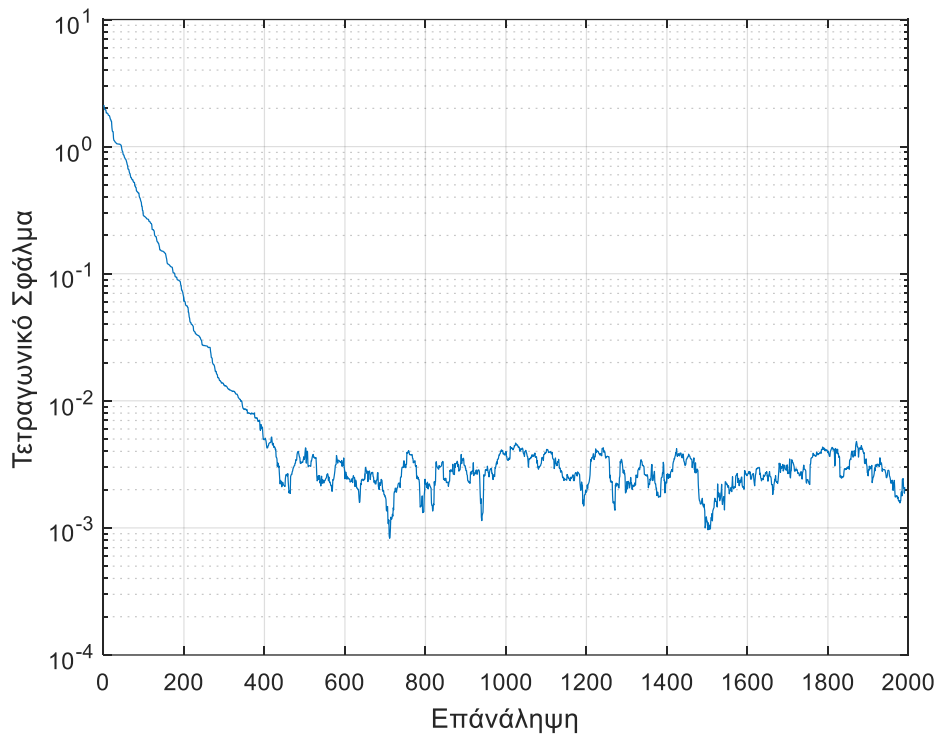
Παρακάτω παραθέτουμε τις γραφικές με την τιμή του  $\mu$  στα 0.02 και για μήκη κρουστικής απόκρισης 6, 7, 8, 11 και 15:



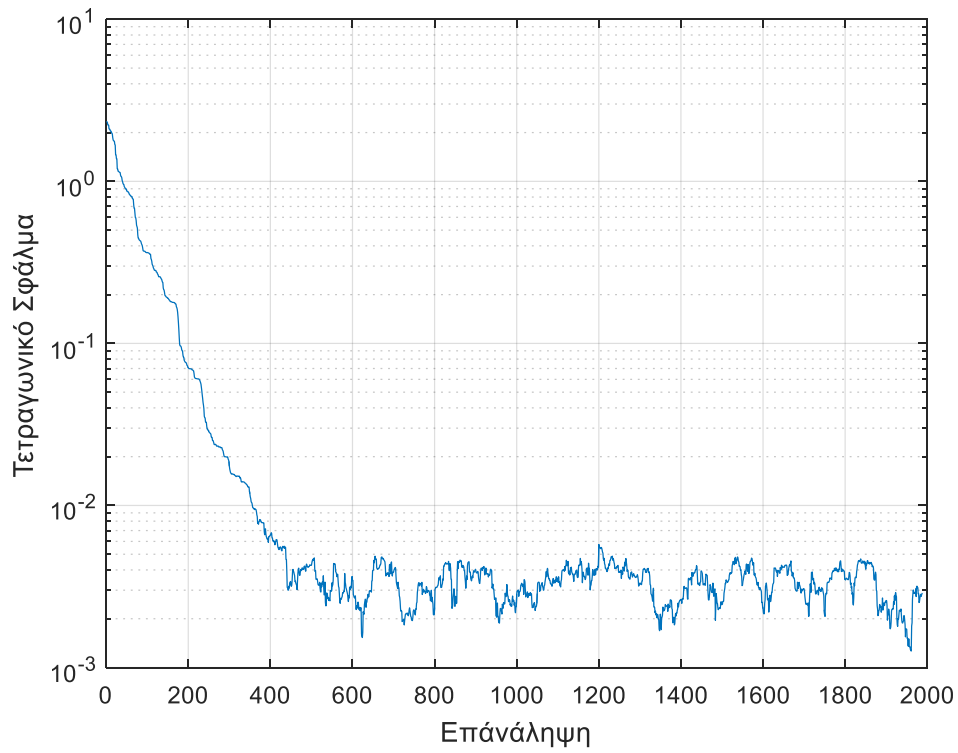
Διάγραμμα 8. Μήκος κρουστικής απόκρισης 6



Διάγραμμα 9. Μήκος κρουστικής απόκρισης 7

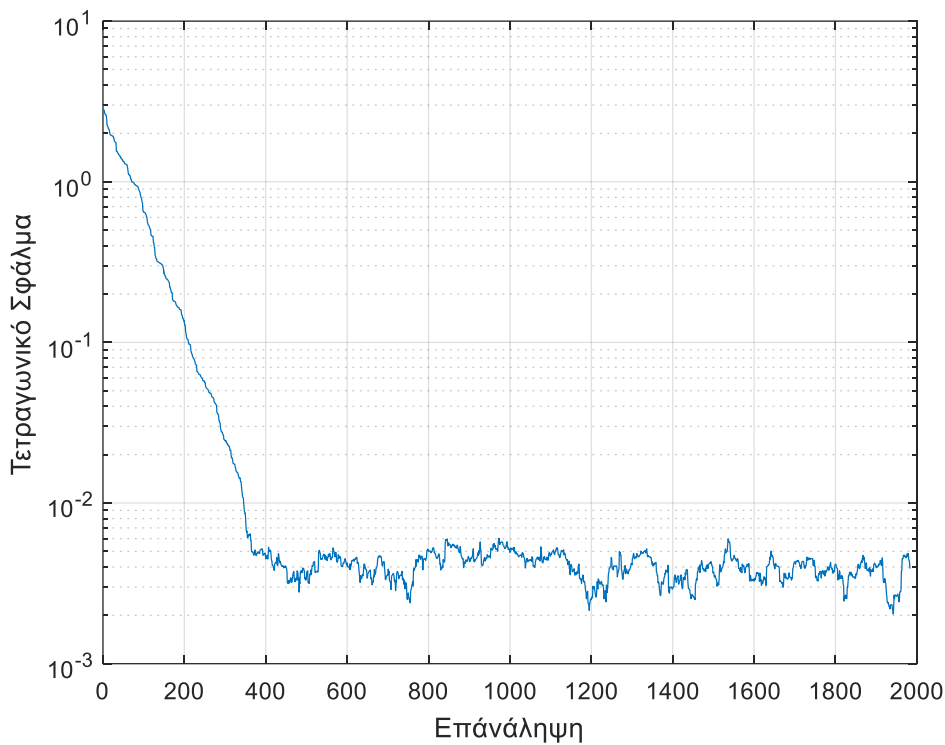


Διάγραμμα 10. Μήκος κρουστικής απόκρισης 8



Διάγραμμα 11. Μήκος κρουστικής απόκρισης 11



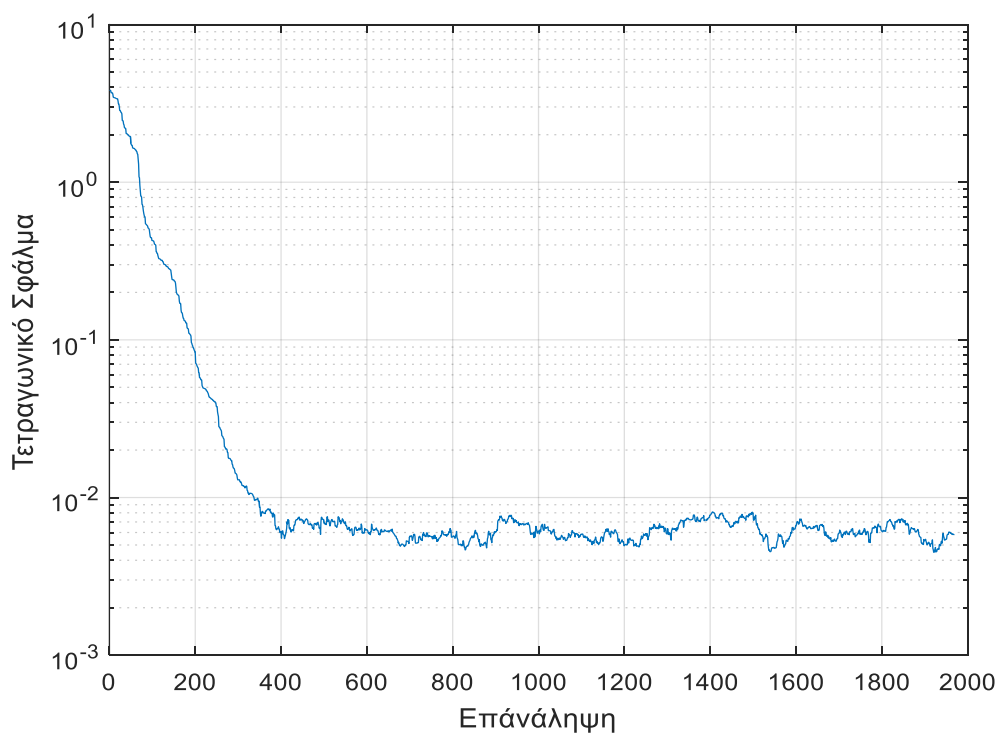


Διάγραμμα 12. Μήκος κρουστικής απόκρισης 15

Μελετώντας τις κυματομορφές που παρήγαγε ο αλγόριθμος με την σταδιακή αύξηση του μήκους της κρουστικής απόκρισης γίνεται φανερό ότι αυξάνεται σταδιακά ο αριθμός των επαναλήψεων που χρειάζεται ο αλγόριθμος για να συγκλίνει, ενώ παρατηρούμε ταυτόχρονη αύξηση του σφάλματος. Πιο συγκεκριμένα, με το αρχικό μήκος της κρουστικής απόκρισης (6) ο αλγόριθμος συγκλίνει σε περίπου 300 επαναλήψεις με σφάλμα περίπου  $10^{-35}$ . Αυξάνοντας το μήκος κατά 1 συντελεστή, οι επαναλήψεις της σύγκλισης είναι σχεδόν 350, ενώ το σφάλμα παρουσιάζει αύξηση στο  $10^{-31}$ . Η συμπεριφορά του αλγορίθμου όταν εκτελέστηκε με μήκος 8 για την κρουστική απόκριση είχε μια μικρή διαφοροποίηση ως προς το σφάλμα, δηλαδή οι επαναλήψεις έφτασαν περίπου τις 420, ενώ το σφάλμα παρέμεινε στο  $10^{-31}$ .

Με μια μεγαλύτερη αύξηση του μήκους της κρουστικής απόκρισης με 11 συντελεστές οι επαναλήψεις παραμένουν στις 420 περίπου, αλλά παρατηρείται αύξηση του σφάλματος στο  $10^{-29}$ . Με κρουστική απόκριση με 15 συντελεστές παρατηρούμε μάλλον μια τάση σταθεροποίησης και των επαναλήψεων που χρειάζονται για την σύγκλιση του αλγορίθμου, αφού χρειάστηκαν περίπου 450 επαναλήψεις. Σε αυτή την περίπτωση το σφάλμα αυξήθηκε ελάχιστα και έφτασε το  $10^{-28}$ .

Για να επιβεβαιώσουμε την τάση σταθεροποίησης που παρατηρήσαμε προηγουμένως εκτελέσαμε τον αλγόριθμο με μήκος κρουστικής απόκρισης διπλάσιο από το προηγούμενο, δηλαδή 30. Η κυματομορφή που πήραμε παρατιθεται στο παρακάτω διάγραμμα, όπου διαφαίνεται η σύγκλιση να ξεκινά μετά τις 450 περίπου επαναλήψεις και το σφάλμα να είναι στο  $10^{-26}$ , επιβεβαιώνοντας την τάση σταθεροποίησης.



Διάγραμμα 13. Μήκος κρουστικής απόκρισης 30

## Σύνοψη συμπερασμάτων

Από την παραπάνω πειραματική διαδικασία προκύπτει το συμπέρασμα ότι η σύγκλιση του αλγορίθμου LMS επηρεάζεται τόσο από το βήμα  $\mu$  του αλγορίθμου, όσο και από το μήκος της κρουστικής απόκρισης. Όπως έγινε φανερό όσο μεγαλώνει το βήμα  $\mu$  του αλγορίθμου τόσο πιο γρήγορα ο αλγόριθμος επιτυγχάνει την σύγκλιση, αλλά επίσης το σφάλμα είναι μεγαλύτερο σε σχέση με την επιλογή ενός μικρότερου βήματος. Επίσης επιλέγοντας ένα μεγάλο βήμα αλγορίθμου αυξάνεται η πιθανότητα ο αλγόριθμος να αποκλίνει.

Από την άλλη πλευρά το μήκος της κρουστικής απόκρισης επηρεάζει κυρίως το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται από τον αλγόριθμο LMS μέχρι να καταλήξει σε σύγκλιση. Όσο μεγαλώνει, δηλαδή το μήκος της κρουστικής απόκρισης τόσο περισσότερες επαναλήψεις απαιτούνται από τον αλγόριθμο για να συγκλίνει. Επιπρόσθετα το μεγαλύτερο μήκος της κρουστικής απόκρισης επιφέρει μεγαλύτερο σφάλμα.

## Βιβλιογραφία

1. B. Widrow and S.D.Stearns, "Adaptive Signal Processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1985.
2. S. Haykin, "Adaptive Filter Theory", Fourth Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2002.
3. 3Choo, P. Padmanabhan, S. Mutsuddy, "An Embedded Adaptive Filtering System on FPGA", Department of Electrical Engineering, San Jose State University, CA 95198-0084 USA
4. Scott C. Douglas, "Analysis of the Multiple-Error and Block Least-Mean-Square Adaptive algorithms", IEEE Transactions on Circuits and Systems – II: Analog and Digital Signal Processing, Vol 42, No. 2, p. 92, February 1995
5. Lattice Semiconductor Corporation, "LMS Adaptive Filter", Reference Design RD1031, December 2006
6. Sinead Mullins, Conor Heneghan, "Alternative Least Mean Square Adaptive Filter Architectures for Implementation on Field Programmable Gate Arrays", Digital Signal Processing Group, Department of Electronic and Electrical Engineering, University College Dublin
7. Ahmed Elhossini, Shawki Areibi, Robert Dony, "An FPGA Implementation of the LMS Adaptive Filter for Audio Processing", IEEE International Conference on Reconfigurable Computing and FPGA's, ReConFig 2006 ,ISBN: 1-4244-0690-0.
8. Διονύσης, Κ. (χ.χ.). *Ταυτοποίηση μη γραμμικών συστημάτων υψηλής τάξης: Μια προσέγγιση βασισμένη στις σειρές Volterra*. Πάτρα.
9. Θεοδωρίδης, Σ., Μπερμπερίδης, Κ., & Κοφίδης, Λ. (2003). *Εισαγωγή στην θεωρία σημάτων και συστημάτων*. Αθήνα.
10. Λιάβας, Α. (χ.χ.).
11. Μπερμπερίδης. (χ.χ.).