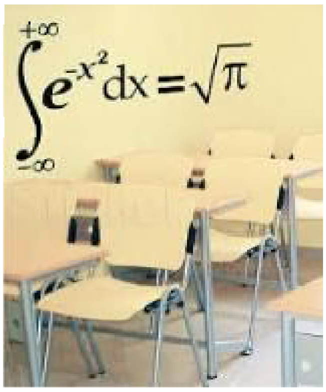
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

“ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ”

Ονοματεπώνυμο: ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΣ



Επιβλέπων Καθηγητής: ΒΑΣΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ

2016

Πρόλογος

Κατά την συγγραφή της παρούσας εργασίας καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια για την όσο το δυνατόν ευκολότερη εισαγωγή του αναγνώστη στο αντικείμενο του ολοκληρωματικού λογισμού και την απλούστερη διατύπωση των προχωρημένων εννοιών που παρουσιάζονται στα διάφορα κεφάλαια.

Όπως συνήθως συμβαίνει σε μια εργασία πολλές ευχαριστίες οφείλονται σε πολλά άτομα. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές μου που με βοήθησαν με τα σχόλια , τις σημειώσεις τους και τις παρατηρήσεις τους στην εμφάνιση και στο κείμενο της εργασίας.

Στο φίλο μου Δημήτρη για τη μεγάλη του συμβολή στην επεξεργασία διαφόρων θεμάτων και φυσικά στην οικογένειά μου όπου μου συμπαραστάθηκε υπομονετικά σε όλα αυτά τα χρόνια που χρειάστηκαν για να ολοκληρώσω τις σπουδές μου.

Στον αδερφό μου συγκεκριμένα οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ για την βοήθειά του σε όλη αυτήν την πορεία. Επίσης για τον χρόνο, την υπομονή του και την βοήθειά του στην ηλεκτρονική επεξεργασία του κειμένου.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία βασίζεται σε βιβλιογραφική επισκόπηση και ασχολείται με την μελέτη των ολοκληρωμάτων και των εφαρμογών τους στην οικονομική επιστήμη και στη διοίκηση επιχειρήσεων. Χωρίζεται σε δύο μέρη, την μελέτη των βασικών εννοιών και θεωρημάτων του ολοκληρωτικού λογισμού και την παρουσίαση παραδειγμάτων εφαρμογής τους στην οικονομία και τη διοίκηση. Κάθε μέρος αποτελείται από τρία κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο, ορίζεται το ολοκλήρωμα Riemann, διατυπώνεται και αποδεικνύεται το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann, μελετώνται συγκεκριμένες κλάσεις ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, ορισμένες ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann και η βασικότερη εφαρμογή του ορισμένου ολοκληρώματος αυτή του υπολογισμού εμβαδού επίπεδου χωρίου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, διατυπώνεται και αποδεικνύεται το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα, παρουσιάζονται οι σημαντικότερες τεχνικές ολοκλήρωσης και αποδεικνύονται δύο από αυτές.

Στο τρίτο κεφάλαιο, μελετώνται τα γενικευμένα ολοκληρώματα, ορίζονται οι ειδικές συναρτήσεις Γάμμα και Βήτα και παρουσιάζεται ο μετασχηματισμός Laplace. Στη συνέχεια, γίνεται μια σύντομη αναφορά στο αριθμητικό και στο διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, μελετάται ο προσδιορισμός του συνολικού μεγέθους από το αντίστοιχο οριακό, η πιο συνηθισμένη εφαρμογή του ολοκληρώματος σε όλες τις εφαρμοσμένες επιστήμες.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται ορισμένα υποδείγματα της οικονομικής επιστήμης και διοίκησης επιχειρήσεων, που βασίζονται στον ολοκληρωτικό λογισμό. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται, η συνάρτηση κατανάλωσης, οι επενδύσεις και ο σχηματισμός κεφαλαίου, η παρούσα αξία χρηματορροής, τα πλεονάσματα καταναλωτή και παραγωγού και οι καμπύλες μάθησης.

Στο τελευταίο κεφάλαιο, παρουσιάζονται το υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης του Domar και το υπόδειγμα του Domar για το δημόσιο χρέος, που από μαθηματικής πλευράς βασίζονται στην έννοια του ολοκληρώματος.

Abstract

This paper is based on bibliographic overview and its about Integrals and their applications in Economic Science and Business Management. It is composed by two parts; the study of basic concepts and theorems of Integral Calculus and some examples about their application in Economy and Management. In each part there are three chapters.

In the first chapter, we define the Riemann Integral, we give Riemann's criterion for integrability and we study certain types of integrable functions, some of the properties of Riemann Integral and its most significant application, that of calculating the area under a curve.

In the second one, we give the Mean Value theorem for integrals, we define the Indefinite Integral, we present the most significant techniques of integration and how two of them can be proved.

In the third chapter, we study the Improper Integral, we define the specific functions Gamma and Beta and the Laplace transformation is presented. In addition, the line integral of a scalar and a vector field are shortly displayed.

In the fourth one, the total function is determined given the marginal one, which is the most common application of integrals in Applied Sciences.

In the fifth chapter, we present some models of Economic Science and Business Management, which are based on Integral Calculus. To be more accurate, we exhibit the following subjects: the consumption function, investments and capital formation, the present value of a cash flow, consumer and producer surplus and learning curves.

In the last one, we present Domar's capital expansion model and Domar's model of public debt, which are also based on Integral Calculus.

Περιεχόμενα

Πρόλογος..........-2-
Περίληψη..........-3-
Περιεχόμενα..........-4-
Εισαγωγή..........-6-
Μέρος Α'
Κεφάλαιο 1ο: Ολοκλήρωμα Riemann..........-7-
1.1 Ο ορισμός του Darboux..........-7-
1.2 Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann..........-8-
1.3 Κλάσεις ολοκληρώσιμων συναρτήσεων..........-10-
1.3.1 Ολοκληρωσιμότητα μονότονων συναρτήσεων..........-11-
1.3.2 Ολοκληρωσιμότητα συνεχών συναρτήσεων..........-11-
1.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann..........-11-
1.4.1 Μέση τιμή ολοκληρώματος..........-12-
1.5 Εμβαδά επίπεδων χωρίων..........-13-
1.5.1 Υπολογισμός του εμβαδού κάτω απο καμπύλη συνάρτησης με μη αρνητικές τιμές..........-13-
1.5.2 Υπολογισμός του εμβαδού όταν η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές..........-14-
1.5.3 Υπολογισμός του εμβαδού όταν η συνάρτηση παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές..........-14-
1.5.4 Υπολογισμός του εμβαδού μεταξύ καμπυλών..........-15-
Κεφάλαιο 2ο: Αόριστο ολοκλήρωμα..........-16-
2.1 Το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού..........-16-
2.2 Αόριστο ολοκλήρωμα..........-17-
2.3 Μέθοδοι ολοκλήρωσης..........-17-
2.3.1 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες..........-17-
2.3.2 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση..........-18-
2.4 Τεχνικές ολοκλήρωσης..........-20-
2.4.1 Πίνακας στοιχειωδών ολοκληρωμάτων..........-20-
2.4.2 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με αντικατάσταση..........-20-
2.4.3 Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα..........-21-
2.4.4 Ολοκλήρωση κατά μέρη..........-22-
2.4.5 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων..........-22-
Κεφάλαιο 3ο: Γενικευμένα και επικαμπύλια ολοκληρώματα..........-24-
3.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα..........-24-
3.1.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα μη φραγμένων συναρτήσεων..........-24-
3.1.2 Γενικευμένα ολοκληρώματα σε μη φραγμένα διαστήματα..........-26-
3.1.3 Ειδικές συναρτήσεις..........-27-
3.1.4 Μετασχηματισμός Laplace..........-28-
3.2 Επικαμπύλια ολοκληρώματα..........-30-
3.2.1 Αριθμητικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα..........-30-
3.2.2 Διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα..........-31-
Μέρος Β'
Κεφάλαιο 4ο: Γενικές εφαρμογές των ολοκληρωμάτων σε οικονομικά και διοικητικά προβλήματα..........-32-
4.1 Εύρεση ολικού μεγέθους από το αντίστοιχο οριακό..........-32-
Κεφάλαιο 5ο: Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων σε υποδείγματα της οικονομικής επιστήμης και της διοίκησης επιχειρήσεων..........-36-
5.1 Η συνάρτηση κατανάλωσης..........-36-
5.2 Απόθεμα κεφαλαίου και επενδύσεις..........-37-
5.3 Παρούσα Αξία Χρηματορροής..........-38-

5.3.1 Μαθηματική έννοια της Απόσβεσης..........-40-
5.3.2 Κριτήρια αξιολόγησης επενδύσεων..........-42-
5.4 Πλεόνασμα καταναλωτή και παραγωγού..........-44-
5.4.1 Πλεόνασμα του καταναλωτή..........-44-
5.4.2 Πλεόνασμα του παραγωγού..........-45-
5.4.3 Μεγιστοποίηση Κοινωνικού Πλεονάσματος..........-46-
5.5 Καμπύλες Μάθησης..........-49-
Κεφάλαιο 6ο: Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων στη θεωρία του Domar..........-50-
6.1 Το υπόδειγμα μεγέθυνσης του Domar..........-50-
6.2 Το υπόδειγμα του Domar για το δημόσιο χρέος..........-53-
Βιβλιογραφία..........-55-
Παράρτημα..........-56-

<u>Εισαγωγή</u>

Οι αρχές του Ολοκληρωτικού Λογισμού πρέπει να αναζητηθούν στους γεωμετρικούς υπολογισμούς εμβαδών και όγκων στην αρχαιότητα. Στον Εύδοξο, τον Κνίδιο, οφείλεται η "μέθοδος της εξάντλησης", με βάση την οποία το εμβαδόν και ο όγκος υπολογίζονται μέσω του σπασίματος τους σε άπειρα τμήματα για τα οποία ήταν γνωστό το εμβαδόν ή ο όγκος αντίστοιχα. Την μέθοδο αυτή ανέπτυξε περαιτέρω και χρησιμοποίησε και ο Αρχιμήδης. Η μεγαλύτερη πρόοδος στον Ολοκληρωτικό Λογισμό σημειώθηκε με την ανακάλυψη του θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού, που συνδέει την Ολοκλήρωση με την Διαφόριση, σχεδόν ταυτόχρονα από τους J. Gregory, I. Barrow, I. Newton και G.W. Leibniz. Ένας αυστηρός ορισμός του ολοκληρώματος δόθηκε από τον Γερμανό μαθηματικό G.B. Riemann. Βασίζεται σε ένα όριο που προσεγγίζει την επιφάνεια μιας καμπυλόγραμμης περιοχής με το να σπάει την περιοχή σε κάθετες λωρίδες. Τα άνω και κάτω αθροίσματα στην μορφή που θα δούμε παρακάτω οφείλονται στον G. Darboux, ενώ τα άνω και κάτω ολοκληρώματα στους Ιταλούς μαθηματικούς V. Voltera και G. Peano. Αλλά οι διαφορές αυτές είναι απλές παραλλαγές στην ίδια θεμελιώδη έννοια. Έπειτα, η έννοια του ολοκληρώματος εξελίχθηκε, σε περιπτώσεις όπου ο τύπος της συνάρτησης ή το πεδίο ορισμού της ολοκλήρωσης έχουν γενικευθεί. Για παράδειγμα, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ορίζεται για συναρτήσεις πεισσότερων μεταβλητών, και το διάστημα της ολοκλήρωσης $[\alpha,\beta]$αντικαθίστανται από μια καμπύλη μεταξύ δυο σημείων του επιπέδου ή του χώρου. Στο επιφανειακό ολοκλήρωμα, η καμπύλη αυτή αντικαθίσταται από μια επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο. Το τελευταίο ουσιαστικό βήμα για την αποκατάσταση του κυρίαρχου ρόλου της Ολοκλήρωσης στην Μαθηματική Ανάλυση έγινε από το Γάλλο μαθηματικό H. Lebesgue, ο οποίος ανέπτυξε τη σύγχρονη Θεωρία Ολοκλήρωσης και Μέτρου.

Στην αρχαία Ελλάδα, το κίνητρο για την εξέλιξη των Μαθηματικών ήταν φιλοσοφικό και θεωρητικό, κι αυτό είχε σαν αποτέλεσμα την αναζήτηση της εσωτερικής αρμονίας και της υψηλής αυστηρότητας. Αντίθετα τον 17ο αιώνα, το κύριο κίνητρο για την εξέλιξη των Μαθηματικών ήταν η αναζήτηση και η απόκτηση της γνώσης που θα χρησιμεύσει για την επερχόμενη τεχνολογική ανάπτυξη. Έκτοτε, η σημασία και η συμβολή των Μαθηματικών στην ανάπτυξη Φυσικών και Κοινωνικών Επιστημών είναι δεδομένη και έχει συνδεθεί με την ιστορική εξέλιξη των επιστημών αυτών. Σήμερα, κυρίως λόγω της ραγδαίας τεχνολογικής ανάπτυξης, αλλά και της εξαιρετικά σημαντικής προόδου συγκεκριμένων επιστημών η συμβολή και η σημασία των Μαθηματικών στην αντιμετώπιση των νέων αλλά και κλασσικών προβλημάτων, π.χ. στην Βιολογία, στην Χημεία, στις Τεχνολογικές Επιστήμες και στην Ιατρική λαμβάνει νέες διαστάσεις. Η Οικονομία και η Διοίκηση Επιχειρήσεων δεν θα μπορούσαν να αποτελέσουν εξαίρεση. Η χρήση των μαθηματικών στην Οικονομία χρονολογείται από τον 17ο αιώνα, αλλά η μαθηματικοποίηση της Οικονομίας ξεκίνησε στις αρχές του 19ου. Τα Μαθηματικά επιτρέπουν στους οικονομολόγους να σχηματίσουν προτάσεις με νόημα, που μπορούν εύκολα να ελεγχθούν. Επιπλέον τους δίνεται η δυνατότητα να κάνουν συγκεκριμένες και σαφείς υποθέσεις για αμφιλεγόμενα ζητήματα, που θα ήταν αδύνατη χωρίς τα μαθηματικά. Ένα μεγάλο μέρος της οικονομικής θεωρίας παρουσιάζεται με μαθηματικά οικονομικά μοντέλα με στόχο να αποσαφηνιστούν οι αρχικές παραδοχές αλλά και τα αποτελέσματα.

Στη συνέχεια, θα επικεντρωθούμε σε παραδείγματα εφαρμογών του Ολοκληρωτικού Λογισμού στην Οικονομία και την Διοίκηση Επιχειρήσεων και σε υποδείγματα της οικονομικής θεωρίας που παρουσιάζονται με μαθηματικά μοντέλα στα οποία κυρίαρχο ρόλο διαδραματίζουν τα ολοκληρώματα. Θα προηγηθεί η μελέτη του ορισμένου και του αόριστου ολοκληρώματος – των θεμελιωδών εννοιών του Ολοκληρωτικού Λογισμού – όπως επίσης και των γενικευμένων και επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται σε ορισμένα από τα υποδείγματα. Στόχος μας δεν είναι να εξαντλήσουμε την μελέτη του Ολοκληρωτικού Λογισμού, αλλά να εξετάσουμε τις πιο σημαντικές εφαρμογές του στις παραπάνω επιστήμες.

<u>Κεφάλαιο 1ο</u> ΜΕΡΟΣ Α'
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIEMANN

1.1 Ο ορισμός του Darboux

Σε αυτή την παράγραφο ορίζουμε το ολοκλήρωμα Riemann για φραγμένες συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα κλειστό διάστημα.

Δίνουμε πρώτα μερικούς βοηθητικούς ορισμούς:

1. Έστω $[\alpha,\beta]$ένα κλειστό διάστημα.

Διαμέριση του $[\alpha,\beta]$θα λέμε κάθε πεπερασμένο σύνολο $P = \{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$του $[\alpha,\beta]$με $x_0 = \alpha$και $x_n = \beta$.
Υποθέτουμε ότι $x_k < x_{k+1} \forall k = 0,\ldots,n-1$.
Γράφουμε $P = \{\alpha = x_o < x_1 <\ldots< x_n = \beta\}$για να τονίσουμε αυτή τη διάταξη.

2. Ονομάζουμε **πλάτος** της διαμέρισης$P = \{\alpha = x_o < x_1 <\ldots< x_n = \beta\}$το μεγαλύτερο από τα μήκη τωνnυποδιαστημάτων $[x_k, x_{k+1}]$στα οποία ηP χωρίζει το $[\alpha,\beta]$.

Δηλαδή, $||P||:= max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$.

Θεωρούμε τώρα μια **φραγμένη** συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$και μια διαμέριση $P = \{\alpha = x_o < x_1 <\ldots< x_n = \beta\}$του $[\alpha,\beta]$.
Για κάθε $k = 0,1,\ldots,n-1$ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς :

$$m_k = inf\{f(x): x_k \le x \le x_{k+1}\}$$

και

$$M_k = sup\{f(x): x_k \le x \le x_{k+1}\}$$

Για κάθε διαμέρισηP ορίζουμε τώρα το *άνω* και *κάτω άθροισμα της* fως προς τηνPμε τον εξής τρόπο:

- $U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} \quad M_k(x_{k+1} - x_k)$**το άνω άθροισμα της** f**ως προς την**P
- $L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} \quad m_k(x_{k+1} - x_k)$**το κάτω άθροισμα της** f**ως προς την**P.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

1. Είναι προφανές ότι $L(f,P) \le U(f,P)$.
2. Αν $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$μια φραγμένη συνάρτηση καιP_1,P_2δύο διαμερίσεις του$[\alpha,\beta]$τότε $L(f,P_1) \le U(f,P_2)$.

Ορίζουμε τώρα σαν **κάτω ολοκλήρωμα της** f**στο** $[\alpha,\beta]$το

$$\underline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx = sup\{L(f,P): P διαμέριση του [\alpha,\beta]\}$$

και σαν **άνω ολοκλήρωμα της** f**στο** $[\alpha,\beta]$το

$$\overline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx = inf\{U(f,Q): Q διαμέριση του [\alpha,\beta]\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\underline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx \le \overline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx$.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με τους ορισμούς της Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης και του ολοκληρώματος Riemann.

Ορισμός:
Μια φραγμένη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$λέγεται **Riemann ολοκληρώσιμη** αν $\underline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx = \overline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx$.
Η κοινή τιμή τιμή του κάτω και του άνω ολοκληρώματος της fστο$[\alpha,\beta]$λέγεται **ολοκλήρωμα Riemann τηςf στο**$[\alpha,\beta]$και συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ή $\int_\alpha^\beta f$.

<u>*Σχόλιο:*</u>
Ο παραπάνω ορισμός για την ολοκληρωσιμότητα μιας φραγμένης συνάρτησης$f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$οφείλεται στον **Gaston Darboux**.
Ο πρώτος αυστηρός ορισμός της ολοκληρωσιμότητας δόθηκε από τον **Bernhard Riemann** και είναι ο εξής:

▪ Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$φραγμένη συνάρτηση. Λέμε ότι ηfείναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $I(f)$με την εξής ιδιότητα:

> Για κάθε $\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε $\delta>0$ ώστε: αν $P=\{\alpha=x_o<x_1<\ldots<x_n=\beta\}$μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$με πλάτος $\|P\|<\delta$και αν $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,n-1$ είναι τυχούσα επιλογή σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P , τότε $|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)-I(f)|<\varepsilon$.

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο $I(f)$είναι το (R)-ολοκλήρωμα της fστο$[\alpha,\beta]$.

<u>Συμβολισμός:</u> Συνήθως γράφουμεΞγια την επιλογή σημείων $\{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}\}$και $\sum(f,P,\Xi)$για το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$.
Παρατηρούμε ότι για την ίδια διαμέρισηPμπορούμε να έχουμε πολλές διαφορετικές επιλογές $\Xi=\{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}\}$με $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$.

Η βασική ιδέα πίσω από τον ορισμό είναι ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\lim\sum(f,P,\Xi)$όταν $\|P\|\to 0$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια φραγμένη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux αν και μόνο αν είναι ολοκλήρωση κατά Riemann.

1.2 Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann.

Ο ορισμός του ολοκληρώματος που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο δεν είναι εύχρηστος για να δούμε αν μία φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ή όχι. Συνήθως χρησιμοποιούμε το ακόλουθο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας.

Κριτήριο του Riemann:
Έστω$f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$φραγμένη συνάρτηση. Η$f$είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο άν για κάθε$\varepsilon>0$μπορούμε να βρούμε διαμέριση P_ετου$[\alpha,\beta]$ώστε $U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$.

Το κριτήριο Riemann διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής:

Έστω$f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$φραγμένη συνάρτηση. Η$f$είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο άν υπάρχει ακολουθία $\{P_n:n\in\mathbb{N}\}$διαμερίσεων του $[\alpha,\beta]$ώστε $\lim_{n\to\infty}(U(f,P_n)-L(f,P_n))=0$.

Παραδείγματα:
Θα εξετάσουμε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες.

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,1] \to \mathbb{R}$με $f(x) = x^2$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$παίρνουμε τη διαμέριση του $[0,1]$$P_n = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\}$.
Εφόσον η $f(x) = x^2$είναι αύξουσα μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το άνω και το κάτω άθροισμα τηςfως προς τηνP_n:

$$L(f,P_n) = f(0)\frac{1}{n} + f(\frac{1}{n})\frac{1}{n} + \ldots + f(\frac{n-1}{n})\frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$L(f,P_n) = \frac{1}{n}(0 + \frac{1^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}) \Rightarrow$$

$$L(f,P_n) = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} \Rightarrow$$

$$L(f,P_n) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \Rightarrow$$

$$L(f,P_n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

και

$$U(f,P_n) = f(\frac{1}{n})\frac{1}{n} + f(\frac{2}{n})\frac{1}{n} + \ldots + f(\frac{n}{n})\frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$U(f,P_n) = \frac{1}{n}(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \ldots + \frac{n^2}{n^2}) \Rightarrow$$

$$U(f,P_n) = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3} \Rightarrow$$

$$U(f,P_n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}n^3 \Rightarrow$$

$$U(f,P_n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Συνεπώς $U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{1}{n} \to 0$.
Από κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann ηfείναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Μπορούμε μάλιστα να υπολογίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$έχουμε $L(f,P_n) \leq \underline{\int_0^1} x^2 dx = \int_0^1 \quad x^2 dx = \overline{\int_0^1} x^2 dx \leq U(f,P_n)$.
Αφού $L(f,P_n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3}$και$U(f,P_n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3}$
βρίσκουμε $\int_0^1 \quad x^2 dx = \frac{1}{3}$.

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $u:[0,1] \to \mathbb{R}$με $u(x) = \sqrt{x}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$παίρνουμε τη διαμέριση του $[0,1]$$P_n = \{0 < \frac{1}{n^2} < \frac{2^2}{n^2} < \ldots < \frac{(n-1)^2}{n^2} < \frac{n^2}{n^2} = 1\}$.
Η$u(x) = \sqrt{x}$είναι αύξουσα στο $[0,1]$οπότε
$L(u,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \quad \frac{k}{n}(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2})$και $U(u,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \quad \frac{k+1}{n}(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2})$.
Συνεπώς,

$$U(u,P_n) - L(u,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}) (\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2}) \Rightarrow$$

$$U(u,P_n) - L(u,P_n) = \frac{1}{n} \to 0$$

Άρα η uείναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Παρατηρούμε ότι $\lim_{n\to\infty} L(u,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(u,P_n) = \frac{2}{3}$.
Επομένως,$\int_0^1 \sqrt{x} = \frac{2}{3}$.

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση του Dirichlet$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$με$g(x) = 1 \alpha \nu x \in \mathbb{Q}$και$g(x) = 0 \alpha \nu x \notin \mathbb{Q}$.
Θα δείξουμε ότι η g**δεν** είναι Riemann ολοκληρώσιμη.
Παίρνουμε μία τυχαία διαμέριση $P = \{0 = x_o < x_1 <\ldots< x_n = 1\}$του $[0,1]$και υπολογίζουμε το άνω και το κάτω άθροισμα της gως προς την P.
Για κάθε $k = 0,1,\ldots,n-1$στο διάστημα (x_k, x_{k+1})υπάρχει ρητός q_kκαι άρρητος α_k. Αφού $g(q_k) = 1$, $g(a_k) = 0$και $0 \leq g(x) \leq 1 \forall x \in [x_k, x_{k+1}]$έχουμε$m_k = 0$και$M_k = 0$.
Άρα $L(g,P) = 0$και $U(g,P) = 1$.
Αφού η Pήταν τυχαία διαμέριση του $[0,1]$έχουμε $\underline{\int_0^1} g(x)dx = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} g(x)dx$, άρα η gδεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

4. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$με$h(x) = x \alpha \nu x \in \mathbb{Q}$και$h(x) = 0 \alpha \nu x \notin \mathbb{Q}$**δεν** είναι Riemann ολοκληρώσιμη.
Παίρνουμε μία τυχαία διαμέριση $P = \{0 = x_o < x_1 <\ldots< x_n = 1\}$του $[0,1]$.
Για κάθε $k = 0,1,\ldots,n-1$στο διάστημα (x_k, x_{k+1})υπάρχει άρρητος α_k. Αφού $h(a_k) = 0$και $0 \leq h(x) \leq 1 \forall x \in [x_k, x_{k+1}]$έχουμε$m_k = 0$. Άρα $L(h,P) = 0$.
Θεωρούμε το μέσο του διαστήματος $(x_k, x_{k+1}) y_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$. Είναι προφανές ότι $(y_k, x_{k+1}) \subset (x_k, x_{k+1})$κι ότι στο (y_k, x_{k+1})υπάρχει ρητός q_k.
Άρα στο διάστημα (x_k, x_{k+1})υπάρχει ρητός q_kμε $q_k > \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.
Έπεται ότι $U(h,P) > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k + x_{k+1}}{2} (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}^2 - x_k^2 = \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = \frac{1}{2}$.
Αφού $U(h,P) - L(h,P) > \frac{1}{2}$δεν ικανοποιείται το κριτήριο του Riemann, άρα η hδεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

1.3 Κλάσεις ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε την ολοκληρωσιμότητα δύο κλάσεων συναρτήσεων, των μονότονων και των συνεχών.

Δίνουμε πρώτα τους παρακάτω ορισμούς :

1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$λέμε ότι είναι:

i. **αύξουσα** (αντίστοιχα **γνησίως αύξουσα**) αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ (αντίστοιχα $f(x_1) < f(x_2)$).
ii. **φθίνουσα** (αντίστοιχα **γνησίως φθίνουσα**) αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$(αντίστοιχα $f(x_1) > f(x_2)$).
iii. **μονότονη** (αντίστοιχα **γνησίως μονότονη**) αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα (αντίστοιχα γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα).

2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$λέμε ότι:
i. είναι **συνεχής σε ένα σημείο** $x_0 \in A$αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$για κάθε $x \in A$, με $|x - x_0| < \delta$.
ii. είναι **συνεχής** στο Α αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.
iii. είναι **ομοιόμορφα συνεχής** στο Α αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει$\delta > 0$(που εξαρτάται μόνο από το ε) ώστε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$για όλα τα$x, y \in A$, με $|x - y| < \delta$.
<u>Σημείωση</u>: Αν η$f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$είναι συνεχής συνάρτηση, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.

● 1.3.1 Ολοκληρωσιμότητα μονότονων συναρτήσεων

Πρόταση: Κάθε μονότονη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη:
Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η fείναι αύξουσα.
Έστω $P_n = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$μια διαμέριση του $[\alpha, \beta]$με $t_k = a + k\frac{\beta-\alpha}{n}, k = 1,2,\ldots,n$.
Τότε $U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta-\alpha}{n}(f(t_k) - f(t_{k-1})) = \frac{\beta-\alpha}{n}(f(\beta) - f(\alpha)) \to 0$καθώς $n \to +\infty$.
Άρα η fείναι ολοκληρώσιμη και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_n L(f, P_n) = \lim_n U(f, P_n)$. □

● 1.3.2 Ολοκληρωσιμότητα συνεχών συναρτήσεων

Πρόταση: Κάθε συνεχής συνάρτηση$f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη:
Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η η fείναι συνεχής είναι και ομοιόμορφα συνεχής.
Άρα υπάρχει $\delta > 0$ώστε $\alpha \le x, y \le \beta, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$.
Έστω $P_n = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$μια διαμέριση του $[\alpha, \beta]$με $t_k = a + k\frac{\beta-\alpha}{n}, k = 1,2,\ldots,n$.
Τότε $U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta-\alpha}{n}(M_k - m_k) = \frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) < \frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} = \varepsilon$,
όπου $m_k = inf\{f(x): t_{k-1} \le x \le t_k\}$ και $M_k = sup\{f(x): t_{k-1} \le x \le t_k\}, k = 1,2,\ldots,n$.
Εφόσον το ε είναι τυχόν, από το κριτηριο Riemann η fείναι ολοκληρώσιμη. □

1.4 Ιδιότητες του Ολοκληρώματος Riemann

Στην παράγραφο αυτή αναφέρουμε μερικές από τις πιο βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann, που έπονται άμεσα από τον ορισμό του ως όριο ακολουθίας αθροισμάτων.

1. Αν $f(x) = c$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε $\int_a^b f(x) = c(b-a)$.

2. **i.** Έστω $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

ii. Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε η tf είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $\int_a^b tf(x)dx = t\int_a^b f(x)dx$.

Συνδυάζοντας τα (i) και (ii) παίρνουμε την **γραμμικότητα του ολοκληρώματος**:
Αν $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε η $tf + sg$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και

$$\int_a^b (tf(x) + sg(x))\, dx = t\int_a^b f(x)dx + s\int_a^b g(x)dx.$$

3. Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω $c \in (a,b)$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[\alpha, c]$ και $[c, \beta]$. Τότε ισχύει

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Η παραπάνω ιδιότητα είναι γνωστή ως **προσθετικότητα του ολοκληρώματος**.

4. **Ανισότητες – φράγματα**

i. Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε $\int_a^b f(x) \geq 0$.
ii. Έστω $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε $\int_a^b f(x) \geq \int_a^b g(x)$.
iii. Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$.

5. Έστω $f: [\alpha, \beta] \to [m, M]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\varphi: [m, M] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συνάρτηση. Τότε η $\varphi \circ f: [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

6. Έστω $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε,

i. η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.
ii. η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.
iii. η fg είναι ολοκληρώσιμη.

● 1.4.1 Μέση τιμή του ολοκληρώματος

Αν $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$.

Πράγματι, εφόσον η συνάρτηση $f(x)$είναι συνεχής στο συμπαγές $[\alpha, \beta]$, λαμβάνει ελάχιστη m και μέγιστη τιμή M στο διάστημα αυτό.
Έχουμε $m \leq f(x) \leq M$για κάθε $x \in [a, b]$και άρα $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$.
Ισοδύναμα, $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \leq M$και το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

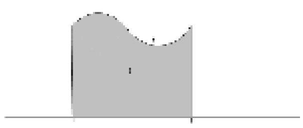
<u>Σημείωση:</u> Ο αριθμός $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)$είναι η **μέση τιμή** της fστο$[\alpha, \beta]$.

1.5 Εμβαδά επίπεδων χωρίων

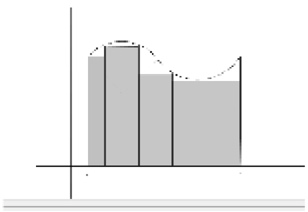
●1.5.1 Υπολογισμός εμβαδού κάτω απο καμπύλη συνάρτησης με μη αρνητικές τιμές.

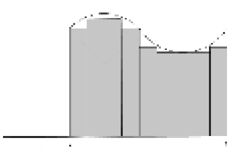
Έστω $y = f(x)$μια φραγμένη συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$τέτοια ώστε $f(x) \geq 0$για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

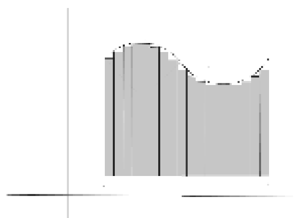
Έχει νόημα να μιλήσουμε για "εμβαδόν" κάτω από το γράφημα της f; Αν ναι, πώς υπολογίζεται αυτό;



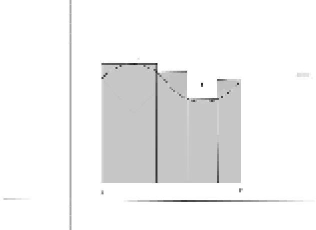
Γενικά, ένα τέτοιο χωρίο δεν μπορεί να διαιρεθεί σε ορθογώνια ή τρίγωνα και άρα δεν μπορούμε να απαντήσουμε άμεσα στα παραπάνω ερωτήματα.
Παρόλα αυτά, αν έχει νόημα να μιλήσουμε για εμβαδόν Ε κάτω από το γράφημα της f, τότε θα πρέπει αυτό να είναι μεγαλύτερο από κάθε εμβαδόν L που είναι άθροισμα των εμβαδων "εγγεγραμένων" ορθογωνίων όπως δείχνουν τα παρακάτω σχήματα.

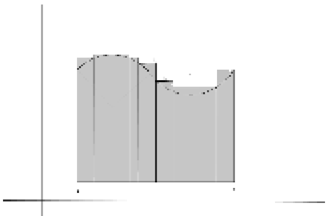


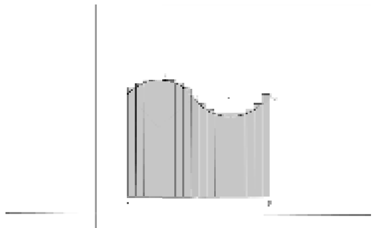




Επίσης,το εμβαδόν Ε θα πρέπει να είναι μικρότερο από κάθε εμβαδόν που είναι άθροισμα "περιγεγραμένων" ορθογωνίων όπως δείχνουν τα παρακάτω σχήματα.







Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν των εγγεγραμένων ορθογωνίων ισούται με το *κάτω άθροισμα* της fως προς την αντίστοιχη διαμέριση P_n, ενώ το εμβαδόν των περιγεγραμένων ορθογωνίων ισούται με το *άνω άθροισμα* της ως προς την αντίστοιχη διαμέριση P_n.

Διαιρώντας το διάστημα $[\alpha,\beta]$συνεχώς σε μικρότερα διαστήματα είναι δυνατόν να παραχθούν ορθογώνια έτσι ώστε για τις αντίστοιχες ακολουθίες $U(f,P_n)$, $L(f,P_n)$των άνω και κάτω αθροισμάτων αντίστοιχα να ισχύει $\lim_{n\to+\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to+\infty} L(f,P_n)$.
Τότε ορίζουμε ως εμβαδόν Ε το $E = \lim_{n\to+\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to+\infty} L(f,P_n)$.

Δηλαδή το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της fσε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τέτοια ώστε $f(x) \geq 0$για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$είναι ίσο με το ορισμένο ολοκλήρωμα της fαπό το α εως το β.

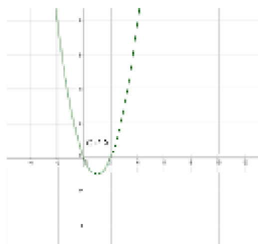
$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

● 1.5.2 Υπολογισμός του εμβαδού όταν η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.

Μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι η fείναι συνεχής και παίρνει μη αρνητικές τιμές στο διάστημα ολοκλήρωσης.
Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου η fορίζεται και είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$με $f(x) \leq 0$για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.
Τότε για να διατηρηθεί η μη αρνητικότητα της μη αρνητικότητας του εμβαδού γεωμετρικού χωρου, ορίζουμε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από το γραφημα της f, τον άξονα xx' και από τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$δίνεται από τον τύπο:

$$E = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

<u>Παράδειγμα:</u>
Το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από το γράφημα της $f(x) = x^2 - 2x$και τον άξονα των xx' είναι $E = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = -[\frac{x^3}{3} - x^2]_0^2 = \frac{4}{3}$, αφού όπως φαίνεται και στο σχήμα η fέχει ρίζες για $x = 0, x = 2$και $f(x) \leq 0$για κάθε $x \in [0,2]$.

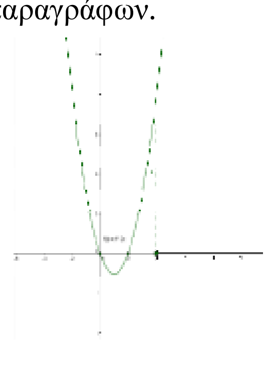


● 1.5.3 Υπολογισμός του εμβαδού όταν η συνάρτηση παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές.

Η μέθοδος προσδιορισμού που φράσσεται από το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης και τον άξονα xx' για $x \in [\alpha,\beta]$όταν παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές είναι η εξής:

1. Βρίσκουμε τις ρίζες της fστο διάστημα $[\alpha,\beta]$.
2. Προσδιορίζουμε το πρόσημο της fγια κάθε υποδιάστημα του $[\alpha,\beta]$που ορίζεται από τις ρίζες της και τα τελικά σημεία α, β και υπολογίζουμε τον εμβαδόν της περιοχής που αντιστοιχεί σε κάθε υποδιάστημα, σύμφωνα με τις σχέσεις των προηγούμενων παραγράφων.
3. Αθροίζουμε τα επιμέρους εμβαδά.

<u>Παράδειγμα</u>



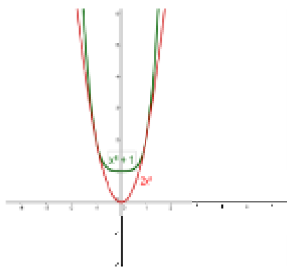
Το εμβαδόν που φράσσεται από το γράφημα της $f(x) = x^2 - 2x$των άξονα xx' και τις ευθείες $x = 0, x = 4$είναι$E = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx + \int_2^4 (x^2 - 2x)\,dx = \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = 8.$

●1.5.4 Υπολογισμός του εμβαδού μεταξύ καμπυλών.

Εμβαδά περιοχών που φράσσονται από ορισμένες καμπύλες, χρησιμοποιούνται συχνά ως μαθηματικά μοντέλα για πολλές κατηγορίες προβλημάτων διάφορων κλάδων.

Έστω ένα χωρίο το οποίο φράσσεται από πάνω από την συνάρτηση fκαι από κάτω από την συνάρτηση gκαι αριστερά, δεξιά από τις ευθείες $x = a, x = \beta.$
Προφανώς το εμβαδόν του χωρίου αυτού μπορεί να υπολογιστεί αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του χωρίου, που φράσσεται από τηνg τον άξονα xx' και τις ευθείες $x = a, x = \beta$, από το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την fτον άξονα xx' και τις ευθείες $x = a, x = \beta.$
Δηλαδή ,$E = \int_a^\beta \quad f(x)dx - \int_a^\beta \quad g(x)dx.$

<u>Παράδειγμα</u>
Το εμβαδόν της περιοχής που φράσσεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x) = x^4 + 1$και $g(x) = 2x^2$είναι:
$E = \int_{-1}^1 \quad f(x)dx - \int_{-1}^1 \quad g(x)dx$αφού $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 + 1 = 2x^2 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ή$x = 1$
Άρα
$E = \int_{-1}^1 (x^4 + 1)\,dx - \int_{-1}^1 (2x^2)\,dx \Rightarrow E = [\frac{x^5}{5} + x - \frac{2}{3}x^3]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}.$



<u>Κεφάλαιο 2ο</u>

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

2.1 Το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Θεώρημα:
Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$συνεχής συνάρτηση και έστω$g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ώστε $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_\alpha^\beta g(x)dx$.
Απόδειξη:
Οι fκαι gείναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$, άρα η $f \cdot g$είναι ολοκληρώσιμη στο$[\alpha, \beta]$.
Η fείναι συνεχής στο συμπαγές$[\alpha, \beta]$, άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.
Έστω $m = min\{f(x): \alpha \leq x \leq \beta\}$και $M = max\{f(x): \alpha \leq x \leq \beta\}$.
Αφού η gπαίρνει μη αρνητικές τιμές έχουμε $m \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq M \cdot g(x)$για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
Συνεπώς $m\int_\alpha^\beta g(x)dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx \leq M\int_\alpha^\beta g(x)dx$.
Αφού$g \geq 0$στο$[\alpha, \beta]$έχουμε $\int_\alpha^\beta g(x)dx \geq 0$.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\int_\alpha^\beta g(x)dx = 0$τότε$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = 0$, άρα η ζητούμενη σχέση ισχύει για κάθε $\xi \in [\alpha, \beta]$.
2. Αν$\int_\alpha^\beta g(x)dx > 0$τότε έχουμε $m \leq \frac{\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx}{\int_\alpha^\beta g(x)dx} \leq M$.

Αφού ηfείναι συνεχής από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ώστε $f(\xi) = \frac{\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx}{\int_\alpha^\beta g(x)dx}$, οπότε έπεται το ζητούμενο. □

<u>*Μια χρήσιμη **συνέπεια** του θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού είναι η παρακάτω πρόταση:*</u>

Αν $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$με την ιδιότητα $f(\xi) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$, όπου ως $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$έχουμε ορίσει την μέση τιμή της f.

2.2 Αόριστο ολοκλήρωμα

Ορισμοί:

1. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,x]$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Το **αόριστο ολοκλήρωμα** της f είναι η συνάρτηση $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt.$$

2. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ λέγεται **παράγουσα** ή **αντιπαράγωγος** της f αν $G'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

1. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι συνεχής συνάρτηση.

2. i. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του $[\alpha,\beta]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη και $F'(x_0)=f(x_0)$.

ii. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα F είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. **(1ο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)**

3. Αν F και G παράγουσες της ίδιας συνάρτησης τότε υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ ώστε $F=G+c$.

4. Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι παράγουσα της f.

5. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Αν G μια παράγουσα της f, τότε $G(x)=F(x)+c=\int_\alpha^x f(t)dt+G(\alpha)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Ειδικότερα, $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

6. Έστω $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta G'(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$ **(2ο θεμελιώδες θεώρημα απειροστικού λογισμού)**

2.3 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε δύο χρήσιμες μεθόδους ολοκλήρωσης: την ολοκλήρωση κατά παράγοντες και την ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

- **2.3.1 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες**

Θεώρημα (ολοκλήρωση κατά παράγοντες):

Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν οι f' και g' είναι ολοκληρώσιμες, τότε

$\int_a^x fg'=(fg)(x)-(fg)(a)-\int_a^x f'g.$

Ειδικότερα, $\int_a^\beta fg'=(fg)(\beta)-(fg)(a)-\int_a^\beta f'g.$

Απόδειξη:

Η $f \cdot g$είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$και $(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.
Από την υπόθεση οι $f'g, fg'$είναι ολοκληρώσιμες, άρα και η $(f \cdot g)'$είναι ολοκληρώσιμη.
Από το 2ο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$έχουμε $\int_a^x f'g + \int_a^x fg' = \int_a^x (f \cdot g)' = (fg)(x) - (fg)(a)$, οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει αν θέσουμε $x = b$. □

Μια εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος είναι το εξής θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού:

Πόρισμα:
Έστω $f, g: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η fείναι συνεχής στο$[\alpha,\beta]$και η gείναι μονότονη και συνεχώς παραγωγίσιμη στο$[\alpha,\beta]$. Τότε υπάρχει$\xi \in [\alpha,\beta]$ώστε $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(\beta)\int_\xi^\beta f(x)dx$.

Απόδειξη:
Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)dt$της fστο$[\alpha,\beta]$.
Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο είναι ισοδύναμο με το εξής:
υπάρχει$\xi \in [\alpha,\beta]$ώστε $\int_\alpha^\beta F'(x)g(x)dx = g(a)F(\xi) + g(\beta)[F(\beta) - F(\xi)]$.
Με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε
$\int_\alpha^\beta F'(x)g(x)dx = F(\beta)g(\beta) - F(\alpha)g(\alpha) - \int_\alpha^\beta F(x)g'(x)dx =$
$F(\beta)g(\beta) - \int_\alpha^\beta F(x)g'(x)dx$
αφού $F(a) = 0$.
Η gείναι μονότονη, άρα η g'διατηρεί πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$.
Η Fείναι συνεχής και η g'ολοκληρώσιμη, άρα από το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ώστε $\int_a^\beta F(x)g'(x)dx = F(\xi)\int_a^\beta g'(x)dx = F(\xi)(g(\beta) - g(\alpha))$.
Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε το ζητούμενο. □

● 2.3.2 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Θεώρημα (πρώτο θεώρημα αντικατάστασης):
Έστω $\varphi: [a,\beta] \to \mathbb{R}$παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η φ'είναι ολοκληρώσιμη. Αν $I = \varphi([a,\beta])$και $f: I \to \mathbb{R}$είναι μία συνεχής συνάρτηση, τότε $\int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(\beta)} f(s)ds$.

Απόδειξη:
Η fείναι συνεχής στο I, άρα ολοκληρώσιμη . Ορίζουμε $F: I \to \mathbb{R}$με . $F(x) = \int_{\varphi(a)}^x f(s)ds$
Η fείναι συνεχής στο I, οπότε από το 1ο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε ότι η Fείναι παραγωγίσιμη στο Iκαι $F' = f$.
Έπεται ότι $\int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.
Παρατηρούμε ότι $(F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (F \circ \varphi)'$.
Η $(F' \circ \varphi) \cdot \varphi'$είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,\beta]$, άρα και η $(F \circ \varphi)'$είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,\beta]$.

Από το 2ο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού παίρνουμε
$\int_{a}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{a}^{\beta} F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{a}^{\beta}(F\circ\varphi)'(t)dt = (F\circ\varphi)(\beta) - (F\circ\varphi)(\alpha)$.
Αφού $F(\varphi(\beta)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)ds$και $F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha)} f(s)ds = 0$έπεται το ζητούμενο.
□

Θεώρημα(δεύτερο θεώρημα αντικατάστασης): Έστω $\psi\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $\psi'(x)\neq 0$για κάθε $x\in[a,b]$. Αν $I = \psi([\alpha,\beta])$και είναι μία συνεχής συνάρτηση, τότε $\int_{a}^{\beta} f(\psi(t))dt = \int_{\psi(a)}^{\psi(\beta)} f(s)(\psi^{-1})'(s)ds$.

Απόδειξη:
Η ψ'είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $[\alpha,\beta]$, άρα είναι παντού θετική ή παντού αρνητική στο $[\alpha,\beta]$.
Συνεπώς η ψείναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ψείναι γνησίως αύξουσα.
Τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $\psi^{-1}\colon I\to\mathbb{R}$της ψστο $I = \psi([\alpha,\beta]) = [\psi(\alpha),\psi(\beta)]$.
Αν εφαρμόσουμε το πρώτο θεώρημα αντικατάστασης για την $f\cdot(\psi^{-1})'$, έχουμε

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(\beta)} f(s)(\psi^{-1})'(s)ds = \int_{a}^{\beta}[((f\cdot(\psi^{-1})')\circ\psi)(s)]\,\psi'(s)ds \Rightarrow$$
$$\int_{\psi(a)}^{\psi(\beta)} f(s)(\psi^{-1})'(s)ds = \int_{a}^{\beta}[(f\circ\psi)\cdot((\psi^{-1})'\circ\psi)(s)]\,\psi'(s)ds \Rightarrow$$
$$\int_{\psi(a)}^{\psi(\beta)} f(s)(\psi^{-1})'(s)ds = \int_{a}^{\beta}[(f\circ\psi)\cdot(\psi^{-1}\circ\psi)']\,(s)ds \Rightarrow$$
$$\int_{\psi(a)}^{\psi(\beta)} f(s)(\psi^{-1})'(s)ds = \int_{a}^{\beta} f\circ\psi(s)ds$$

□

2.4 Τεχνικές ολοκλήρωσεις

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύουμε χωρίς ιδιαίτερη αυστηρότητα τις βασικότερες μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων.

• 2.4.1 Πίνακας στοιχειωδών ολοκληρωμάτων

Κάθε τύπος παραγώγισης δίνει έναν τύπο ολοκλήρωσης. Παρακάτω αντιστρέφουμε τους τύπους παραγώγισης των πιο βασικών συναρτήσεων.

1. $\int h dx = hx + c$
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$
4. $\int e^x dx = e^x + c$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
6. $\int \cos x dx = sinx + c$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
8. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

• 2.4.2 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με αντικατάσταση

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$.

Η αντικατάσταση $u = \varphi(x), du = \varphi'(x)dx$δίνει $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du$.
Αν το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος υπολογίζεται ευκολότερα, τότε αντικαθιστούμε το φ(x) με u και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αριστερα.

<u>Παραδείγματα</u>

1. Έχουμε το ολοκλήρωμα $\int 8(x^2 + 5x + 4)^7(2x + 5)dx$.

Θέτουμε $u = x^2 + 5x + 4$, άρα $du = 2x + 5$. Οπότε $\int 8(x^2 + 5x + 4)^7(2x + 5)dx = \int 8u^7 du = u^8 + c \Rightarrow \int 8(x^2 + 5x + 4)^7(2x + 5)dx = (x^2 + 5x + 4)^8 + c$

2. Έχουμε το ολοκλήρωμα $\int x^4 e^{x^5+2} dx$.

Θέτουμε $u = x^5 + 2$, άρα $du = 5x^4 dx$. Οπότε $\int x^4 e^{x^5+2} dx = \int e^u \frac{du}{5} = \frac{1}{5} e^u + c \Rightarrow \int x^4 e^{x^5+2} dx = \frac{1}{5} e^{x^5+2} + c$

3. Έχουμε το ολοκλήρωμα $\int (4x^2 + 5)^{1/2} x dx$.

Θέτουμε $u = 4x^2 + 5$, άρα $du = 8x$. Οπότε $\int (4x^2 + 5)^{1/2} x dx = u^{1/2} \frac{du}{8} = \frac{1}{8}\frac{2}{3} u^{3/2} + c \Rightarrow$
$\int (4x^2 + 5)^{1/2} x dx = \frac{1}{12}(4x^2 + 5)^{3/2} + c$.

4. Έχουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)} dx$.

Θέτουμε $u = \arctan x$, άρα $du = \frac{1}{(1+x^2)}dx$και συνεπώς $\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)}dx = \int udu = u^2 + c \Rightarrow$
$\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)}dx = (\arctan x)^2 + c.$

5. Έχουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx.$

Θέτουμε $u = \sqrt{x}$, οπότε $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Άρα
$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = \int \cos u 2 \cdot du = 2sinu + c \Rightarrow \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2\sin(\sqrt{x}) + c.$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int f(x)dx$με την αντικατάσταση $x = \varphi(t)$.

Η αντικατάσταση $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$, όπου φ αντιστρέψιμη, μας δίνει
$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$
Αν το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος υπολογίζεται ευκολότερα, τότε αντικαθιστούμε το x με φ(t) και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αριστερα.

Παραδείγματα

1. Για τον υπολογισμό του $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$θέτουμε $x = 3\sin t$.

Συνεπώς $dx = 3\cos t$και $\sqrt{9-x^2} = 3cost$.
Έτσι, $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\sin^2 t}dt = -\frac{1}{9}\cot t + c.$
Αφού $\cot t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} \Rightarrow \cot t = \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}{\frac{x}{3}} \Rightarrow \cot t = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$παίρνουμε $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + c.$

2. Για τον υπολογισμό του $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$, αν θέσουμε $x = \frac{2}{\cos t}$τότε $dx = \frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt = \frac{2\tan t}{\cos t}dt$και $\sqrt{x^2-4} = 2\tan t$.

Συνεπώς, $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx = 2\int \tan^2 t dt = 2\tan t - 2t + c.$
Εφόσον $t = \arctan\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$παίρνουμε $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx = \sqrt{x^2-4} - 2\arctan\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + c.$

• 2.4.3 Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

Ολοκληρώματα που περιέχουν δυνάμεις ή γινόμενα τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορούν να αναχθούν σε απλούστερα αν χρησιμοποιήσουμε τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Παραδείγματα

1. Για τον υπολογισμό του $\int \cos^2 x dx$, χρησιμοποιούμε την $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Έχουμε λοιπόν $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + c.$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα ολοκληρώματα της μορφής $\int \cos^{2n}x dx$.
π.χ. $\cos^4 x = (\frac{1+\cos 2x}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\frac{1+\cos 4x}{2}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{8}$

2. Για τον υπολογισμό του $\int \sin^5 x dx$, παρατηρούμε ότι $\sin^5 x = (1-\cos^2 x)^2 \sin x$και θέτουμε $u = \cos x, du = -\sin x dx$.

Συνεπώς, $\int \sin^5 x dx = -\int (1-u^2)^2 du = -u + \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c.$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα ολοκληρώματα της μορφής $\int \cos^n x \cdot \sin^m x dx$, όπου n,m φυσικοί αριθμοί ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός.

3. Για τον υπολογισμό του $\int \tan^2 x dx$, θα χρησιμοποιήσουμε ότι $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

$\int \tan^2 x dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1) dx = \int ((\tan x)' - 1) dx = \tan x - x + c.$

Ομοίως μπορούμε να υπολογίσουμε το$\int \cot^2 x dx$, όπου $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$.

●2.4.4 Ολοκλήρωση κατά μέρη

Σε προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη είναι $\int fg' = fg - \int f'g$. Συχνά είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το δεξί μέλος.

Παραδείγματα

1. $\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = x \cdot e^x - \int (x)' e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c$

2. $\int x \cdot \ln x dx = \int (\frac{x^2}{2})' \cdot \ln x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + c$

3. $\int x \cdot \cos x dx = \int x \cdot (\sin x)' dx = x \cdot \sin x - \int (x)' \sin x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot sinx + \cos x + c$

4.

$$\int e^x sinxdx = \int (e^x)' sinxdx = e^x sinx - \int e^x cosxdx = e^x sinx - \int (e^x)' cosxdx \Rightarrow$$
$$\int e^x sinxdx = e^x sinx - e^x cosx + \int e^x(-sinx)dx \Rightarrow$$
$$2 \cdot \int e^x sinxdx = e^x sinx - e^x cosx \Rightarrow$$
$$\int e^x sinxdx = \frac{e^x}{2}(sinx - cosx) + c$$

● 2.4.5 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Ο μετασχηματισμός των ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων σε κάποια από τις γνωστές μορφές ολοκληρωμάτων κάθε άλλο παρά εύκολη υπόθεση είναι.
Για αυτό τον λόγο, *όταν ο βαθμός του παρανομαστή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του αριθμητή* επιλέγουμε την μέθοδο της ανάλυσης σε “απλά κλάσματα”.

Θα μελετήσουμε την μέθοδο αυτή μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1

Έστω το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+5}{x^2-1} dx$.
Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής έχει ρίζες $+1, -1$,άρα $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.
Επομένως το $\frac{x+5}{x^2-1}$μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα απλών κλασμάτων:
$\frac{x+5}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$, όπου $A, B \in \mathbb{R}$.
Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω σχεση με $(x-1)(x+1)$, οπότε $x+5 = (x+1)A + (x-1)B$.
Θέτοντας $x = +1, x = -1$βρίσκουμε $A = 3, B = -2$αντίστοιχα.
Συνεπώς $\int \frac{x+5}{x^2-1} dx = \int \frac{3}{x-1} dx - \int \frac{2}{x+1} dx = 3\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + c$.

Παράδειγμα 2

Έστω το ολοκλήρωμα $\int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4} dx$.
Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής έχει απλή ρίζα το 1 και διπλή ρίζα το -2 , δηλ. $x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2$.
Σε αυτή την περίπτωση η ανάλυση σε απλά κλάσματα θα γίνει ως εξής:
$\frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{\Gamma}{(x+2)^2}$όπου $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$
Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με$(x-1)(x+2)^2$, οπότε $5x^2 + 12x + 1 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + \Gamma(x-1)$.
Θέτοντας $x = 1, x = -2$βρίσκουμε $A = 2, \Gamma = 1$αντίστοιχα και συνεχίζοντας με πράξεις $B = 3$.
Συνεπώς, $\int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4} dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{x+2} dx + \int \frac{1}{(x+2)^2} dx = 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + c$.

Παράδειγμα 3

Έστω το ολοκλήρωμα $\int \frac{-2x-4}{x^3+x^2+x} dx$.
Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή και παίρνουμε $2x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$.
Παρατηρούμε ότι ο όρος $2x^2 + x + 1$δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί περαιτέρω καθώς δεν έχει πραγματικές ρίζες.
Στην περίπτωση αυτή η ανάλυση θα γίνει ως εξής$\frac{-2x-4}{x^3+x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1}$.
Πολλαπλασιάζουμε με $x(x^2 + x + 1)$και βρίσκουμε $A = -4, B = 4, \Gamma = 2$.
Επομένως, $\int \frac{-2x-4}{x^3+x^2+x} dx = \int \frac{-4}{x} dx + \int \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx = -4\ln|x| + 2\ln|x^2 + x + 1| + c$.

<u>Κεφάλαιο 3ο</u>

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΚΑΙ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

3.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Στην παράγραφο αυτή επεκτείνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος για συναρτήσεις που δεν είναι φραγμένες ή είναι ορισμένες σε διαστήματα που δεν είναι κλειστά και φραγμένα .

Τα ολοκληρώματα αυτού του είδους καλούνται **μη γνήσια** ή **καταχρηστικά** ή ακόμη και **γενικευμένα**.

● 3.1.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα μη φραγμένων συναρτήσεων.

Έστω το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, όπου η fείναι:

I. συνεχής στο (α,β] και απειρίζεται για $x \to a^{+}$.
II. συνεχής στο [α,β) και απειρίζεται για $x \to \beta^{-}$.
III. συνεχής στο [α,β] και απειρίζεται για $x \to c$όπου $\alpha < c < \beta$

<u>Περίπτωση I</u>
Στην περίπτωση αυτή ισχύει $\int_{a}^{\beta} f(x)dx = \lim\limits_{y\to a^{+}} \int_{y}^{\beta} f(x)dx$και
λέμε ότι το ολοκλήρωμα *συγκλίνει* αν $\lim\limits_{y\to a^{+}} \int_{y}^{\beta} f(x)dx \in \mathbb{R}$και διαφορετικά λέμε ότι *αποκλίνει*.

<u>Περίπτωση II</u>
Στην περίπτωση αυτή ισχύει $\int_{a}^{\beta} f(x)dx = \lim\limits_{y\to \beta^{-}} \int_{\beta}^{y} f(x)dx$και
λέμε ότι το ολοκλήρωμα *συγκλίνει* αν $\lim\limits_{y\to \beta^{-}} \int_{\beta}^{y} f(x)dx \in \mathbb{R}$και διαφορετικά λέμε ότι *αποκλίνει*.

<u>Περίπτωση III</u>
Στην περίπτωση αυτή ισχύει $\int_{a}^{\beta} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\beta} f(x)dx = \lim\limits_{y\to c^{-}} \int_{a}^{y} f(x)dx + \lim\limits_{y\to c^{+}} \int_{y}^{\beta} f(x)dx$.
Λέμε ότι το ολοκλήρωμα *συγκλίνει* αν $\lim\limits_{y\to c^{-}} \int_{a}^{y} f(x)dx \in \mathbb{R}$και $\lim\limits_{y\to c^{+}} \int_{y}^{\beta} f(x)dx \in \mathbb{R}$.
Αν έστω ένα από τα παραπάνω όρια δεν είναι πραγματικός τότε λέμε ότι *δεν ορίζεται*.

Παραδείγματα γενικευμένων ολοκληρωμάτων με μη φραγμένες συναρτήσεις.

<u>Παράδειγμα 1</u>
Να μελετηθεί το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{1} \frac{1}{x}dx$.
Λύση:
Παρατηρούμε ότι η υπο ολοκλήρωση συνάρτηση απειριζεται για $x \to 0^{+}$.

Οπότε το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο και έχουμε $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{x}dx = \lim_{y\to 0^+}[\ln x]_y^1 = -\infty$.
Επομένως το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$αποκλίνει.

Παράδειγμα 2

Να μελετηθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{1-x}}dx$.

Λύση:

Η υπο ολοκλήρωση συνάρτηση απειρίζεται για $x \to 1^-$,

συνεπώς $\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{y\to 1^-}\int_0^1 -3(1-x)^{-1/2}\,dx = \lim_{y\to 1^-}[6(1-x)^{1/2}]_0^y = \lim_{y\to 1^-}[6(1-y)^{1/2} - 6(1-0)^{1/2}] = -6$.

Άρα το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{1-x}}dx$συγκλίνει στο -6.

Παράδειγμα 3

Να μελετηθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

Λύση:

Όπως στα προηγούμενα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{y\to 0^+}[2\sqrt{x}]_y^1 = \lim_{y\to 0^+}(2-2\sqrt{y}) = 2$.

Άρα το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$συγκλίνει στο 2.

Παράδειγμα 4

Να μελετηθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^5 -\frac{3}{(x-4)^2}dx$.

Λύση:

Η υπό ολοκλήρωση ποσότητα απειρίζεται για $x = 4$, επομένως το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο.

Άρα έχουμε $\int_1^5 -\frac{3}{(x-4)^2}dx = \int_1^4 -\frac{3}{(x-4)^2}dx + \int_4^5 -\frac{3}{(x-4)^2}dx$,

όπου $\int_1^4 -\frac{3}{(x-4)^2}dx = \lim_{y\to 4^-}\int_1^y -\frac{3}{(x-4)^2}dx = \lim_{y\to 4^-}[\frac{3}{x-4}]_1^y = +\infty$

και $\int_4^5 -\frac{3}{(x-4)^2}dx = \lim_{y\to 4^+}\int_y^5 -\frac{3}{(x-4)^2}dx = \lim_{y\to 4^+}[\frac{3}{x-4}]_y^5 = -\infty$.

Επομένως το $\int_1^5 -\frac{3}{(x-4)^2}dx$δεν ορίζεται.

Σημείωση: Είναι αρκετό να δούμε ότι το ένα από τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα αποκλίνει για να πούμε ότι το αρχικό ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Παράδειγμα 5
Να μελετηθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$.

Λύση:
Η υπο ολοκλήρωση ποσότητα απειρίζεται για $x = 1$, επομένως το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο.
Άρα έχουμε $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$,
όπου $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = \lim_{y\to 1^-} \int_0^y \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = \lim_{y\to 1^-} [3(x-1)^{1/3}]_0^y = 3$
και $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = \lim_{y\to 1^+} \int_y^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = \lim_{y\to 1^-} [3(x-1)^{1/3}]_y^2 = 3$
Συνεπώς το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$συγκλίνει στο 6.

● 3.1.2 Γενικευμένα ολοκληρώματα σε μη φραγμένα διαστήματα.

Μια άλλη συνηθισμένη κατηγορία γενικευμένων ολοκληρωμάτων αναφέρεται στις ακόλουθες μορφές:

I. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$
II. $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx$
III. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Περίπτωση I
Στην περίπτωση αυτή ισχύει $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(x)dx$και
λέμε ότι το ολοκλήρωμα *συγκλίνει* αν $\int_a^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$και διαφορετικά λέμε ότι *αποκλίνει*.
Περίπτωση II
Στην περίπτωση αυτή ισχύει $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx = \lim_{y\to-\infty} \int_y^{\beta} f(x)dx$και
λέμε ότι το ολοκλήρωμα *συγκλίνει* αν $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx \in \mathbb{R}$και διαφορετικά λέμε ότι *αποκλίνει*.

Περίπτωση III
Στην περίπτωση αυτή ισχύει
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{y\to-\infty} \int_y^c f(x)dx + \lim_{y\to+\infty} \int_c^y f(x)dx$, όπου $c \in \mathbb{R}$.
Λέμε ότι το ολοκλήρωμα *συγκλίνει* αν $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \in \mathbb{R}$και$\int_c^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$.
Αν έστω ένα από τα παραπάνω δεν είναι πραγματικός τότε λέμε ότι *δεν ορίζεται*.

Παραδείγματα γενικευμένων ολοκληρωμάτων με μη φραγμένα διαστήματα.

Παράδειγμα 1
Να μελετηθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} x^{-2} dx$.

Λύση:
Έχουμε $\int_1^{+\infty} x^{-2}dx = \lim_{y\to+\infty}\int_1^{y} x^{-2}dx = \lim_{y\to+\infty}[-\frac{1}{x}]_1^{y} = 1$
Άρα το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} x^{-2}dx$ συγκλίνει στο 1.

Παράδειγμα 2
Να μελετηθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} x^{-1}dx$.

Λύση:
Έχουμε $\int_1^{+\infty} x^{-1}dx = \lim_{y\to+\infty}\int_1^{y} x^{-1}dx = \lim_{y\to+\infty}[lnx]_1^{y} = +\infty$.
Συνεπώς το ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Παράδειγμα 3
Να μελετηθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx$.

Λύση:
$\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx = \lim_{y\to-\infty}\int_{y}^{0} e^{x}dx = \lim_{y\to-\infty}[e^{x}]_{y}^{0} = 1 - \lim_{y\to-\infty}e^{y} = 1.$

Παράδειγμα 4
Να μελετηθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$.

Λύση:
Έχουμε $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = \int_{-\infty}^{0} xdx + \int_{0}^{+\infty} xdx,$
όπου $\int_{-\infty}^{0} xdx = \lim_{y\to-\infty}\int_{y}^{0} xdx = \lim_{y\to-\infty}[x^2]_{y}^{0} = -\infty$.
Οπότε το $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$ δεν ορίζεται.

● 3.1.3 Ειδικές συναρτήσεις

Η συνάρτηση Γάμμα

Η συνάρτηση Γάμμα ορίζεται από τη σχέση $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, x > 0$.
Μπορεί να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $x > 0$, αν και δεν μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας τις γνωστές στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Παρακάτω δίνονται οι σημαντικότερες ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα:
1. $\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$
2. $\Gamma(n + 1) = n!\, για\, n \in \mathbb{N}$
3. $\Gamma(1) = 1$
4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

5. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}, 0 < x < 1$
6. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n}$

όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$και $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)$.

Η συνάρτηση Γάμμα είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τον υπολογισμό γενικευμένων ολοκληρωμάτων όπως θα δούμε στα παρακάτω παραδείγματα.

Παραδείγματα

1. $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^3dt = \Gamma(3+1) = 3! = 6$

2. $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t^7}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{7/2}dt = \Gamma(\frac{7}{2}+1) = \Gamma(4+\frac{1}{2}) = \frac{7!!\sqrt{\pi}}{2^4} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\sqrt{\pi}}{16} = \frac{105}{16}\sqrt{\pi}$

3.
$$\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{t^3}dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t}t^{3/2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-u}(\frac{u}{2})^{3/2}\frac{du}{2} = 2^{-5/2}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{3/2}du = \frac{1}{\sqrt{32}}\Gamma(\frac{3}{2}+1) \Rightarrow$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{t^3}dt = \frac{1}{\sqrt{32}}\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{32}}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{16\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$$

Η συνάρτηση Βήτα

Η συνάρτηση Βήτα ορίζεται από τη σχέση $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, x > 0, y > 0$.
Στην πραγματικότητα είναι ένας διπαραμετρικός συνδυασμός συναρτήσεων Γάμμα. Δηλαδή ένας συνδυασμός που περιλαμβάνει την $\Gamma(x)$και την$\Gamma(y)$.
Η σχέση που τις συνδέει είναι $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Παραδείγματα

1. $\int_0^1 t^5(1-t)^7dt = B(6,8) = \frac{\Gamma(6)\Gamma(8)}{\Gamma(6+8)} = \frac{5!7!}{13!} = \frac{1}{13728}$
2. $\int_0^1 \sqrt{t}(1-t)^3dt = \int_0^1 t^{1/2}(1-t)^3dt = B(\frac{3}{2},4) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{3}{2}+4)} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{11}{2})} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot3!}{\frac{9!!\sqrt{\pi}}{2^9}} = \frac{512}{315}$

Η συνάρτηση Βήτα χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων
$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \frac{1}{2}B(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}), m,n > 0$.

Παράδειγμα
$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cdot \cos^3 x dx = \frac{1}{2}B(\frac{5+1}{2},\frac{3+1}{2}) = \frac{1}{2}B(3,2) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(3+2)} = \frac{1}{2}\frac{2!\cdot1!}{4!} = \frac{1}{24}$$

● 3.1.4 Μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός: Εάν $f(t)$είναι μία συνάρτηση, ορισμένη και ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[0, t]$, όπου $t > 0$, τότε **ο μετασχηματισμός Laplace** συμβολίζεται με $L\{f(t)\}$ή$F(s)$και ορίζεται ως$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt, s \in \mathbb{R}$.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται ο μετασχηματισμός Laplace των βασικότερων συναρτήσεων.

	$L\{f(t)\} = F(s)$	$L\{f(t)\} = F(s)$		$L\{f(t)\} = F(s)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}, s > 0$	**7**	$e^{at}\sin(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2 + k^2}$
2	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$	**8**	$e^{at}\cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}$
3	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$	**9**	$\sinh(kt)$	$\frac{k}{s^2 - k^2}, s > \lvert k \rvert$
4	$t^n e^{at}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$	**10**	$\cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2 - k^2}, s > \lvert k \rvert$
5	$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$	**11**	$t^x, x \in \mathbb{R}$	$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}, x + 1 > 0$
6	$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$			

<u>Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace</u>

1. *(γραμμικότητα)*

Εάν $L\{f_1(t)\} = F_1(s)$και $L\{f_2(t)\} = F_2(s)$, τότε για οποιεσδήποτε σταθερές c_1και c_2ισχύει $L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$.

2. *(μετατόπιση ως προς s)*

Εάν $L\{f(t)\} = F(s)$, τότε για κάθε σταθεράaείναι $L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a), s > a$.

3. *(αλλαγή κλίμακας)*

Εάν $L\{f(t)\} = F(s)$, τότε για σταθερά$a \neq 0$έχουμε $L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$.

4. *(μετασχηματισμός Laplace των παραγώγων)*

Εάν $L\{f(t)\} = F(s)$, τότε $L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$,$L\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$ και γενικά $L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$.

5. *(μετασχηματισμός Laplace των παραστάσεων $t^n f(t)$)*

Εάν $L\{f(t)\} = F(s)$, τότε $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^n(s)$.

6. *(μετασχηματισμός Laplace των ολοκληρωμάτων)*

Εάν $L\{f(t)\} = F(s)$, τότε $L\{\int_0^t f(x)dx\} = \frac{F(s)}{s}$.

7. *(μετασχηματισμός Laplace των παραστάσεων $\frac{f(t)}{t}$)*

Εάν $L\{f(t)\} = F(s)$, τότε $L\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_0^{+\infty} F(s)ds$.

8. *(μετασχηματισμός Laplace των περιοδικών συναρτήσεων)*
Έστω ότι η $f(t)$είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο T, δηλαδή $f(t + T) = f(t)$.
Τότε, $L\{f(t)\} = \frac{\int_0^T f(t)dt}{1-e^{-sT}}$.

9. *(μετασχηματισμός Laplace συνέλιξης)*
Αν οι συναρτήσεις $f(t)$,$g(t)$συνεχείς ή κατά τμήματα συνεχής για $t \geq 0$και αν $L\{f(t)\} = F(s)$,$L\{g(t)\} = G(s)$τότε $L\{f(t) * g(t)\} = L\{f(t)\} \cdot L\{g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$, όπου $f(t) * g(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx = \int_0^t g(x)f(t-x)dx$.

3.2 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

Μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει ολοκληρώματα μίας μόνο μεταβλητής. Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε ολοκληρώματα πραγματικών και διανυσματικών συναρτήσεων συναρτήσεων τριών μεταβλητών κατά μήκος καμπυλών του $\mathbb{R}^3$.

- **3.2.1 Αριθμητικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.**

Οι παραμετρικές καμπύλες του $\mathbb{R}^3$που χρησιμοποιούνται για τον ορισμό και την μελέτη των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων αντιστοιχούν σε κλειστά διαστήματα $I = [\alpha, \beta]$. Έτσι, σε όλα τα επόμενα θεωρούνται παραμετρικές καμπύλες $\Gamma = \Gamma(r)$του $\mathbb{R}^3$, οι οποίες ορίζονται από **παραμετρήσεις** της μορφής $r = r(t): [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$με $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Ορισμός: Έστω $\Gamma = \Gamma(r)$ μία C^1 παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$, η οποία ορίζεται από την C^1 παραμέτρηση $r: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ και $f: \Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μια συνεχής πραγματική συνάρτηση, η οποία ορίζεται στην καμπύλη Γ. Τότε, ως **αριθμητικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** της πραγματικής συνάρτησης κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης $\Gamma = \Gamma(r)$, ορίζεται το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{\Gamma} f ds \equiv \int_{\Gamma(r)} f ds = \int_{a}^{\beta} (f \circ r)(t) \cdot \|r'(t)\| dt$$

όπου $\|r'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma (xy + z^2)\, ds$, όπου Γείναι η παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$, η οποία ορίζεται από την παραμέτρηση $r(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in [0,2\pi]$.

Λύση:

Υπολογίζουμε το $\|r'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}$και παίρνουμε

$$\int_{\Gamma} (xy + z^2)\, ds = \int_{0}^{2\pi} (\cos t \cdot \sin t + t^2)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}[\frac{\sin^2 t}{2} + \frac{t^3}{3}]_0^{2\pi} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi^3$$

- **3.2.1 Διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.**

Ορισμός: Έστω $\Gamma = \Gamma(r)$ μία C^1 παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$, η οποία ορίζεται από την C^1παραμέτρηση $r: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$και $F = (P, Q, R): \Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$μια διανυσματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού την καμπύλη Γ. Τότε ως διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης Fκατά μήκος της καμπύλης Γορίζεται το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr \equiv \int_{\Gamma(r)} F \cdot dr = \int_{a}^{\beta} ((F \circ r) \cdot r')(t) dt$$

Σημείωση:

Όταν έχουμε δύο διανύσματα x, yτότε ο συμβολισμός $x \cdot y$αναφέρεται στο εσωτερικό τους γινόμενο. Δηλαδή, αν $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_{2,} y_3)$τότε $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

Παράδειγμα

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα$\int_{\Gamma} \quad xydx + (x + y)dy + \cos zdz$, όπου$\Gamma$είναι η παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$, η οποία ορίζεται από την παραμέτρηση $r(t) = (e^t, \sin t, t^3), t \in [0, \pi]$.

Λύση:

$$\int_{\Gamma} \quad xydx + (x + y)dy + coszdz = \int_{0}^{\pi} (e^t \cos t, e^t + \sin t, \cos^3 t) \cdot (e^t, cost, 3t^2) dt \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma} \quad xydx + (x + y)dy + coszdz = \int_{0}^{\pi} (e^{2t} \sin t + e^t \cos t + \cos t \sin t + 3t^2 \cos t^3) \, dt \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma} \quad xydx + (x + y)dy + coszdz = \frac{1}{5}(e^{2\pi} + 1) - \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1) + sin\pi^3$$

Παρατήρηση

Τα παραπάνω μπορούν να επεκταθούν και σε περισσότερες διαστάσεις.

<u>Κεφάλαιο 4ο</u> ΜΕΡΟΣ Β'

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΣΕ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε την πιο άμεση εφαρμογή της έννοιας του ολοκληρώματος, δηλαδή τον προσδιορισμό του αρχικού μεγέθους στο οποίο αντιστοιχεί ένα γνωστό **οριακό μέγεθος**, δηλαδή όταν είναι γνωστός ο ρυθμός μεταβολής του.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, με την βοήθεια κατάλληλης ολοκλήρωσης είναι δυνατόν να αντλήσουμε πληροφορίες για μια συνάρτηση από την παράγωγό της. Δεδομένου ότι η παράγωγος της κάθε συνάρτησης συμβολίζει το ρυθμό μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής ως προς την ανεξάρτητη, από τον ρυθμό μεταβολής είναι δυνατό να αντλήσουμε πληροφορίες σχετικά με τη σχέση των δύο μεταβλητών.

Όπως θα δούμε και στα επόμενα κεφάλαια, τέτοιου είδους προβλήματα εμφανίζονται κατά την μελέτη του φαινομένου της μεγέθυνσης, της μεταβολής ενός πληθυσμού, της συσσώρευσης κεφαλαίου κ.α.

4.1 Εύρεση ολικού μεγέθους από το αντίστοιχο οριακό

Αν F είναι κάποιο μέγεθος (π.χ. κόστος) εξαρτώμενο από κάποιο άλλο, έστω το x(π.χ. ποσότητα προϊόντος), τότε ως οριακό μέγεθος (π.χ. οριακό κόστος) ορίζεται το $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$, δηλαδή η παράγωγος της F ως προς x.

Όμως από τη σχέση της παραγώγου και του ολοκληρώματος, όπως αυτή προκύπτει από τα θεμελιώδη θεωρήματα του απειροστικού λογισμού, μπορούμε να μεταβούμε από το οριακό μέγεθος $\frac{dF}{dt}$, στο ολικό $F(x)$ μέσω κατάλληλης ολοκλήρωσης.

Όπως έχουμε δει η αντιστοίχιση αυτή δεν είναι μονοσήμαντη. Εάν όμως έχουμε την τιμή της $F(x)$ για κάποια τιμή του x(*αρχική συνθήκη*) τότε μπορούμε να βρούμε την ακριβή συνάρτηση $F(x)$.

Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων με αόριστη ολοκλήρωση.

<u>Παράδειγμα 1</u>
Ας υποθέσουμε ότι σε μια βιομηχανία το οριακό κόστος παραγωγής x ποσοτήτων είναι $3x^2 - 30x + 200 \chi.\mu.$. Το συνολικό κόστος παραγωγής 3 μονάδων είναι 800 χρηματικές μονάδες (χ.μ.). Ποιο είναι το συνολικό κόστος παραγωγής των πρώτων 6 μονάδων;

Λύση:

Το οριακό κόστος είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης του συνολικού κόστους παραγωγής.

Συνεπώς, το συνολικό κόστος είναι η αντιπαράγωγος του οριακού κόστους.
Συγκεκριμένα, $C(x) = \int C'(x)dx = \int (3x^2 - 30x + 200)dx = x^3 - 15x^2 + 200x + c$, όπου$c$μια σταθερά.
Εφόσον όταν η βιομηχανία παράγει 3 μονάδες το συνολικό κόστος είναι $800\chi.\mu.$έχουμε $800 = 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 200 \cdot 3 + c \Rightarrow c = 308\chi.\mu.$
Άρα το συνολικό κόστος παραγωγής για 6 μονάδες είναι $C(6) = 6^3 - 15 \cdot 6^2 + 200 \cdot 6 + 308 \Rightarrow C(6) = 1.184\chi.\mu.$

Παράδειγμα 2

Ο ρυθμός απόσβεσης ενός μηχανήματος είναι $220(t - 10)$€ το χρόνο. Αν το μηχάνημα αγοραστεί καινούριο στην τιμή των 120.000 €, ποια θα είναι η αξία του σε 10 χρόνια;

Λύση:

Εφόσον ο ρυθμός απόσβεσης ενός μηχανήματος είναι $220(t - 10)$€ το χρόνο, η συνάρτηση απόσβεσης είναι $\int 220(t - 10)dt = 110t^2 - 2.200t + c$, όπου tη μεταβλητή του χρόνου και cμια σταθερά.
Για να υπολογίσουμε την σταθερά cθέτουμε για $t = 0$(δηλαδή την στιγμή της αγοράς) την τιμή 120.000 €: $120.000 = 110 \cdot 0^2 - 2.200 \cdot 0 + c \Rightarrow c = 120.000$.
Συνεπώς για $t = 10$έχουμε $110 \cdot 10^2 - 2.200 \cdot 10 + 120.000 = 109.000$.
Άρα η αξία του μηχανήματος σε 10 χρόνια είναι 109.000 €.

Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων με τη βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος

Παράδειγμα 3

Η ποσότητα ενός εμπορεύματος, η οποία βρίσκεται κάποια χρονική στιγμή σε μια αποθήκη, είναι ίση με 100 μονάδες και μεταβάλλεται με ρυθμό $8 - 10t^{-1/3}$μονάδων την ημέρα. Ποια είναι η ποσότητα του εμπορεύματος που βρίσκεται στην αποθήκη στο τέλος της 27ης ημέρας.

Λύση:
Συμβολίζουμε με $q = q(t)$την ποσότητα του εμπορεύματος ως προς τον χρόνο t.
Από την εκφώνηση έχουμε $\frac{dq}{dt} = 8 - 10t^{-1/3}$.
Από το 2ο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε $\int_0^{27} \frac{dq}{dt}(t)dt = q(27) - q(0)$, όπου ως χρόνο μηδέν θεωρούμε την χρονική στιγμή κατά την οποία υπάρχουν 100 μονάδες στην αποθήκη.
Έτσι $q(0) = 100$.
Έχουμε $\int_0^{27}(8 - 10t^{-1/3})\, dt = [8t + 30t^{2/3}]_0^{27} = 486$.
Συνεπώς, $q(27) = 100 + 486 = 586$μονάδες.

Παράδειγμα 4

Αν σε ένα κατάστημα τα έσοδα εισέρχονται συνεχώς με σταθερό ρυθμό $200t - t^2$χ.μ. την ωρα, tώρες από το άνοιγμα του, ποια είναι τα συνολικά έσοδα στη διάρκεια μιας εργάσιμης ημέρας 10 ωρών.

Λύση :
Τα συνολικά έσοδα θα είναι $R = \int_0^{10}(200t - t^2)\,dt = [100t^3 - \frac{t^3}{3}]_0^{10} = 10.000 - \frac{1.000}{3} \simeq 9666{,}6 \nu.\mu.$.

Παρατήρηση:
Η απλουστευτική υπόθεση ότι η εισροή εσόδων είναι συνεχής και ο ρυθμός της είναι γνωστός ήταν εκείνη η οποία μας επέτρεψε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω τεχνική. Αν η υπόθεση αυτή δεν είναι αποδεκτή, τότε πρέπει να διαμερίσουμε το διάστημα $[0,10]$σε πεπερασμένα υποδιαστήματα (πεπερασμένα ως προς το πλήθος και ως προς το μέγεθος), μέσα σε κάθε ένα από τα οποία θα πρέπει να γνωρίζουμε τον μέσο ρυθμό εισροής επί το μήκος του αντίστοιχου υποδιαστήματος και προσθέτοντας αλγεβρικά τα προκύπτοντα γινόμενα, μπορούμε να βρούμε τα συνολικά έσοδα.
Η τεχνική της ολοκλήρωσης έχει εφαρμογή όταν είναι γνωστός ο συνεχής ρυθμός μεταβολής του μεγέθους (εδώ των εσόδων), διαχρονικά.

Παράδειγμα 5
Η παραγωγικότητα μιας μηχανής ελαττώνεται με συνεχή ρυθμό $f(t)\chi.\mu.$κάθε μήνα, tμήνες μετά από κάθε γενική της συντήρηση. Το κόστος της γενικής συντήρησης είναι $A\chi.\mu.$.
α. Γιατί πρέπει η συντήρηση να γίνεται κάθε Τ μήνες, για το Τ που ελαχιστοποιεί την $g(T) = \frac{1}{T}[A + \int_0^T f(t)dt]$;
β. Να δειχθεί ότι το ελάχιστο της $g(T)$επιτυγχάνεται με την τιμή του Τ για την οποία $g(T) = f(T)$.
(*Υποθέτουμε ότι η fείναι συνεχής.*)

Λύση:
α.
Σύμφωνα με την εκφώνηση, το μέγιστο της παραγωγικότητας της μηχανής επιτυγχάνεται αμέσως μετά από κάθε συντήρηση της, δηλαδή όταν $t = 0$.

Έστω Μ η μέγιστη παραγωγικότητα σε χ.μ. ανά μήνα. (*Υποθέτουμε ότι η μέγιστη παραγωγικότητα Μ είναι η ίδια μετά από κάθε συντήρηση.*)

Δεχόμενοι ως στόχο την μεγιστοποίηση των κερδών που προέρχονται από τη μηχανή αυτή, είναι φανερό ότι πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε τα μηνιαία έξοδα για κάθε διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών συντηρήσεων.

Αν συμβολίσουμε με Τ το χρονικό διαστημα μεταξύ δύο διαδοχικών συντηρήσεων, τότε τα μηνιαία έξοδα που προκαλούνται από την πτώση της παραγωγικότητας είναι $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$.

Πράγματι, το ολοκλήρωμα αυτό παριστά το άθροισμα των εξόδων που αντιστοιχούν στα απειροστά χρονικά διαστήματα dtαπό $t = 0$μέχρι $t = T$, δηλαδή το σύνολο των λόγω της πτώσεως της παραγωγικότητας εξόδων, για το μεταξύ διαδοχικών συντηρήσεων διάστημα.

Αν διαιρέσουμε το μήκος Τ του διαστήματος σε μήνες, θα βρούμε τα μηνιαία έξοδα που προκαλούνται από την πτώση της παραγωγικότητας.

Το μέγεθος $\frac{1}{T} \cdot A$αντιπροσωπεύει τα μηνιαία έξοδα λόγω του κόστους Α της συντήρησης.

Συνεπώς το μέγεθος $g(T) = \frac{1}{T}[A + \int_0^T f(t)dt]$αντιπροσωπεύει τα συνολικά μηνιαία έξοδα που πρέπει να ελαχιστοποιηθούν.

***Παρατήρηση*:**
Η ελαχιστοποίηση των μηνιαίων εξόδων υπαγορεύεται μόνο από το γεγονός ότι τα έσοδα μετρήθηκαν σε χ.μ. ανά μήνα. Αν τα έσοδα μετριόντουσαν σε χ.μ. ανά δίμηνο, θα έπρεπε να ελαχιστοποιήσουμε τα ανά δίμηνο έξοδα.

β.
Για την απόδειξη του ισχυρισμού αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{dg}{dT}(T) = 0$όταν $g(T) = f(T)$.
Έχουμε

$$\frac{dg}{dt}(T) = \frac{T \cdot (A + \int_0^T f(t)dt)' - (T)'[A + \int_0^T f(t)dt]}{T^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dg}{dt}(T) = \frac{T \cdot f(T) - [A + \int_0^T f(t)dt]}{T^2}$$

Άρα
$\frac{dg}{dT}(T) = 0 \Leftrightarrow T \cdot f(T) - [A + \int_0^T f(t)dt] = 0, T \neq 0 \Leftrightarrow T \cdot f(T) - T \cdot g(T) = 0, T \neq 0 \Leftrightarrow$
$f(T) = g(T), T \neq 0$.

<u>Σχόλιο</u>:
Η επιλογή της μεθόδου επίλυσης των παραπάνω προβλημάτων δεν είναι αυστηρή. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα αντί για ορισμένη ολοκλήρωση να εφαρμόσουμε αόριστη και να χρησιμοποιήσουμε την αρχική συνθήκη και αντίστροφα.

<u>Κεφάλαιο 5ο</u>
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΣΕ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με υποδείγματα της οικονομικης επιστήμης και της διοίκησης επιχειρήσεων, η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς των ενδογενών μεταβλητών των οποίων απαιτεί την έννοια του ολοκληρώματος.

5.1 Η συνάρτηση κατανάλωσης

Η συνάρτηση κατανάλωσης $C = f(Y_d)$εκφράζει την συνολική κατανάλωση μιας οικονομίας ως συνάρτηση του συνολικού διαθέσιμου εισοδήματος Y_d.
Ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης ως προς το εισόδημα είναι η οριακή ροπή προς κατανάλωση(MPC).
Αν η οριακή ροπή προς κατανάλωση είναι γνωστή ή αν μπορεί να εκτιμηθεί, τότε η συνολική κατανάλωση υπολογίζεται εύκολα, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

<u>Παράδειγμα 1</u>
Η οριακή ροπή προς κατανάλωση σε μια οικονομία δίνεται από τη συνάρτηση $MPC = \frac{dC}{dY_d} = 0{,}6 + \frac{0{,}2}{\sqrt{Y_d}}$, όπου Y_dείναι το διαθέσιμο εισόδημα. Αν η κατανάλωση είναι 80 χρηματικές μονάδες (χ.μ.) όταν το εισόδημα είναι 100 χ.μ. να προσδιορίσετε τη συνάρτηση κατανάλωσης.

Λύση :

Έστω $C = f(Y_d)$η συνάρτηση κατανάλωσης.
Η οριακή ροπή για κατανάλωση είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης κατανάλωσης ως προς το εισόδημα.
Συνεπώς $C = \int MPC(Y_d)dY_d$.
Δηλαδή $C = \int (0{,}6 + \frac{0{,}2}{\sqrt{Y_d}})dY_d = 0{,}6Y_d + 0{,}4\sqrt{Y_d} + c$, όπου$c$η σταθερά ολοκλήρωσης.
Για τον προσδιορισμό της σταθεράς, χρησιμοποιούμε ότι $C(100) = 80$,
δηλαδή $80 = 0{,}6 \cdot 100 + 0{,}4\sqrt{100} + c \Rightarrow c = 16$.
Άρα, $C = 0{,}6Y_d + 0{,}4\sqrt{Y_d} + 16$.

<u>Παράδειγμα 2</u>
Η οριακή ροπή για κατανάλωση μιας χώρας είναι $MPC = \frac{dC}{dY_d} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5\sqrt{7Y}}$, όπου $C(Y)$ η κατανάλωση συναρτήσει του διαθέσιμου εισοδήματος Y.
Γνωρίζουμε επίσης ότι όταν το διαθέσιμο εισόδημα είναι 22 χ.μ. τότε η κατανάλωση είναι 18 χ.μ. Ποια είναι η συνάρτηση κατανάλωσης αυτής της χώρας;
Λύση :

Έστω $C = f(Y_d)$η συνάρτηση κατανάλωσης.
Προφανώς, $C(Y) = \int (\frac{4}{5} - \frac{3}{5\sqrt{7Y}})dY = \frac{4}{5}Y - \frac{3(7Y)^{-1/2}}{10} + c$όπου$c$μια σταθερά.

Γνωρίζουμε ότι $C(22) = 18$, οπότε $18 = \frac{4}{5}\cdot 22 - 3\frac{\sqrt{7\cdot 22}}{10} + c \Rightarrow c = 12{,}8$.
Άρα η συνάρτηση κατανάλωσης είναι:
$C(Y) = \frac{4}{5}Y - \frac{3(7Y)^{-1/2}}{10} + 12{,}8$.

Παρατήρηση: Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να προσδιοριστεί η συνάρτηση αποταμίευσης από την οριακή ροπή για αποταμίευση (MPS)

5.2 Επενδύσεις και σχηματισμός κεφαλαίου

Στην Οικονομική Θεωρία, οι επενδύσεις ορίζονται ώς τα νέα κεφαλαιουχικά αγαθά που παράγονται κατά τη διάρκεια μιας περιόδουt. Με άλλα λόγια οι επενδύσεις εκφράζουν την μεταβολή στο **απόθεμα κεφαλαίου** της οικονομίας, η οποία συντελείται κατά την περίοδο t. Αν μάλιστα από το σύνολο των επενδύσεων αφαιρεθούν οι αποσβέσεις, τότε οι **καθαρές επενδύσεις** εκφράζουν την μεταβολή στο απόθεμα της οικονομίας κατά τη διάρκεια της περιόδου που εξετάζουμε.
Αν υποθέσουμε ότι η διαδικασία σχηματισμού κεφαλαίου είναι μια *συνεχής* διαχρονική διαδικασία, τότε μπορούμε να εκφράσουμε το απόθεμα κεφαλαίου της οικονομίας κατά τη χρονική στιγμή tμε μία συνεχή συνάρτηση $K(t)$. Από τον ορισμό των καθαρών επενδύσεων, είναι φανερό ότι ο ρυθμός μεταβολής αυτής της συνάρτησης, δηλαδή η παράγωγος $\frac{dK}{dt}$είναι οι καθαρές επενδύσεις που γίνονται στο χρόνο t.

Επομένως, το απόθεμα κεφαλαίου $K(t)$και οι καθαρές επενδύσεις $I(t)$συνδέονται με τη σχέση

$$\frac{dK}{dt} = I(t) \Leftrightarrow K(t) = \int I(t)dt.$$

<u>Παράδειγμα 1</u>
Οι καθαρές επενδύσεις μιας οικονομίας περιγράφονται από την εξίσωση $I(t) = 90t^{4/5}$. Το αρχικό απόθεμα κεφαλαίου είναι 100 χ.μ.. Να βρεθεί η συνάρτηση του αποθέματος κεφαλαίου, όπως επίσης και το απόθεμα κεφαλαίου στο χρόνο$t = 10$.

Λύση:

Η συνάρτηση αποθέματος κεφαλαίου είναι $K(t) = \int I(t)dt = \int 90t^{4/5}dt = 50t^{9/5} + c$, όπου$c$μια σταθερά.
Το αρχικό απόθεμα κεφαλαίου ($K(0)$)είναι 100, οπότε η συνάρτηση αποθέματος κεφαλαίου είναι$K(t) = 50t^{9/5} + 100$.
Για $t = 10$το απόθεμα κεφαλαίου είναι $K(10) = 50\cdot 10^{9/5} + 100 \Rightarrow K(10) = 3225\chi.\mu.$.
<u>Παράδειγμα 2</u>
Έστω ότι η συνάρτηση καθαρών επενδύσεων μιας οικονομίας είναι $I(t) = 5t^{2/3}$και ότι το αρχικό απόθεμα κεφαλαίου είναι 5 χρηματικές μονάδες. Να βρείτε το απόθεμα κεφαλαίου το χρόνο $t = 4$καθώς και τις καθαρές επενδύσεις που έγιναν στην οικονομία στο διάστημα από $t = 3$έως $t = 5$.

Λύση:

Το απόθεμα κεφαλαίου είναι $K(t) = \int I(t)dt = \int 5t^{2/3}dt = 3t^{5/3} + c$.
Επειδή $K(0) = 5$έχουμε $c = 5$, οπότε $K(t) = 3t^{5/3} + 5$.

Έτσι, το απόθεμα κεφαλαίου το χρόνο $t = 4$είναι $K(4) = 3 \cdot 4^{5/3} + 5 \simeq 35\chi.\mu.$
Η καθαρή μεταβολή του αποθέματος κεφαλαίου από $t = 3$έως $t = 5$, είναι $K(5) - K(3) = (3 \cdot 5^{5/3} + 5) - (3 \cdot 3^{5/3} + 5) \simeq 25\chi.\mu.$

<u>*Σχόλιο*</u>: Στο τελευταίο παράδειγμα,στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν υπολογίζαμε την καθαρή μεταβολή του αποθέματος κεφαλαίου από $t = 3$έως $t = 5$μέσω του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_3^5 \quad I(t)dt = \int_3^5 \quad 5t^{2/3}dt = [3t^{5/3}]_3^5 \simeq 25\chi.\mu.$.

5.3 Παρούσα Αξία Χρηματορροής

Η παρούσα αξία ενός χρηματικού ποσού διαθέσιμου σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή t, με ετήσιο επιτόκιο rκαι συνθήκες ανατοκισμού $P = Re^{-rt}$.

Στην πράξη μια **χρηματική ροή** είναι μια σειρά από χρηματικά ποσά $R_1, R_2, \ldots$τα οποία είναι διαθέσιμα τις χρονικές στιγμές $t_1, t_2, \ldots$αντίστοιχα. Η χρηματική ροή μπορεί να αντιστοιχεί στη ροή των εσόδων από την πώληση ενός προϊόντος στο δεδομένο χρονικό ορίζοντα, στη ροή των τόκων μιας ομολογίας κ.ο.κ.

Αν θεωρήσουμε ότι ο χρόνος είναι συνεχής μεταβλητή, τότε η χρηματική ροή μπορεί να περιγραφεί από μια πραγματική συνάρτηση $R(t)$με πεδίο ορισμού τον χρονικό ορίζοντα $(0, T)$η οποία εκφράζει το διαθέσιμο χρηματικό ποσό στη χρονική στιγμή t.
Στην περίπτωση αυτή η παρούσα αξία της χρηματικής ροής είναι:

$$PV = \int_0^T \quad R(t)e^{-rt}dt$$

Έτσι, αν η χρηματική ροή είναι σταθερή, δηλαδή$R(t) = R$τότε $PV = \int_0^T \quad Re^{-rt}dt = \frac{R}{r}(1 - e^{-rT})$.

Αν η σταθερή χρηματορροή είναι διαρκής, π.χ. μια διαρκής ομολογία, η παρούσα αξία της είναι:$PV = \int_0^{+\infty} \quad Re^{-rt}dt = \frac{R}{r}\lim_{T \to +\infty}(1 - e^{-rT}) = \frac{R}{r}$.
Οι παραπάνω σχέσεις εκφράζουν την παρούσα αξία του περουσιακού στοιχείου που δημιουργεί τη συγκεκριμένη χρηματορροή. Δηλαδή, όταν το στοιχείο γίνεται αντικείμενο συναλλαγής στην αγορά, η τιμή της αγοράς του θα είναι ίσο με την παρούσα αξία του. *Για παράδειγμα*, αν το επιτόκιο είναι 10% μια ομολογία που αποφέρει 1000 € ανά έτος επ' απειρο, έχει παρούσα αξία $\frac{1000}{0{,}1} = 10000$€.

Όπως φαίνεται $\frac{dPV}{d_i} < 0$, επομένως μια αύξηση του επιτοκίου θα μειώσει την παρούσα αξία της ομολογίας και αντίστροφα.

Το πρόβλημα της συνεχούς και επ' άπειρο συνεχούς ροής μπορεί να διατυπωθεί και με την εξής μορφή: *Τι ποσό πρέπει να καταθέσουμε σε λογαριασμό με επιτόκιο $100 \cdot r\%$ και συνεχή ανατοκισμό ώστε να εξασφαλίσουμε για N έτη (ή επ' άπειρο) συνεχή ροή εισοδήματος με μηνιαίο ρυθμό $R(t)$χρηματικών μονάδων;*

Το **αντίστροφο** κατά κάποιο πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:
Με ποιο σταθερό ρυθμό πρέπει να αποταμιεύουμε συνεχώς τα επόμενα T *χρόνια έτσι ώστε με ετήσιο επιτόκιο* $100 \cdot r\%$ *και συνεχή ανατοκισμό ώστε να λάβουμε στο τέλος των* T *ετών* I *χρηματικές μονάδες;*

Η απάντηση δίνεται αν θέσουμε $I = \int_0^T S(t)e^{-r(T-t)}dt$, όπου $S(t)$ ο σταθερός ρυθμός αποταμίευσης.

Τότε $I = [-\frac{1}{r}S(t)e^r(T-t)]_0^T \Rightarrow -\frac{1}{r}S(t) + \frac{1}{r}S(t)e^{rT} \Rightarrow S(t) = I\frac{r}{e^{rT}-1}$.

<u>*Παρατήρηση:*</u>
Η έννοια της παρούσας αξίας μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε είδους ροή, π.χ. παρούσα αξία μιας ροής κατανάλωσης.

<u>Παράδειγμα 1</u>
Ποια είναι η παρούσα αξία συνεχούς ροής εισοδήματος με ρυθμό 1000 € μηνιαίως επί 30 έτη με ετήσιο επιτόκιο 6% και συνεχή ανατοκισμό; Τι γίνεται αν η χρηματική ροή συνεχίζεται επ' άπειρον;

Λύση:

Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός με τον οποίο εισρέει το εισόδημα είναι σε μηνιαία βάση, ενώ όλα τα άλλα μεγέθη δίνονται σε ετήσια βάση.
Πρέπει λοιπόν να μετατρέψουμε όλα τα μεγέθη στην ίδια βάση.
Έχουμε $R(t) = 12.000€ ανάέτος$
$r = 0{,}06$
$T = 30$

Η ζητούμενη παρούσα αξία είναι

$$PV = \int_0^{30} 12.000e^{-0{,}06t}dt \Rightarrow$$
$$PV = [12.000\frac{1}{-0{,}06}e^{-0{,}06t}]_0^{30} \Rightarrow$$
$$PV = 12.000\frac{1}{-0{,}06}(e^{-0{,}06\cdot 30} - 1) \Rightarrow$$
$$PV \simeq 166940€$$

Αν η χρηματική ροή συνεχιζόταν επ' άπειρο τότε

$$PV = \int_0^{+\infty} 12.000e^{-0{,}06t}dt \Rightarrow$$
$$PV = \lim_{y\to+\infty}\int_0^{y} 12.000e^{-0{,}06t}dt \Rightarrow$$
$$PV = \lim_{y\to+\infty}[12.000\frac{1}{-0{,}06}e^{-0{,}06t}]_0^{y} \Rightarrow$$
$$PV = \lim_{y\to+\infty}(12.000\frac{1}{-0{,}06}(e^{-0{,}06\cdot y} - 1)) \Rightarrow$$
$$PV = 200.000$$

<u>Παράδειγμα 2</u>
Αν ο ανατοκισμός είναι συνεχής και το ετήσιο επιτόκιο 10%, να βρεθεί ο ετήσιος ρυθμός με τον οποίο πρέπει να αποταμιεύουμε συνεχώς έτσι ώστε μετά από 10 χρόνια, να έχουμε 1.000.000 €.

Λύση:

Έχουμε $r = 0{,}10$, $T = 10$και $I = 1.000.000$.
Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $S(t) = 1.000.000 \frac{0{,}10}{e^{0{,}10 \cdot 10} - 1} \Rightarrow S(t) \simeq 58.198€ετησίως$.

● 5.3.1 Μαθηματική έννοια της απόσβεσης

Έστω ένα μηχάνημα το οποίο έχει ετήσιο κόστος λειτουργίας $c(\tau)$και παράγει $y(\tau)$μονάδες προϊόντος το έτος ταπό την έναρξη λειτουργίας του, οι οποίες πωλούνται στη σταθερή τιμή p.

Η χρηματική ροή που αντιστοιχεί στη λειτουργία του μηχανήματος το χρόνο τείναι:$R(\tau) = p \cdot y(\tau) - c(\tau)$.

Αν το μηχάνημα έχει λειτουργική ζώνη N έτη και μηδενική υπολειμματική αξία στο τέλος της λειτουργικής του ζωής και αν το επιτόκιο iείναι σταθερό, τότε η παρούσα αξία της χρηματορροής που δημιουργείται από τη λειτουργία του μηχανήματος από κάποιο έτος tμέχρι το τέλος της λειτουργικής του ζωής είναι: $V(t) = \int_t^N R(\tau) e^{i(\tau - t)} d\tau$.

Η **συνάρτηση απόσβεσης** $D(t)$ορίζεται ο ρυθμός μείωσης της αξίας του μηχανήματος διαχρονικά, δηλαδή$D(t) = -\frac{dV(t)}{dt}$.

Έχουμε $-\frac{dV(t)}{dt} = \frac{-d}{dt} e^{it} \int_t^N R(\tau) e^{i\tau} d\tau = R(t) - iV(t)$.

Άρα η συνάρτηση απόσβεσης είναι $D(t) = R(t) - iV(t)$.

Η **συσσωρευμένη απόσβεση** από την περίοδο αγοράς του μηχανήματος μέχρι κάποιο έτος $\alpha \leq N$ορίζεται ως $\int_0^a D(t) dt = -\int_0^a (\frac{dV(t)}{dt})\, dt = V(0) - V(a)$.

Στην πράξη χρησιμοποιούνται διάφορες μέθοδοι απόσβεσης. Οι δύο πιο συνηθισμένες είναι η **απόσβεση ευθείας γραμμής** και η μέθοδος της **εκθετικής απόσβεσης**, οι οποίες ορίζονται ως εξής:

1. Απόσβεση Ευθείας Γραμμής: $D(t) = -\frac{dV(t)}{dt} = \frac{V(0)}{N}, 0 \leq t \leq N$
2. Εκθετική απόσβεση: $D(t) = -\frac{dV(t)}{dt} = \gamma V(t)$

Με άλλα λόγια, στην απόσβεση ευθείας γραμμής υποθέτουμε ότι η αξία κτήσης του μηχανήματος επιμερίζεται εξίσου στα N έτη της λειτουργικής ζωής του, ενώ στην εκθετική απόσβεση υποθέουμε ότι η απόσβεση στο έτος tείναι ένα ποσοστό της αξίας του μηχανήματος τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο.

Ωστόσο, η συνάρτηση απόσβεσης εξαρτάται από τη χρηματορροή $R(t)$που δημιουργεί το μηχάνημα. Κατά συνέπεια, αυθαίρετες συναρτήσεις απόσβεσης όπως οι δύο παραπάνω που χρησιμοποιούνται σε λογιστικές πρακτικές δεν εκτιμούν κατά ανάγκη σωστά τη μεταβολή της αξίας του μηχανήματος, η οποία αντιπροσωπεύει την ακριβή οικονομική συνάρτηση.

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι *κάτω από ποιες προϋποθέσεις οι δύο αυθαίρετες συναρτήσεις απόσβεσης ταυτίζονται με την ακριβή οικονομική συνάρτηση απόσβεσης*.

<u>Περίπτωση Απόσβεσης Ευθείας Γραμμής</u>:
Έχουμε $\int_0^t D(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{V(0)}{N}d\tau \Leftrightarrow V(t) = V(0) - V(0)\frac{t}{N}$.

Αντικαθιστώντας την $V(t)$με $\int_t^N R(\tau)e^{i(\tau-t)}d\tau$παίρνουμε:

$$\int_t^N R(\tau)e^{i(\tau-t)}d\tau = V(0) - V(0)\frac{t}{N} \Rightarrow$$

$$\int_t^N R(\tau)e^{-i\tau}d\tau = (V(0) - V(0)\frac{t}{N})e^{-it}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς tέχουμε :

$$-R(t)e^{-it} = -ie^{-it}(V(0) - V(0)\frac{t}{N}) - V(0)\frac{e^{-it}}{N} \Rightarrow$$

$$R(t) = V(0)(i + \frac{1}{N}) - i\frac{V(0)}{N}t$$

Συνεπώς αν η χρηματορροή περιγράφεται από τη γραμμική συνάρτηση $R(t) = V(0)(i + \frac{1}{N}) - i\frac{V(0)}{N}t$τότε η Απόσβεση Ευθείας Γραμμής αποτελεί σωστή προσέγγιση της οικονομικής συνάρτησης απόσβεσης.

<u>Περίπτωση Εκθετικής Απόσβεσης</u>
Έχουμε $-dV(t) = \gamma V(t)dt \Rightarrow -\frac{dV(t)}{V(t)} = \gamma dt \Rightarrow -\int \frac{dV(t)}{V(t)} = \int \gamma dt$.

Άρα $\ln|V(t)| = -(\gamma t + c) \Rightarrow V(t) = V(0)e^{-\gamma t},$ όπου $V(0) = e^{-c}$.

Συνεπώς $\int_t^N R(\tau)e^{-i\tau}d\tau = V(0)e^{-(i+\gamma)t}$.

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη παίρνουμε $R(t)e^{-it} = (\gamma + i)V(0)e^{-(i+\gamma)t}$.

Οπότε $R(t) = (\gamma + i)V(0)e^{-\gamma t}$.

Συνεπώς αν η χρηματορροή περιγράφεται από την εκθετική συνάρτηση $R(t) = (\gamma + i)V(0)e^{-\gamma t}$, η οποία φθίνει με σταθερό ετήσιο ρυθμό γ τότε η Εκθετική Απόσβεση αποτελεί σωστή προσέγγιση της οικονομικής συνάρτησης απόσβεσης.

Παρατήρηση: Χρηματορροές που περιγράφονται γραμμικά από γραμμικές ή εκθετικές συναρτήσεις είναι εξαιρετικά σπάνιες στην πράξη. Επιπλέον η ακριβής μορφή της συνάρτησης χρηματορροής είναι πολύ δύσκολο να προσδιοριστεί εμπειρικά. Έτσι, οι αυθαίρετες συναρτήσεις απόσβεσης που χρησιμοποιούνται στις πρακτικές εφαρμογές, αναμένεται να αποκλίνουν σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό από την ακριβή οικονομική συνάρτηση απόσβεσης.

● 5.3.2 Κριτήρια αξιολόγησης επενδύσεων.

Το βασικότερο ερώτημα που δημιουργείται κατά την ανάλυση των επενδυτικών επιλογών είναι εάν μια συγκεκριμένη επενδυτική δραστηριότητα πρέπει να αναληφθεί ή όχι . Αν ληφθεί απόφαση ανάληψης της δραστηριότητας, ένα δεύτερο ερώτημα είναι ποιος είναι ο αόριστος χρόνος έναρξης της.

Το βασικότερο κριτήριο αξιολόγησης επενδύσεων είναι η **Καθαρή Παρούσα Αξία**.

Υποθέτουμε ότι ένα **επενδυτικό σχέδιο** έχει τα ακόλουθα στοιχεία:

i. **Κόστος κατασκευής** K, το οποίο περιλαμβάνει κόστος κτιρίων, μηχανημάτων κτλ. Για λόγους απλούστευσης θεωρούμε ότι η κατασκευή διαρκεί μία περίοδο.
ii. **Ροή οφέλους**$B(\tau)$, η οποία αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ της αξίας του παραγόμενου προϊόντος και του κόστους λειτουργίας τη χρονική περίοδο τ. Το κόστος λειτουργίας περιλαμβάνει στοιχεία όπως καύσιμα, εργατικά κτλ.

Η Καθαρή Παρούσα Αξία του επενδυτικού σχεδίου ορίζεται ως εξής:

$$NPV = -K + \int_0^N e^{-r\tau} B(\tau) d\tau$$

όπου Nη λειτουργική ζωή της επενδύσεις
r το σταθερό επιτόκιο προεξόφλησης.

- Αν $NPV > 0$, τότε το σχέδιο γίνεται αποδεκτό.
- Αν $NPV < 0$, τότε το σχέδιο απορρίπτεται.
- Αν πρέπει να επιλεγεί μόνο ένα από περισσότερα υποψήφια σχέδια, τότε επιλέγεται αυτό με τη μεγαλύτερη Καθαρή Παρούσα Αξία.

Δηλαδή, αν $NPV_1 > NPV_2$, τότε γίνεται αποδεκτό το σχέδιο 1.

Ένα δεύτερο, πολύ συχνά χρησιμοποιούμενο, κριτήριο αξιολόγησης είναι το κριτήριο του **Εσωτερικού Επιτοκίου Αποδοτικότητας**.

Το Εσωτερικό Επιτόκιο Αποδοτικότητας (IRR)είναι το επιτόκιο iτο οποίο αποτελεί λύση της εξίσωσης:

$$-K + \int_0^N e^{-i\tau} B(\tau) d\tau = 0$$

Με άλλα λόγια, το Εσωτερικό Επιτόκιο Αποδοτικότητας είναι το επιτόκιο προεξόφλησης για το οποίο μηδενίζεται η Καθαρή Παρούσα Αξία.

- Αν $i > r$το σχέδιο γίνεται αποδεκτό.
- Αν $i \leq r$το σχέδιο απορρίπτεται.

Το κριτήριο της Καθαρής Παρούσας Αξίας βασίζεται στην υπόθεση ότι επενδυτική δραστηριότητα αρχίζει την τρέχουσα περίοδο $(t = 0)$. Ο κανόνας αυτός συνεπάγεται άμεση έναρξη του έργου αν $NPV > 0$και κατά συνέπεια χάνεται η ευκαιρία να ξεκινήσει σε μελλοντική χρονική στιγμή, με ενδεχομένως μεγαλύτερη NPV.

Η **επιλογή του αόριστου χρόνου έναρξης** συνίσταται στον προσδιορισμό του χρόνου κατασκευής της επένδυσης στον οποίο αντιστοιχεί η μεγαλύτερη NPV.

Η **συνάρτηση οφέλους** γράφεται ως: $B(\tau, w) = P(\tau)Q(w)$,

όπου τ ο ημερολογιακός χρόνος
t ο χρόνος κατασκευής και
$w = \tau - t$η ηλικία του έργου

Υποθέτοντας ότι το κόστος κατασκευής είναι ανεξάρτητο του χρόνου κατασκευής, η Καθαρή Παρούσα Αξία μιας επένδυσεις που κατασκευάζεται την περίοδο tείναι :

$$V(t) = NPV = \int_t^{t+N} P(\tau)Q(\tau - t)e^{-r\tau}d\tau - Ke^{-rt}$$

και θέτοντας $w(\tau) = \tau - t$παίρνουμε

$$V(t) = \int_t^N P(w+t)Q(w)e^{-r(w+t)}dt - Ke^{-rt} = e^{-rt}(\int_t^N P(w+t)Q(w)e^{-rw}dw - K).$$

Για να βρούμε υποψήφια ακρότατα παραγωγίζουμε ως προςtκαι έχουμε:

$$\frac{dV(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow -rV(t) + \int_t^N P'(w+t)Q(w)e^{-rw}dw = 0 \Leftrightarrow -rV(t) + \int_t^{N+t} P'(\tau)Q(\tau - t)e^{-r\tau}d\tau = 0$$

Για να εξακριβώσουμε το είδος του υποψήφιου ακρότατου, υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο της $V(t)$ως προςt:

$$\frac{d^2V(t)}{dt^2} = -rV'(t) + \int_t^{N+t} (P''(\tau) - rP'(\tau))\, Q(\tau - t)e^{-r\tau}d\tau$$

κι επειδή $V'(t) = 0$έχουμε $\frac{d^2V(t)}{dt^2} = \int_t^{N+t}(P''(\tau) - rP'(\tau))\, Q(\tau - t)e^{-r\tau}d\tau.$

Άρα για να είναι η δεύτερη παράγωγος αρνητική και να έχουμε μέγιστο πρέπει

$$P''(\tau) - rP'(\tau) < 0 \Leftrightarrow \frac{P''(\tau)}{P'(\tau)} < r$$

δηλαδή η ποσοστιαία μεταβολή της $P'(\tau)$να είναι μικρότερη από το επιτόκιο προεξόφλησης.

5.4 Πλεόνασμα καταναλωτή και παραγωγού

- **5.4.1 Το πλεόνασμα του καταναλωτή**

Το **πλεόνασμα του καταναλωτή** είναι ένας δείκτης μέτρησης σε χρηματικούς όρους, των μεταβολών στην ευημερία του καταναλωτή οι οποίες οφείλονται σε μεταβολές των τιμών των αγαθών για τα οποία ο καταναλωτής εκδηλώνει ζήτηση. Το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι ένας από τους συνηθέστερα χρησιμοποιούμενος δείκτες προκειμένου να ποσοτικοποιηθούν οι επιδράσεις σε όρους ευημερίας, από παρεμβάσεις στον μηχανισμό των τιμών (π.χ. φόροι, επιδοτήσεις).

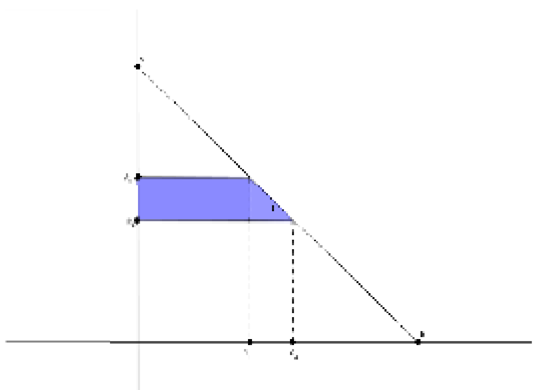
Θεωρούμε την συνάρτηση ζήτησης ενός συγκεκριμένου αγαθού. Αν οι τιμές των υπόλοιπων αγαθών και το εισόδημα του καταναλωτή παραμένουν σταθερά, τότε η ζητούμενη ποσότητα Qτου αγαθού εξαρτάται μόνο από την τιμή του P, δηλαδή $Q = D(P)$.

Η διαφορά ανάμεσα στο ποσό που οι καταναλωτές θα ήταν διαθέσιμοι να πληρώσουν και στο ποσό που πραγματικά πληρώνουν προκειμένου να αγοράσουν την ποσότητα Q^{*}εκράζει το πλεόνασμα του καταναλωτή CS που αντιστοιχεί στην ποσότητα Q^{*}και ισούται με:
$CS(Q^{*}) = \int_0^{Q_0^{*}} D^{-1}(Q)dQ - P^{*}Q^{*}$, όπου $P^{*} = D^{-1}(Q^{*})$.

Αν η τιμή εκφραστεί ως συνάρτηση της ζητούμενης ποσότητας, τότε το πλεόνασμα του καταναλωτή γράφεται: $CS(P^{*}) = \int_{P^{*}}^{P_0} D(P)dP = -\int_{P_0}^{P^{*}} D(P)dP$.

Στην <u>ειδική περίπτωση</u> που η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης είναι **γραμμική** και η τιμή ενός αγαθού μειωθεί από ένα επίπεδο P_1σε ένα άλλο P_2με αντίστοιχες ποσότητες Q_1και Q_2όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα τότε το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι :

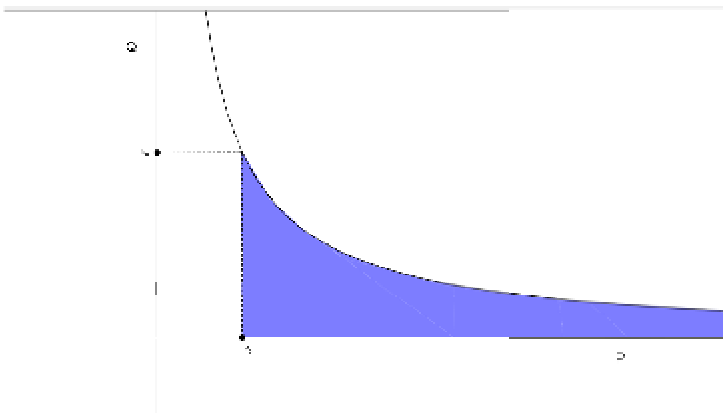
$$CS = -\int_{P_1}^{P_2} Q(P)dP$$



<u>Παράδειγμα 1</u>:
Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης κάποιου αγαθού είναι $Q = aP^{-b}$ με $\alpha, b > 0$. Να βρεθεί το πλεόνασμα του καταναλωτή που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή P_0.

Λύση:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ζήτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Για αυτή τη συνάρτηση ζήτησης, η ελαστικότητα είναι σταθερή και ίση με $-b$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση ζήτησης δεν τέμνει ούτε τον άξονα των τιμών ούτε τον άξονα των ποσοτήτων. Έτσι, το πλεόνασμα καταναλωτή που παριστάνεται με τη σκιασμένη περιοχή στο σχήμα είναι:

$CS(P_0) = \int_{P_0}^{+\infty} aP^{-b}dP.$

Συνεπώς, $CS(P_0) = \lim_{P' \to +\infty} \int_{P_0}^{P'} aP^{-b}dP = \lim_{P' \to +\infty} [\frac{a}{1-b}P^{1-b}]_{P_0}^{P'} = \frac{a}{1-b} \lim_{P' \to +\infty} (P')^{1-b} - (P_0)^{1-b}.$

● 5.4.2 Το πλεόνασμα του παραγωγού

Το **πλεόνασμα του παραγωγού** εκφράζει τη διαφορά ανάμεσα στο ποσό που πραγματικά εισπράττει ο παραγωγός και στο ποσό που θα ήταν διατεθειμένος να εισπράξει με βάση τη συνάρτηση της προσφοράς του.
Στην Οικονομική Θεωρία η παραγόμενη ποσότητα προσδιορίζεται από τη συνθήκη $P = MC(Q)$, όπου $MC(Q)$είναι το οριακό κόστος της επιχείρησης. Επομένως, η συνάρτηση προσφοράς συμπίπτει με την συνάρτηση οριακού κόστους.
Έτσι το πλεόνασμα του παραγωγού δίνεται από τη σχέση $PS = P^{*}Q^{*} - \int_0^{Q^{*}} MC(Q)dq.$
Ισοδύναμα, $PS = P^{*}Q^{*} - TVC(Q^{*})$, όπου $TVC(Q)$η συνάρτηση Συνολικού Μεταβλητού Κόστους.

Ως **κοινωνικό πλεόνασμα** αναφέρεται το άθροισμα του πλεονάσματος του καταναλωτή και του παραγωγού.

<u>Παράδεγμα 1</u>
Έστω ότι η συνάρτηση οριακού κόστους μιας επιχείρησης $MC(Q) = 3Q + 2$. Να βρείτε το πλεόνασμα του παραγωγού που αντιστοιχεί στην τιμή $P = 8$, στην τιμή$P = 17$και το πλεόνασμα του παραγωγού καθώς η τιμή αυξάνεται από $P = 8$σε $P = 17$.

Λύση:

Από την συνθήκη μεγιστοποίησης του κέρδους $P = MC(Q)$προκύπτει ότι στην τιμή $P_1 = 8$αντιστοιχεί ποσότητα $Q_1 = 2$, ενώ στην τιμή $P_2 = 17$αντιστοιχεί ποσότητα $Q_2 = 5$.

Έτσι το πλεόνασμα του παραγωγού που αντιστοιχεί στην τιμή $P_1 = 8$είναι:

$PS_1 = 8 \cdot 2 - \int_0^2 (3Q + 2)\, dQ = 16 - [\frac{3}{2}Q^2 + 2Q]_0^2 = 16 - 10 = 6$και

το πλεόνασμα του παραγωγού που αντιστοιχεί στην τιμή $P_2 = 17$είναι:

$PS_2 = 17 \cdot 5 - \int_0^5 (3Q + 2)\, dQ = 85 - [\frac{3}{2}Q^2 + 2Q]_0^5 = 85 - 47{,}5 = 37{,}5.$

Τέλος το πλεόνασμα καθώς η τιμή αυξάνεται από $P = 8$σε $P = 17$, δηλαδή καθώς η ποσότητα αυξάνεται από $Q = 2$σε $Q = 5$είναι:

$PS = PS_2 - PS_1 = 37{,}5 - 6 = 31{,}5$

<u>Παράδειγμα 2</u>
Η συνάρτηση ζήτησης για κάποιο αγαθό είναι $q = a - bp$και η συνάρτηση προσφοράς του είναι $q = c + dp$, όπου a, b, c, dείναι θετικές σταθερές με $c < a$. Να εκφράσετε αλγεβρικά το πλεόνασμα του καταναλωτή.

Λύση:
Η *τιμή* και η *ποσότητα ισορροπίας* δίνονται από τις σχέσεις $P_e = \frac{a-c}{b+d}$και $Q_e = \frac{cb+ad}{b+d}$αντίστοιχα.

Επομένως, $CS(Q_e) = \int_0^{Q_e} (\frac{a-q}{b})\, dq - P_eQ_e = [\frac{a}{b}q - \frac{q^2}{2b}]_0^{Q_e} - P_eQ_e = (\frac{a}{b}Q_e - \frac{{Q_e}^2}{2b}) - P_eQ_e.$

Ισοδύναμα, $CS(Q_e) = \frac{Q_e}{2b}(2a - Q_e - 2P_eb) = \frac{Q_e}{2b}(2a - \frac{cb+ad}{b+d} - 2\frac{a-c}{b+d}b).$

Δηλαδή, $CS(Q_e) = \frac{Q_e}{2b(b+d)}(2a(b + d) - cb - ad - 2ab + 2cb) = \frac{Q_e}{2b(b+d)}(ad + bc).$

Συνεπώς, $CS(Q_e) = \frac{cb+ad}{2b(b+d)^2}(ad + bc) = \frac{(bc+ad)^2}{2b(b+d)^2}.$

● 5.4.3 Μεγιστοποίηση Κοινωνικού Πλεονάσματος .

Η μεγιστοποίηση του κοινωνικού πλεονάσματος $(CS + PS)$αποτελεί μια συνηθισμένη εξειδίκευση αντικειμενικής συνάρτησης για τον καθορισμό είτε τιμολογιακής πολιτικής είτε επιπέδων παραγωγής στο πλαίσιο ενός προβλήματος στο οποίο ο **κοινωνικός σχεδιαστής** επιλέγει τιμές ή ποσότητες.

Ας εξετάσουμε το πρόβλημα του προσδιορισμού μιας αποτελεσματικής τιμολογιακής πολιτικής για μια επιχείρηση, η οποία παράγει νπροϊόντα σε ποσότητες $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu$αντίστοιχα.

Για ευκολία, κάνουμε τις ακόλουθες απλουστευτικές υποθέσεις και θεωρούμε ότι το πρόβλημα αναφέρεται σε δημόσια επιχείρηση:

i. Η διανομή του εισοδήματος θεωρείται δεδομένη και η δημόσια επιχείρηση δεν επιδιώκει να την μεταβάλλει.
ii. Η δημόσια επιχείρηση κατά το σχεδιασμό της τιμολογιακής της πολιτικής δεν επιδιώκει να πετύχει δεδομένο ύψος εσόδων.
iii. Τα νπροϊόντα παράγονται αποκλειστικά από την επιχείρηση.

Αν ισχύουν οι παραδοχές αυτές τότε το υπόδειγμα προσδιορισμού της τιμολογιακής πολιτικής είναι:

$$\max_{P_i}(CS + PS), i = 1, \ldots, \nu$$

Για τον προσδιορισμό του πλεονάσματος του καταναλωτή CS, πρέπει πρώτα να ορίσουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις ζήτησης. Η συνάρτηση ζήτησης για κάθε αγαθό i, ορίζεται ως μια συνάρτηση $Q_i = Q_i(P_1, \ldots, P_\nu; \delta_1, \ldots, \delta_\nu)$ όπου $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_\nu)$ είναι ένα διάνυσμα δεικτών ποιότητας των προϊόντων της δημόσιας επιχείρησης.

Έχοντας ορίσει τις συναρτήσεις ζήτησης με βάση τις τιμές διάθεσης των αγαθών και τους αντίστοιχους δείκτες ποιότητας, *το πλεόνασμα του καταναλωτή* δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:
$CS = -\int_A^P \sum_i \quad Q_i\,(P_1, \ldots, P_\nu; \delta_1, \ldots \delta_\nu) dP_i$.

Το *πλεόνασμα του παραγωγού* προσδιορίζεται ως:
$PS = \sum_i \quad P_i Q_i(P_1, \ldots, P_\nu; \delta_1, \ldots \delta_\nu) - C(Q_1(\bullet), .. Q_\nu(\bullet); \delta_1, \ldots, \delta_\nu)$,
όπου C η συνάρτηση κόστους της επιχείρησης, που εξαρτάται τόσο από την παραγόμενη ποσότητα, όσο και από το επίπεδο ποιότητας που επιτυγχάνεται.

Έτσι το **πρόβλημα μεγιστοποίησης του κοινωνικού πλεονάσματος** γράφεται:

$$\max_{P_i}(CS + PS) = max[-\int_A^P \sum_i \quad Q_i\,(P;\delta) dP_i + (\sum_i \quad P_i Q_i(P;\delta) - C(Q_1(\bullet), .. Q_\nu(\bullet); \delta_1, \ldots, \delta_\nu))].$$

Υποθέτουμε ότι:
- όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς
- οι κλίσεις των συναρτήσεων ζήτησης είναι αρνητικές
- $\lim\limits_{A_j \to +\infty} Q_j = 0$

Με τις υποθέσεις αυτές για να βρούμε τα υποψήφια ακρότατα υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους του $CS + PS$ως προς τις τιμές P_iκαι ως προς τις ποιότητες δ_jκαι ελέγχουμε που μηδενίζονται.

Για λόγους ευκολίας θεωρούμε την περίπτωση που η επιχείρηση παράγει **μόνο ένα προϊόν**.

Τότε $CS + PS = -\int_A^P \quad Q(P, \delta) dP + [P \cdot Q(P, \delta) - C(Q(P, \delta), \delta)]$.

Οπότε η αναγκαία συνθήκη πρώτης τάξης είναι:
$$\frac{\partial(CS + PS)}{\partial P} = 0 \Leftrightarrow -Q + Q + P \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} - \frac{\partial C}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} = 0 \Leftrightarrow P = \frac{\partial C}{\partial Q}$$

Για να είναι το ακρότατο μέγιστο πρέπει η Hessian μήτρα να είναι αρνητικά ορισμένη.
(Ικανή Συνθήκη Δεύτερης Τάξης).

Η Hessian μήτρα του προβλήματος είναι:

$$H = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial^2 C}{\partial^2 Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} & -(\frac{\partial^2 C}{\partial^2 Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \delta} + \frac{\partial^2 C}{\partial Q \cdot \partial \delta}) \\ -(\frac{\partial^2 C}{\partial^2 Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \delta} + \frac{\partial^2 C}{\partial Q \cdot \partial \delta}) & \frac{\partial^2 CS}{\partial \delta^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial \delta \cdot \partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \delta} - \frac{\partial^2 C}{\partial \delta^2} \end{pmatrix}$$

Για να είναι η μήτρα αυτή *θετικά ορισμένη* πρέπει:

- $1 - \frac{\partial^2 C}{\partial^2 Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 C}{\partial^2 Q} > \frac{\partial P}{\partial Q}$

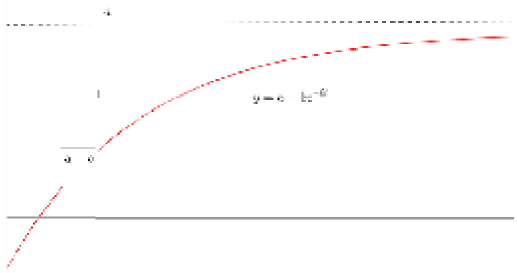
- $|H| > 0$

Είναι φανερό ότι οι παραπάνω συνθήκες ικανοποιούνται αν η συνάρτηση κοινωνικού οφέλους είναι αυστηρώς κοίλη.

5.5 Καμπύλες μάθησης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(t) = a - be^{-kt}$, όπου α, β, kθετικοί παράμετροι, καλείται **καμπύλη μάθησης**.

Ονομάστηκε έτσι από ψυχολόγους που ανακάλυψαν ότι η συνάρτηση αυτού του είδους περιγράφει τη σχέση ανάμεσα στην αποδοτικότητα ενός εργαζόμενου στη δουλειά του και στο χρόνο μαθητείας ή εμπειρίας του.



Παρατηρούμε ότι όταν $t = 0$, η απόδοση του κάθε εργαζομένου ισούται με $a - b$.Όσο $t \to +\infty$, τόσο η απόδοση του εργαζόμενου αυξάνει αλλά με φθίνοντα ρυθμό.
Έτσι, σε κάποια χρονική στιγμή παρά το γεγονός ότι ο εργαζόμενος γίνεται πιο έμπειρος, η αποδοτικότητα του παραμένει στάσιμη. Μαθηματικά αυτή η σχέση εκφράζεται ως $\lim_{t \to +\infty} f(t) = a$.

Οι καμπύλες μάθησης μπορούν να παρασταθούν σε μια εκθετική συνάρτηση της μορφής $g(x) = Ax^c$, όπου συνήθως το $g(x)$παριστάνει τις ώρες εργασίας που απαιτούνται για την παραγωγή xποσότητας προϊόντος, Aείναι μια σταθερή μεγαλύτερη του μηδενός και $-1 \leq c \leq 0$.
Ο συνολικός αριθμός ωρών που πρέπει να απασχοληθούν οι εργαζόμενοι βρίσκεται με την ολοκλήρωση της συνάρτησης μάθησης.
Έτσι έχουμε: $F(x) = \int_a^b f(x)dx = A\int_a^b x^c dx = A[\frac{x^{c+1}}{c+1}]_a^b$,
όπου a, bπαριστάνουν το κατώτερο και ανώτερο επίπεδο παραγωγής.

Παράδειγμα
Ο Διευθυντής ενός εργοστασίου παραγωγής ηλεκτρικών ειδών, μετά από προσεκτική έρευνα βασιζόμενη στην κατασκευή 30 μονάδων ενός καινούριου προϊόντος, βρήκε ότι ο αριθμός των ωρών εργασίας που απαιτούνται εξελίσσεται σύμφωνα με τη συνάρτηση: $f(x) = 1.500x^{-0,4}$. Πόσες ώρες εργασίας απαιτούνται για την κατασκευή 80 ακόμη μονάδων;

Λύση:

$$\int_{30}^{110} 1.500x^{-0,4}dx = [\frac{1.500x^{-0,4+1}}{0,6}]_{30}^{110} = \frac{1.500 \cdot 110^{0,6}}{0,6} - \frac{1.500 \cdot 30^{0,6}}{0,6} \simeq 22.713 ώρες$$

Κεφάλαιο 6ο
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ DOMAR

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στο υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης του Domar και στο υπόδειγμα του Domar για το δημόσιο χρέος που, από μαθηματική πλευρά, βασίζονται στην θεωρία του ολοκληρωτικού λογισμού.

6.1 Το υπόδειγμα μεγέθυνσης του Domar

Σύμφωνα με τη *θεωρία της ενεργούς ζήτησης*, οι καθαρές επενδύσεις έχουν ένα πολλαπλασιαστικό αποτέλεσμα στο καθαρό εισόδημα. Επίσης, οι επενδύσεις επηρεάζουν το απόθεμα κεφαλαίου και κατ' επέκταση την παραγωγική ικανότητα της οικονομίας. Συνεπώς είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε:

1. Διαχρονικά όπως επίσης και για κάθε χρονική περίοδο, αν το επίπεδο των επενδύσεων επαρκεί για να φέρει σε ισορροπία την ενεργό ζήτηση με την παραγωγική ικανότητα της οικονομίας.
2. Αν η οικονομία δε βρίσκεται σε ισορροπία, κατά πόσο υπάρχει κάποιος μηχανισμός τέτοιος ώστε να την επαναφέρει σε κατάσταση ισορροπίας.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε την ανάλυση του Domar για το ρόλο των επενδύσεων στην οικονομία.

Ο Domar παρουσιάζει την επίδραση των επενδύσεων στην ενεργό ζήτηση ξεκινώντας από την **πολλαπλασιαστική επίδραση στο εισόδημα**:

$$\Delta Y = \frac{1}{s}\Delta I$$

όπου Y είναι το καθαρό εισόδημα,
I οι καθαρές επενδύσεις,
s η οριακή (μέση) ροπή για την αποταμίευση και
$\frac{1}{s}$ ο πολλαπλασιαστής επενδύσεων.

Αν διαιρέσουμε την παραπάνω εξίσωση με Δt και αν θεωρήσουμε τις μεταβολές απειροελάχιστα μικρές , τότε μπορούμε να γράψουμε

Συνολική ζήτηση: $\frac{dY}{dt} = \frac{dI}{dt}\frac{1}{s}$

Την επίδραση των επενδύσεων στην παραγωγική ικανότητα ο Domar την υπολογίζει μέσω των μεταβολών στο **δυνητικό προϊόν** της οικονομίας.

Στη συνέχεια, υποθέτει ότι ο λόγος δυνητικού προϊόντος-κεφαλαίου είναι σταθερός. Δηλαδή,

$$\frac{Z}{K} \equiv \sigma$$

όπου Z το δυνητικό προϊόν,
K το απόθεμα κεφαλαίου και
σ ο σταθερός λόγος δυνητικού προϊόντος-κεφαλαίου.

Επομένως, αν το απόθεμα κεφαλαίου της οικονομίας σε κάποια χρονική στιγμή t είναι $K(t)$, το δυνητικό προϊόν είναι $Z \equiv \sigma K$.

Συνεπώς, $dZ \equiv \sigma \cdot dK$.

Αν πάρουμε μεταβολές ως προς το χρόνο, δεδομένου ότι οι μεταβολές στο απόθεμα του κεφαλαίου εξαρτώνται από τις καθαρές επενδύσεις, τότε έχουμε:

Συνολική προσφορά: $\frac{dZ}{dt} = \frac{\sigma \cdot dK}{dt} = \sigma \cdot I$.

Σύμφωνα με τον Domar, ισορροπία υπάρχει όταν το παραγόμενο προϊόν Y είναι ίσο με το δυνητικό Z.

Συνεπώς, για την διαχρονική ισορροπία πρέπει να ισχύει $\frac{dY}{dt} = \frac{dZ}{dt}$.

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι: *"Πώς πρέπει να μεταβληθούν οι επενδύσεις ώστε να υπάρχει ισορροπία στην οικονομία;"*

Από τα προηγούμενα έχουμε $\frac{dY}{dt} = \frac{dI}{dt}\frac{1}{s} = \sigma I = \frac{dZ}{dt}$, ισοδύναμα $\frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = \sigma s$.

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε τη συνθήκη **διαχρονικής ισορροπίας**:

$$\int \frac{1}{I}\frac{dI}{dt}dt = \int \sigma s dt \Rightarrow \int \frac{dI}{I} = \int \sigma s dt \Rightarrow \ln|I| = \sigma st + c,$$

ισοδύναμα έχουμε $e^{\ln|I|} = e^{\sigma st + c} \Rightarrow |I| = Ae^{\sigma st}$, όπου $A = e^{c}$ μια σταθερή ποσότητα.

Για τον υπολογισμό της σταθεράς:
Υποθέτουμε ότι οι επενδύσεις είναι θετικές άρα $I(t) = Ae^{\sigma st}$. Θέτοντας $t = 0$ παίρνουμε $I(0) = Ae^{\sigma s 0} = A$.

Συνεπώς η διαχρονική μεταβολή των επενδύσεων είναι:

$$I(t) = I(0)e^{\sigma st}$$

και δηλώνει ότι ισορροπία στην οικονομία υπάρχει μόνο όταν οι επενδύσεις μεταβάλλονται με έναν ορισμένο ρυθμό σs (τον οποίο ο Domar ονομάζει **απαιτούμενο**).

Το ερώτημα που έθεσε ο Domar είναι:
"Τι γίνεται όταν ο ρυθμός επενδύσεων (ρ) διαφέρει από τον απαιτούμενο (σs); "

Ο Domar διατυπώνει το πρόβλημα προσφεύγοντας στην έννοια του **βαθμού χρησιμοποίησης της παραγωγικής ικανότητας της οικονομίας**, η οποία ορίζεται ως: $u = \lim_{t\to+\infty}\frac{Y(t)}{Z(t)}$.

i. Αν $u = 1$, έχουμε **πλήρη χρήση της παραγωγικής ικανότητας της οικονομίας**. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $\rho = \sigma s$ και η οικονομία βρίσκεται σε ισορροπία.
ii. Αν $u > 1$ έχουμε **έλλειψη παραγωγικής ικανότητας** και $\rho > \sigma s$.
iii. Αν $u < 1$ έχουμε **υπερβάλλουσα παραγωγική ικανότητα** και $\rho < \sigma s$.

Αν ο ρυθμός αύξησης των επενδύσεων είναι ρ, τότε $I(t) = I(0)e^{\rho t}$. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο έχουμε: $\frac{dI}{dt} = \rho \cdot I(0) \cdot e^{\rho t}$.

Αντίστοιχα, $\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dI}{dt} = \frac{\rho}{s} I(0) \cdot e^{\rho t}$και $\frac{dZ}{dt} = \sigma I(t) = \sigma \cdot I(0) \cdot e^{\rho t}$.

Επομένως $\frac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dZ}{dt}} = \frac{\rho}{\sigma s}$.

Η τελευταία σχέση ποσοτικοποιεί την επίδραση των επενδύσεων στη ζήτηση και στην παραγωγική ικανότητα της οικονομίας για οποιαδήποτε στιγμή.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

I. Αν $\rho > \sigma s$τότε $\frac{dY}{dt} > \frac{dZ}{dt}$.

Με άλλα λόγια το παραγόμενο προϊόν είναι μεγαλύτερο από το δυνητικό κι επομένως στην οικονομία θα υπάρχει έλλειμμα παραγωγικής ικανότητας.
Το παράδοξο στην περίπτωση αυτή είναι ότι όταν οι επενδύσεις αυξάνονται με ρυθμό *υψηλότερο* από τον απαιτούμενο τότε παρατηρείται *έλλειμμα* παραγωγικής ικανότητας. Αν δεν επέμβουμε στις δυνάμεις της αγοράς, το αποτέλεσμα θα είναι ψηλότερες επενδύσεις κι άρα ακόμη μεγαλύτερο χάσμα ανάμεσα στο παραγόμενο προϊόν και στην παραγωγική δυνατότητα της οικονομίας. Συνεπώς, οι δυνάμεις της αγοράς από μόνες τους όχι μόνο διαιωνίζουν αλλά και χειροτερεύουν την αρχική ισορροπία.

II. Αν $\rho < \sigma s$τότε $\frac{dY}{dt} < \frac{dZ}{dt}$.

Δηλαδή η παραγωγική ικανότητα της οικονομίας είναι μεγαλύτερη από την απαιτούμενη.
Και πάλι είναι παράδοξο, ότι ενώ ο πραγματοποιούμενος ρυθμός επενδύσεων είναι *χαμηλότερος* από τον αναγκαίο, η παραγωγική ικανότητα της οικονομίας είναι ανώτερη από την απαιτούμενη για να παραχθεί το προϊόν. Αν η οικονομία αφεθεί στις δυνάμεις της αγοράς, τότε η υπερβάλλουσα παραγωγική ικανότητα της οικονομίας θα σημαίνει ότι απαιτείται ακόμη χαμηλότερος ρυθμός επενδύσεων και κατά συνέπεια η αρχική ισορροπία θα επιδεινωθεί.

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι *αν η οικονομία δεν είναι σε ισορροπία, τότε είναι απίθανο από μόνη της να ισορροπήσει*. Αν πάλι υποθέσουμε ότι η οικονομία βρίσκεται σε ισορροπία, δηλαδή $\rho = \sigma s$, τότε είναι βέβαιο ότι από μόνη της δεν μπορεί να τη διατηρήσει. Άρα, μόνο με εξωτερική παρέμβαση μπορούμε να έχουμε ισορροπία στην οικονομία. Μια τέτοια ισορροπία, ακριβώς επειδή είναι εξαιρετικά δύσκολο να επιτευχθεί, ακόμη κι αν έχουμε εξωτερική παρέμβαση, ονομάζεται, όχι αδικαιολόγητα, *ισορροπία στην κόψη του ξυραφιού*.

6.2 Το υπόδειγμα του Domar για το δημόσιο χρέος

Όταν οι κρατικές δαπάνες υπερβαίνουν τα φορολογικά και άλλα έσοδα που μπορεί να έχει ένα κράτος τότε λέμε ότι υπάρχει έλλειμμα στον κρατικό προϋπολογισμό. Το κράτος στην περίπτωση αυτή, προσφεύγει στο δανεισμό, κυρίως μέσω της έκδοσης κρατικών ομολόγων, έτσι ώστε να συμπληρώσει τα χρήματα που του υπολείπονται. Το έλλειμμα με άλλα λόγια μπορεί να θεωρηθεί ροή, όπως π.χ. η κατανάλωση ή το εισόδημα. Η συσσώρευση ελλειμμάτων οδηγεί στο δημόσιο χρέος που θεωρείται απόθεμα όπως π.χ. το απόθεμα κεφαλαίου. Το κράτος πρέπει να πληρώνει τόκους για την "εξυπηρέτηση" του χρέους του. Οι τόκοι πληρώνονται από τα φορολογικά και άλλα έσοδα της κυβέρνησης, εφόσον επαρκούν. Διαφορετικά είναι αναγκαίος ο επιπρόσθετος δανεισμός και όσο το κράτος δανείζεται για να καλύψει τα ελλείμματα τόσο το δημόσιο χρέος αυξάνει.

Ο Domar υποστηρίζει ότι το απόλυτο μέγεθος του δημόσιου χρέους και της απαιτούμενης φορολογίας για την πληρωμή των τόκων δεν έχουν και τόσο μεγάλη σημασία, όσο το μέγεθός τους σε σχέση με το εθνικό εισόδημα. Αν το εισόδημα αυξάνεται με υψηλούς ρυθμούς, τότε η υψηλή φορολογία μπορεί να γίνει αποδεκτή από τους πολίτες, επειδή και το εισόδημα τους έχει στο μεταξύ αυξηθεί.

Τα σύμβολα που θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω, στην παρουσίαση του υποδείγματος του Domar είναι τα εξής:

Yτο εθνικό εισόδημα
Dτο δημόσιο χρέος
iτο επιτόκιο αποπληρωμής του χρέους
$U = Di$οι τόκοι δημόσιου χρέους
$T = Y + U$το φορολογικό εθνικό εισόδημα
U/Tτο ποσοστό φορολογίας
$Y' = Y(1 - U/T)$το καθαρό εισόδημα μετά την πληρωμή των φόρων
Aτο εθνικό εισόδημα στην αρχή της περιόδου
ατο μερίδιο του εθνικού εισοδήματος που δανείζεται το κράτος
tο χρόνος

Ο Domar διακρίνει **τρεις** περιπτώσεις:

Περίπτωση Ι
Το εθνικό εισόδημα είναι στάσιμο, δηλαδή $Y(t) = A$.

Τότε $D = D_0 + \int_0^t \quad aY(t)dt = D_0 + aAt$.

Συμπεριλαμβανομένου και του μεριδίου του δημόσιου χρέους στο εθνικό εισόδημα, έχουμε:

$\frac{D}{Y} = \frac{D_0}{A} + at$και $\lim_{t\to+\infty} \frac{D}{Y} = +\infty$.

Ενώ ο λόγος των τόκων του δημόσιου χρέους ως προς το φορολογήσιμο εισόδημα είναι

$\frac{U}{T} = \frac{Di}{Y+Di} = \frac{1}{\frac{Y}{Di}+1}$και $\lim_{t\to+\infty} \frac{U}{T} = 1.$

Δηλαδή, οι τόκοι του δημόσιου χρέους μελλοντικά θα απορροφήσουν ολόκληρο το φορολογίσιμο εισόδημα.

Συνεπώς το καθαρό εισόδημα τείνει προς το μηδέν: $\lim_{t\to+\infty} Y' = Y(1 - \lim_{t\to+\infty} \frac{U}{T}) = 0.$

<u>Περίπτωση ΙΙ</u>
Το εθνικό εισόδημα αυξάνει γραμμικά $Y = A + bt.$

Τότε $D = D_0 + \int_0^t \quad aY(t)dt = D_0 + a\int_0^t (A + bt)\,dt = D_0 + at(A + \frac{b}{2}t)$

και ο λόγος του δημόσιου χρέους ως προς το εισόδημα είναι:

$\frac{D}{Y} = \frac{D_0+at(A+\frac{b}{2}t)}{a+bt}$

με $\lim_{t\to+\infty} \frac{D}{Y} = +\infty$και $\lim_{t\to+\infty} \frac{U}{T} = 1.$

Τέλος το καθαρό εισόδημα γράφεται $Y' = Y(1 - U/T) = \frac{Y^2}{Y+U}$και $\lim_{t\to+\infty} Y' = \frac{2b}{ai}.$

<u>Περίπτωση ΙΙΙ</u>
Το εθνικό εισόδημα αυξάνει εκθετικά με ετήσιο ρυθμό r,$Y = Y_0e^{rt} = Ae^{rt}.$

Τότε, $D = D_0 + \int_0^t \quad aY(t)dt = D_0 + \int_0^t \quad aAe^{rt}dt = D_0 + aA\frac{1}{r}(e^{rt} - 1).$

Αν πάρουμε τον λόγο του δημόσιου χρέους προς το εθνικό εισόδημα έχουμε:

$$\frac{D_t}{Y_t} = \frac{D_0}{Y_t} + \frac{\frac{aA}{r}(e^{rt} - 1)}{Y_t} = \frac{D_0}{Ae^{rt}} + \frac{a}{r}(1 - e^{-rt})$$

και για να μάθουμε τι θα συμβεί στο μέλλον παίρνουμε το όριο $\lim_{t\to+\infty} \frac{D_t}{Y_t} = \frac{a}{r}.$
Δηλαδή, αν το εισόδημα αυξάνει με σταθερό ετήσιο ρυθμό τότε το δημόσιο χρέος προσεγγίζει ένα όριο που εξαρτάται από το ρυθμό της σταθερής αύξησης του εθνικού εισοδήματος και από το ποσοστό του εθνικού εισοδήματος που δανείζεται η κυβέρνηση.

Επίσης θα έχουμε $\lim_{t\to+\infty} \frac{U}{T} = \frac{i}{\frac{r}{a}+i}.$

<u>Βιβλιογραφία</u>

1. Κορκοτσίδης Α. (1993) Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης, Τόμος Β' . Εκδόσεις Παπαζήση

2. Λουκάκη Μ. (1996) Μαθηματικά Οικονομικών Επιστημών, Τόμος Α' . Θεσσαλονίκη

3. Νεγρεπόντης Σ.&Γιωτόπουλος Σ.&Γιαννακούλιας Ε. (1999) Απειροστικός Λογισμός Ι. Εκδόσεις Συμμετρία

4. Ξεπαπαδέας Α.(2007) Μαθηματικές μέθοδοι στα οικονομικά: Θεωρία και Εφαρμογές, Τόμοι Α' . Εκδόσεις Gutenberg

5. Σαπουνάκης Α.&Φούντας Ε.(2008) Ανάλυση και Εφαρμογές, Τόμος Β'. Εκδόσεις Βαρβαρήγου

6. Τσίτσας Λ. (2002) Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός. Εκδόσεις Συμμετρία.

7. Τσουλφίδης Λ. (1999) Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης: Μέθοδοι και υποδείγματα. Gutenberg.

8. Chiang A. (1974) Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw-Hill Inc.

9. Spivak M.(2010) Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

10. Yammane T. (1965) Mathematics for Economists: An Elementary Survey. Prentice-Hall Inc

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Θεώρημα Μέσης Τιμής:

Αν μία συνάρτηση fείναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$και παραγωγίσιμη στο ανοικτό (α, β)τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Μελέτη συνάρτησης

Θεώρημα: Έστω μία συνάρτηση fη οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

i. Αν $f'(x) > 0$σε κάθε εσωτερικό σημείο xτου Δ, τότε η fείναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
ii. Αν $f'(x) < 0$σε κάθε εσωτερικό σημείο xτου Δ, τότε η fείναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Θεώρημα Fermat:
Έστω μία συνάρτηση fορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η fπαρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f'είναι μη μηδενική, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Επομένως, η πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης fσε ένα διάστημα Δ είναι :

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της fμηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η fδεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ. (αν ανήκουν στα σημεία του πεδίου ορισμού της)

Τα παραπάνω ονομάζονται **κρίσιμα σημεία** της f

Θεώρημα:
Έστω μία συνάρτηση fπαραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του, x_0, στο οποίο όμως η fείναι *συνεχής*.

i. Αν $f'(x) > 0$στο (α, x_0)και $f'(x) < 0$στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$είναι τοπικό μέγιστο της f.
ii. Αν $f'(x) < 0$στο (α, x_0)και $f'(x) > 0$στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$είναι τοπικό ελάχιστο της f.
iii. Αν η $f'(x)$διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$δεν είναι τοπικό ακρότατο και η fείναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Θεώρημα:
Έστω μία συνάρτηση fσυνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

i. Αν $f''(x) > 0$για κάθε εσωτερικό σημείο xτου Δ, τότε η fείναι κυρτή στο Δ.
ii. Αν $f''(x) < 0$για κάθε εσωτερικό σημείο xτου Δ, τότε η fείναι κοίλη στο Δ.