ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ (Πάτρα)

Τίτλος Εργασίας Σχεδιασμός και ανάλυση έρευνας οικονομικών θεμάτων

Πτυχιακή Εργασία *των* **Μαρία Δημακοπούλου- Ιωάννης Τσάλλας**

Επιβλέπων: **Παπαπετρόπουλος Πέτρος**

ΠΑΤΡΑ 2016

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<u>ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ: Πρακτικό μέρος (εφαρμογή σε συγκεκριμένα εταιρικά προβλήματα)</u>

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1.1 Στόχος της πτυχιακής εργασίας

Στην συγκεκριμένη πτυχιακή εργασία, θα μελετήσουμε διεξοδικά την χρήση μαθηματικών εργαλείων σε παραδείγματα επιχειρήσεων. Θα δούμε πως σε όλα τα στάδια της παραγωγής καθώς και της πώλησης μπορούμε να βελτιώσουμε τα αποτελέσματα της επιχείρησης μέσω εύρεσης καλύτερων εναλλακτικών. Ειδικότερα η χρήση ερωτηματολογίων καθώς και η ανάλυση αυτών θα μας προσφέρουν χρήσιμα συμπεράσματα για τις επιχειρήσεις μας. Στη συνέχεια μια σειρά μεθόδων βελτιστοποίησης θα μας οδηγήσει στην επιλογή των καλύτερων δυνατών στρατηγικών ώστε να μεγιστοποιήσουμε την κερδοφορία ή να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος. Για την επίτευξη όλων των παραπάνω θα δημιουργήσουμε μία μεθοδολογία η οποία θα αποτελείται από 4 βασικά μέρη.

1.1.2 Μεθοδολογία

Η μελέτη μας θα χωριστεί σε 4 βασικά μέρη

- Έρευνα Αγοράς
  Στο κομμάτι της έρευνας αγοράς, θα ξεκινήσουμε, κάνοντας μια μελέτη των αναγκών της αγοράς, της οποίας απευθυνόμαστε σαν εταιρεία. Θα γίνει μια δειγματοληπτική διαδικασία, στην οποία θα υπάρχουν ερωτηματολόγια και τα οποία, θα έχουν σαν σκοπό, να απαντήσουν σε βασικά ερωτήματά μας. Τα ερωτήματα αυτά αφορούν, το ποιες είναι οι ανάγκες της αγοράς στην οποία απευθύνεται το προϊόν μας, ποιές είναι οι προτιμήσεις της, το μέγεθος της ζήτησης, και άλλα.

- Προδιαγραφές
  Οι προδιαγραφές, μπορούν να προέρχονται από δύο πηγές. Από την ίδια την εταιρία, η οποία θέτει κάποιες προδιαγραφές για το δικό της προϊόν αλλά και

κατά δεύτερο λόγο, από το πελατολόγιο της εταιρίας, το οποίο μπορεί να απαιτεί συγκεκριμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά, για τα προϊόντα τα οποία αγοράζει. Σε αυτή την περίπτωση, θα πρέπει να γίνει λεπτομερής καταγραφή, όλων των προδιαγραφών που υπάρχουν-είτε αυτές είναι από την εταιρία είτε προέρχονται από το πελατολόγιο- . Όπως είναι αντιληπτό, θα πρέπει να γίνει σωστή επιλογή προδιαγραφών και εύρους προδιαγραφών, όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω, καθώς, όσο πιο ποιοτικό ένα προϊόν, τόσο πιο κοστολόγο είναι για την εταιρία. Κατά συνέπεια, δεν μπορούμε να απαιτήσουμε τις μέγιστες προδιαγραφές, αν αυτές δεν απαιτούνται είτε από την εταιρία είτε από κάποιον αγοραστή, διότι εμάς μας ενδιαφέρει να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος παραγωγής.

- Παραγωγή

  Κατά την διαδικασία παραγωγής, υπάρχει περίπτωση κάποια μηχανήματα, να μην μπορούν να ικανοποιήσουν τις προδιαγραφές, τις οποίες έχουμε ορίσει νωρίτερα. Εκεί, θα πρέπει να γίνει μια δειγματοληπτική διαδικασία, στην οποία θα πρέπει να βρούμε, τι ποσοστό των προϊόντων που παράγουμε, πρέπει να οδηγηθούν σε καταστροφή ή αποσυναρμολόγηση, ούτως ώστε να ξαναγίνουν καινούρια, και με τις κατάλληλες προδιαγραφές. Αυτό όμως, έρχεται και προστίθεται στο κομμάτι του κόστους, οπότε θα πρέπει να μελετήσουμε το ενδεχόμενο, του αν μας συμφέρει μια νέα επένδυση, ώστε να αγοραστούν καλύτερα μηχανήματα, από αυτά που αρχικά είχαμε.

- Πώληση

  Τέλος, στο κομμάτι της πώλησης, θα πρέπει να αποφασίσουμε, ποια θα ήταν η βέλτιστη επιλογή τιμής, έτσι ώστε και το προϊόν μας να είναι ανταγωνιστικό, αλλά και να μπορούμε να μεγιστοποιήσουμε το πιθανό κέρδος της εταιρίας.

1.2 Ορισμοί και βασικά μαθηματικά εργαλεία

1.2.1 Βασικοί ορισμοί

Στατιστική είναι η επιστήμη που συλλέγει, παρουσιάζει, αναλύει και ερμηνεύει στατιστικά δεδομένα. Δεδομένα, δηλαδή, που αναφέρονται σε κάποιο χαρακτηριστικό (ύψος, βάρος, τιμή, θερμοκρασία) των μονάδων οι οποίες συνιστούν έναν πληθυσμό (κάτοικοι μίας περιοχής, σωλήνες ενός εργοστασίου, παγωτά μίας εταιρίας).

Η στατιστική ασχολείται με δύο τύπους προβλημάτων:
Α) Συγκέντρωση, περιγραφή και διερεύνηση των δεδομένων (Περιγραφική Στατιστική).
Β) Μελέτη της φύσης του συνόλου του πληθυσμού, ξεκινώντας από ένα μέρος (δείγμα) του συνόλου του πληθυσμού (Στατιστική Συμπερασματολογία).

Ορισμός
Περιγραφική Στατιστική είναι ο κλάδος της στατιστικής που ασχολείται με την οργάνωση, συγκέντρωση και περιγραφή ενός συνόλου δεδομένων. Στην στατιστική, το σύνολο των δεδομένων το οποίο μας απασχολεί λέγεται πληθυσμός. Ο πληθυσμός μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος.

- Πολλές φορές είναι αδύνατο να συγκεντρωθούν πληροφορίες για ολόκληρο τον πληθυσμό είτε γιατί είναι πρακτικά αδύνατο (τα νερά ενός ποταμού) ή γιατί κοστίζει πολύ ή γιατί είναι χρονοβόρο (κάτοικοι μιας χώρας). Σ' αυτές τις περιπτώσεις εκλέγεται από τον πληθυσμό ένα δείγμα και από αυτό μελετάται η φύση του πληθυσμού.

- Τα δεδομένα του δείγματος μπορεί να είναι ποσοτικά (π.χ. αριθμός παιδιών) ή ποιοτικά (κατηγορηματικά) (π.χ. μάρκα αυτοκινήτου)

- Οι ποσοτικές μεταβλητές είναι αυτές που μπορούν με κάποιον τρόπο να μετρηθούν (ποσοτικοποιηθούν) και χωρίζονται με την σειρά τους σε δύο υποκατηγορίες ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν. Τις διακριτές (π.χ. αριθμός παιδιών) και τις συνεχείς (π.χ. διάρκεια ζωής μίας λάμπας)

1.2.2 Γραφικές μέθοδοι παρουσίασης στατιστικών στοιχείων

Ορισμός

Ο αριθμός των παρατηρήσεων που ανήκουν σε μία κατηγορία ονομάζεται συχνότητα (v_i) της κατηγορίας, ενώ η αναλογία του αριθμού των παρατηρήσεων μιας κατηγορίας ως προς τον συνολικό αριθμό των παρατηρήσεων του δείγματος ονομάζεται σχετική συχνότητα (f_i) της κατηγορίας.

Ο συνηθέστερος τρόπος για την παρουσίαση – περιγραφή ποιοτικών δεδομένων είναι μέσω

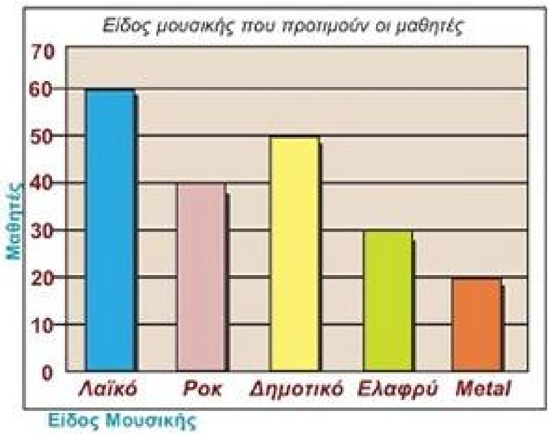
i. Ραβδογράμματος (Bar Chart)
ii. Τομεογράμματος ή κυκλικού διαγράμματος (PieChart)

Ο συνηθέστερος δε τρόπος για την παρουσίαση – περιγραφή ποσοτικών δεδομένων είναι μέσω ιστογράμματος συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων.

Ραβδόγραμμα

Το ραβδόγραμμα περιγράφει την συχνότητα ή την σχετική συχνότητα μίας κατηγορίας με ένα ευθύγραμμο τμήμα ή ένα ορθογώνιο, ύψους ίσου με τη συχνότητα της αντίστοιχης κατηγορίας.

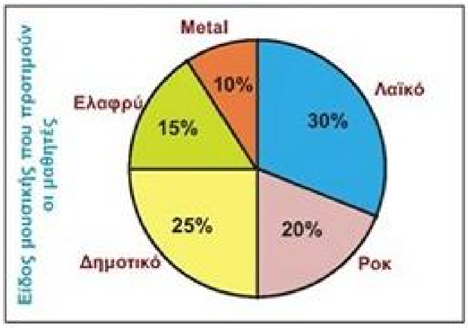
Παράδειγμα



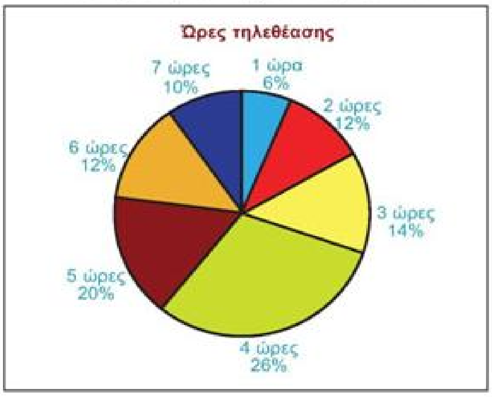
Τομεόγραμμα ή Κυκλικό Διάγραμμα

Το κυκλικό διάγραμμα περιγράφει το ποσοστό του συνολικού αριθμού παρατηρήσεων που περιέχει κάθε κατηγορία, διαιρώντας ένα κύκλο σε κυκλικούς τομείς έτσι ώστε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα να είναι ίσο με τη συχνότητα της αντίστοιχης κατηγορίας.

Παραδείγματα



Εβδομαδιαίες ώρες τηλεθέασης
των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου



Υπολογισμός γωνιών κυκλικού διαγράμματος

Τιμές	Γωνία
1	$\frac{3}{50} \cdot 360° = 21{,}6°$
2	$\frac{6}{50} \cdot 360° = 43{,}2°$
3	$\frac{7}{50} \cdot 360° = 50{,}4°$
4	$\frac{13}{50} \cdot 360° = 93{,}6°$
5	$\frac{10}{50} \cdot 360° = 72°$
6	$\frac{6}{50} \cdot 360° = 43{,}2°$
7	$\frac{5}{50} \cdot 360° = 36°$
Άθροισμα	360°

Ιστόγραμμα

Το ιστόγραμμα είναι μια γραφική απεικόνιση συχνοτήτων των τιμών ενός μεγέθους και σχηματίζεται από ορθογώνια όπως και το ραβδόγραμμα. Το ύψος κάθε ορθογωνίου ισούται με το λόγο της συχνότητας προς το εύρος των τιμών που αντιπροσωπεύει το ορθογώνιο. Πρόκειται για τη συνηθέστερη επιλογή γραφικής παράστασης συνεχών μεταβλητών. Στα συνεχή δεδομένα, οι τιμές της μεταβλητής ομαδοποιούνται και οι ομάδες (κλάσεις) διατάσσονται στον οριζόντιο άξονα κατά αύξουσα σειρά. Στη συνέχεια από κάθε ομάδα υψώνουμε ορθογώνια ,το ύψος των οποίων αντιστοιχεί στη συχνότητα κάθε ομάδας.

Βήματα κατασκευής Ιστογράμματος

Βήμα 1ο

Υπολογίζουμε το εύρος του δείγματος.

Βήμα 2ο

Διαιρούμε αυτό το εύρος με το πλήθος των ομάδων που θέλουμε να δημιουργήσουμε. Ο αριθμός που προκύπτει είναι το κοινό πλάτος όλων των κλάσεων που δημιουργηθούν.

Βήμα 3ο

Υπολογίζουμε τη συχνότητα κάθε τάξης, δηλαδή τον αριθμό των παρατηρήσεων που ανήκουν στην κλάση.

Βήμα 4ο

Υπολογίζουμε τη σχετική συχνότητα κάθε κλάσης, δηλαδή το πηλίκο της συχνότητας δια το συνολικό πλήθος των παρατηρήσεων του δείγματος.

Βήμα 5ο

Τοποθετούμε τις κλάσεις, τις αντίστοιχες συχνότητες και σχετικές συχνότητες σ’ έναν πίνακα που καλείται πίνακας συχνοτήτων

Βήμα 6ο

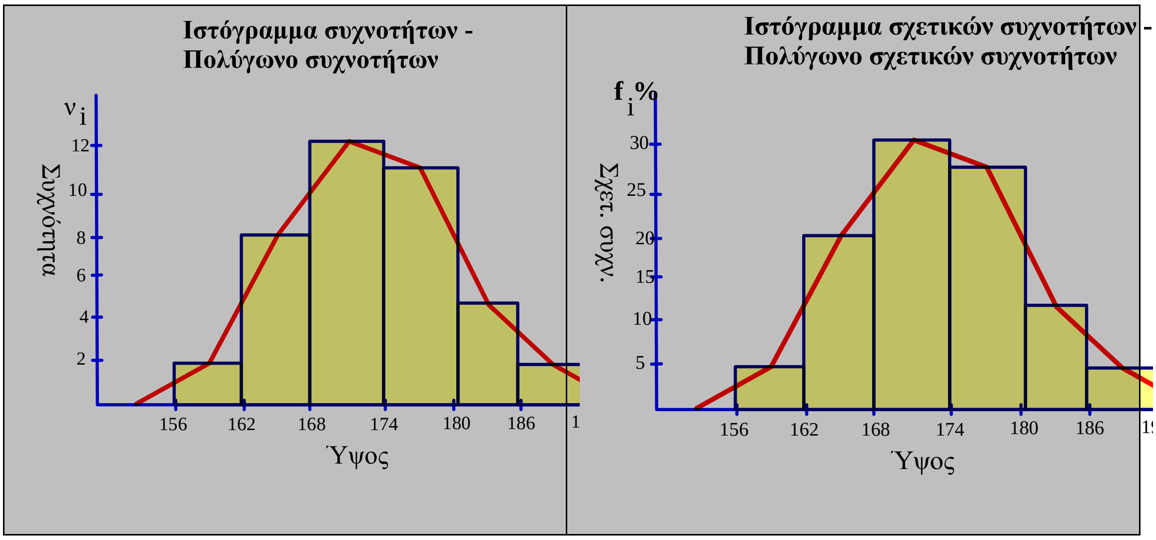
Κατασκευάζουμε τέλος το ιστόγραμμα. Στον οριζόντιο άξονα μπαίνουν τα άκρα των κλάσεων και στον κατακόρυφο οι συχνότητες (ή σχετικές συχνότητες).

<u>Παράδειγμα</u>

Στον παρακάτω πίνακα έχει καταγραφεί το ύψος των 40 μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου

170	180	178	165	170	168	175	175	173	162
160	170	167	177	180	170	182	178	165	178
156	175	172	173	167	187	170	180	178	**191**
176	169	167	166	179	178	180	164	170	173

Κλάσεις [-)	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
[156 - 162)	2	5
[162 - 168)	8	20
[168 - 174)	12	30
[174 - 180)	11	27.5
[180 - 186)	5	12.5
[186 - 192)	2	5
	40	100



<u>Ορισμός</u>

Η κατανομή πολλών δεδομένων σε κλάσεις ονομάζεται ομαδοποίηση δεδομένων.

Ο αριθμός των κλάσεων που θα δημιουργηθούν δεν είναι ορισμένος και εξαρτάται από το πλήθος των παρατηρήσεων που έχουμε. Ενδεικτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω πίνακα:

Μέγεθος δείγματος ν	**Αριθμός κλάσεων κ**	**Μέγεθος δείγματος ν**	**Αριθμός κλάσεων κ**
<20	5	200 – 400	9
20 – 50	6	400 – 700	10
50 – 100	7	700 – 1000	11
100 – 200	8	≥1000	12

Όταν το πλήθος των κλάσεων είναι μεγάλο και το πλάτος κάθε κλάσεις είναι μικρό, το ιστόγραμμα όλων των μετρήσεων για πρακτικούς λόγους παριστάνεται με μια γραμμή. Μια προσέγγιση αυτής της γραμμής μπορεί να κατασκευασθεί αν ενωθούν τα διαδοχικά μέσα των πάνω βάσεων των ορθογωνίων του ιστογράμματος. Η τεθλασμένη αυτή γραμμή λέγεται πολύγωνο συχνοτήτων ή πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων ανάλογα με το είδος του ιστογράμματος που έχουμε κατασκευάσει.

<u>Ορισμός</u>

Αθροιστική συχνότητα F_κ μιας τάξης κ, ονομάζεται το άθροισμα των συχνοτήτων όλων των i-τάξεων , $i = 1,2,\ldots,\kappa$, δηλαδή $\sum_{i=1}^{\kappa} f_i$.

<u>Ορισμός</u>

Σχετική αθροιστική συχνότητα μίας τάξης, ονομάζεται το πηλίκο της αθροιστικής συχνότητας της τάξης προς το σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος.

1.2.3 Τυχαίες μεταβλητές-πιθανότητες

Ορισμός

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος για ένα πείραμα τύχης. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι σε κάθε ενδεχόμενο Α του Ω αντιστοιχείται ένας πραγματικός αριθμός P(A). Αν η P(·) ικανοποιεί τα επόμενα τρία αξιώματα, θα ονομάζεται πιθανότητα στο δειγματικό χώρο Ω ενώ ο αριθμός P(A) θα λέγεται πιθανότητα του ενδεχομένου Α.

1) P(A)≥0 για κάθε ενδεχόμενο Α του Ω
2) P(Ω)=1
3) Αν $A_1, A_2, A_3, \ldots$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο ενδεχομένων του Ω (δηλαδή $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$), τότε

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\,(A_i)$$

Ορισμός

Γενικά, κατά τη μελέτη ενός πειράματος τύχης, μπορεί κανείς να αντιστοιχεί σε κάθε αποτέλεσμά του (δειγματικό σημείο) έναν αριθμό, χρησιμοποιώντας έναν προκαθορισμένο κανόνα αντιστοίχισης. Με άλλα λόγια υπάρχει η δυνατότητα εισαγωγής μιας συνάρτησης X(·) η οποία σε κάθε σημείο ω του δειγματικού χώρου Ω να αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό X(ω). Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται τυχαία μεταβλητή.

Οι τυχαίες μεταβλητές θα παίξουν σημαντικό ρόλο στα επόμενα κεφάλαια, καθώς μέσω αυτών, θα ορίσουμε όλες τις κατανομές που θα χρησιμοποιήσουμε (βλ. Κεφάλαιο 1.4.2).

Οι τυχαίες μεταβλητές χωρίζονται με την σειρά τους σε δύο υποκατηγορίες, τις διακριτές και τις συνεχείς, ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν. Π.χ. ο αριθμός των παγωτών που μια εταιρία πούλησε, είναι διακριτή μεταβλητή, ενώ η διάμετρος των σωλήνων που ένα εργοστάσιο παράγει είναι συνεχής.

1.3 ΕΡΕΥΝΑ ΑΓΟΡΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με μεθόδους συλλογής στατιστικών στοιχείων, με δειγματοληπτικές μεθόδους, με την τεχνική των στατιστικών δειγματοληπτικών ερευνών, με τις μεθόδους διενέργειας μιας δειγματοληψίας, με την επεξεργασία που πρέπει στη συνέχεια να γίνει, στα στατιστικά αυτά στοιχεία και επιπλέον, θα δώσουμε το μαθηματικό υπόβαθρο όλων των παραπάνω. Στη συνέχεια, θα πρέπει να γίνει μια παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων που έχουμε συλλέξει και να υπάρξει μια στατιστική έκθεση ή αναφορά, των αποτελεσμάτων-συμπερασμάτων στα οποία εμείς έχουμε καταλήξει από την ανάλυση μας.

1.3.1 Συλλογή στατιστικών στοιχείων

Πηγές συλλογής στατιστικών στοιχείων

Το πρώτο και βασικότερο στάδιο για τη μελέτη ενός φαινομένου, με τη βοήθεια της Στατιστικής, είναι η συγκέντρωση των στατιστικών στοιχείων για το φαινόμενο που μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε και να αναλύσουμε. Το στάδιο αυτό χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή και φροντίδα, γιατί από την αξία των στοιχείων θα συγκεντρωθούν θα εξαρτηθεί η αξία των στατιστικών συμπερασμάτων. Αν τα στοιχεία είναι ψεύτικα ή λαθεμένα, είναι φανερό ότι και η αξία της στατιστικής τους ανάλυσης θα είναι και αυτή ψεύτικη ή λαθεμένη.

1.3.2 Δειγματικές μέθοδοι

Μέθοδοι συλλογής στατιστικών στοιχείων

Για τη συλλογή στατιστικών στοιχείων εφαρμόζονται διάφορες μέθοδοι, από τις οποίες σπουδαιότερες είναι η απογραφή, η δειγματοληπτική μέθοδος και η μέθοδος των συνεχών εγγραφών.

Η απογραφή

Η απογραφή συνίσταται στη συγκέντρωση στοιχείων από όλες τις στατιστικές μονάδες του πληθυσμού που επιθυμούμε να μελετήσουμε.

Δειγματοληπτική μέθοδος

Αντίθετα με τη γενική απογραφή, αν ο πληθυσμός που θέλουμε να μελετήσουμε από την άποψη ορισμένων ιδιοτήτων, αποτελείται από μεγάλο πλήθος στατιστικών μονάδων, εφαρμόζουμε τη μέθοδο της δειγματοληψίας, που συνίσταται στην προσπάθεια να γνωρίσουμε όλες τις ιδιότητες ενός πληθυσμού, εξετάζοντας από αυτόν μόνο ένα δείγμα, το οποίο επιλέγουμε κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι πληροφορίες, οι εκτιμήσεις και τα συμπεράσματα που θα λάβουμε από αυτό να έχουν ισχύ για το σύνολο του πληθυσμού στον οποίο ανήκει το δείγμα.

Συνεχείς εγγραφές στατιστικών στοιχείων

Ο τρόπος αυτός αποβλέπει στη συνεχή καταχώρηση των στατιστικών στοιχείων σε ειδικά βιβλία ή έντυπα μόλις αυτά εμφανιστούν. Ως τέτοια παραδείγματα μπορούμε να αναφέρουμε τις καταχωρήσεις, σε ειδικά βιβλία στο ληξιαρχείο, των γεννήσεων, των θανάτων και των γάμων.

Σημείωση:

Από τις παραπάνω τρεις στατιστικές μεθόδους συλλογής στατιστικών στοιχείων, εμείς θα χρησιμοποιήσουμε κυρίως την δειγματοληψία. Για τον λόγο αυτό, γίνεται εκτενέστερη ανάλυση της μεθόδου αυτής παρακάτω.

<u>Βασικές Έννοιες Θεωρίας Δειγματοληψίας</u>

1. Δειγματοληπτική μέθοδος ή δειγματοληπτικό σχήμα ή δειγματοληψία : η διαδικασία επιλογής δείγματος

2. Δειγματοληπτική μονάδα ή μονάδα : Κάθε στοιχείο του πληθυσμού

3. Μέγεθος πληθυσμού : πλήθος των στοιχείων του πληθυσμού (πεπερασμένος) N

4. Μέγεθος δείγματος : πλήθος των στοιχείων του δείγματος , n

5. Δειγματοληπτικό κλάσμα : $f = n/N$ (fraction)

6. Παράμετρος πληθυσμού : Κάθε συνάρτηση των $U_1, \ldots, U_N$
   Συγκεκριμένες Παράμετροι :

   Α) $\mu = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} U_j$: μέση τιμή του U στον πληθυσμό ή μέση τιμή του πληθυσμού

   Β) $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(U_j - \mu)^2$: διασπορά του U στον πληθυσμό ή διασπορά του πληθυσμού (δείκτης του πόσο διαφορετικές είναι οι τιμές του U στον πληθυσμό)

   Γ) $\tau = \sum_{j=1}^{N} U_j$: ολική τιμή του U στον πληθυσμό

   Ισχύει $\tau = N\mu$

7. X_i= η τιμή του U για την i μονάδα του δείγματος $i = 1,2, \ldots, n$
   Τα $X_1, \ldots, X_N$ είναι τ.μ. με τιμές $U_1, \ldots, U_N$ (πριν την επιλογή του δείγματος)

8. Συναρτήσεις των $X_1, \ldots, X_N$ αναφέρονται ως σ.σ. και χρησιμοποιούνται για εκτίμηση παραμέτρων

Συγκεκριμένοι εκτιμητές :

(i)$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$: δειγματικός μέσος ή μέση τιμή του U στο δείγμα (για την εκτίμηση του μ)

(ii) $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$: δειγματική διασπορά (για την εκτίμηση του $\sigma_0^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(U_j - \mu)^2$ ή του σ^2 ανάλογα με την δειγματοληπτική μέθοδο)

(iii)$\hat{\tau} = N\bar{X}$ (εκτιμητής της ολικής τιμής)

Ορισμός:

Α.Τ.Δ. είναι η δειγματοληπτική μέθοδος στην οποία καθένα από τα δυνατά δείγματα -$\binom{N}{n}$το πλήθος- έχει την ίδια πιθανότητα επιλογής, δηλαδή$\frac{1}{\binom{N}{n}}$

Πρόταση:

Η πιθανότητα η jμονάδα του πληθυσμού να συμπεριληφθεί στο δείγμα είναι ίση προς το δειγματοληπτικό κλάσμα f, "j=1,2,…,N

Ορισμός :

Τυχαία Δειγματοληψία με Επανάθεση (Τ.Δ.Ε.) είναι η δειγματοληπτική μέθοδος στην οποία καθένα από τα N^n δείγματα μεγέθους n έχει την ίδια πιθανότητα επιλογής, δηλαδή $\frac{1}{N^n}$

Κλείνοντας, τα δεδομένα που έχουμε συλλέξει μέσω των δειγματοληπτικών μεθόδων, επεξεργάζονται (ώστε να αφαιρεθούν πιθανές λανθασμένες-ελλιπείς μετρήσεις) και στη συνέχεια παρουσιάζονται είτε πινακοποιημένες είτε σε κάποια από τις μορφές που αναφέραμε στο κεφάλαιο 1.2.2.

1.4 ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΕΣ

Στο κομμάτι των προδιαγραφών, θα πρέπει να αναλύσουμε από μαθηματικής πλευράς, το τι εστί προδιαγραφές. Θα αναλύσουμε τις έννοιες της μέσης τιμής, της διασποράς, της επικρατούσας τιμής, της μέσης απόκλισης, καθώς και την έννοια του εύρος μιας μεταβλητής. Θα δώσουμε επίσης, κάποια επιπλέον στοιχεία, όπως είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας και η μέση διαφορά του Γκίνι, με σκοπό, να γίνουν κατανοητές οι προδιαγραφές, που η εταιρία ή οι πελάτες της εταιρίας, ζητούν για τα προϊόντα τους. Κατόπιν, θα πρέπει να κατασκευαστεί ένα ερωτηματολόγιο ή να δημιουργηθεί μια γενική έρευνα αγοράς, η οποία θα μας δώσει ακριβώς, τα συγκεκριμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά.

1.4.1 Παράμετροι Μονομεταβλητών Πληθυσμών

Για την επεξεργασία των δεδομένων χρειάζονται ορισμένα χαρακτηριστικά στατιστικά μέτρα που καλούνται για τον πληθυσμό παράμετροι της κατανομής ενώ για το δείγμα στατιστικά. Οι παράμετροι αυτοί χωρίζονται σε μέτρα θέσης (ή μέτρα κεντρικής τάσης) , μέτρα διασποράς (ή μέτρα μεταβλητότητας) και μέτρα ασυμμετρίας. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με τα μέτρα θέσης και τα μέτρα διασποράς.

Μέτρα θέσης ή κεντρικής τάσης

- **Μέση τιμή $\bar{x}$**

  Δειγματική μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων x_1, x_2, …, x_n ονομάζεται η τιμή που προκύπτει από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

  Η δειγματική μέση τιμή συμβολίζεται με $\bar{x}$ και είναι μία εκτίμηση της μέσης τιμής του πληθυσμού μ.

Αν τα δεδομένα μας είναι ομαδοποιημένα σε κ κλάσεις, με κεντρικές τιμές x_i και αντίστοιχες συχνότητες f_i , τότε ο δειγματικός μέσος δίνεται από τον τύπο:

$$\sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i \Big/ \sum_{i=1}^{\kappa} f_i$$

Σε ομαδοποιημένες παρατηρήσεις, γνωρίζουμε μόνο ότι ανάμεσα στα όρια της i–κλάσης υπάρχουν f_i παρατηρήσεις χωρίς να ξέρουμε τις αντίστοιχες τιμές τους. Θεωρούμε λοιπόν ότι όλες οι παρατηρήσεις έχουν την κεντρική τιμή της κλάσης η οποία ορίζεται ως το ημιάθροισμα των δύο άκρων της κλάσης.

- **Διάμεσος δ**

Διάμεσος ενός πεπερασμένου συνόλου τιμών μίας μεταβλητής ή παρατηρήσεων είναι εκείνη η τιμή που χωρίζει το σύνολο σε δύο ίσα μέρη. Δηλαδή είναι η μεσαία μέτρηση όταν οι παρατηρήσεις μας διαταχθούν σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά.

Εάν το πλήθος των παρατηρήσεων n είναι περιττό τότε η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή. Εάν το n είναι άρτιος τότε δ = ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

Εάν τώρα έχουμε ομαδοποιημένες παρατηρήσεις η διάμεσος δίνεται από τον τύπο:

$$\delta = L_i + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} c$$

όπου L_i= το αριστερό άκρο της κλάσης στην οποία βρίσκεται η διάμεσος

n = το πλήθος των παρατηρήσεων

$F_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} f_j$ το άθροισμα των συχνοτήτων μέχρι την προηγούμενη κλάση

c = το εύρος της κλάσης

- **Κορυφή ή Τύπος ή Επικρατούσα Τιμή M_0**

Κορυφή ορίζεται να είναι η τιμή εκείνη της μεταβλητής στην οποία αντιστοιχεί η μεγαλύτερη συχνότητα των παρατηρήσεων.

Σε ομαδοποιημένες παρατηρήσεις η κορυφή δίνεται από τον τύπο:

$$M_0 = L_i + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} c$$

όπου $\Delta_1 = f_i - f_{i-1}$

$\Delta_2 = f_i - f_{i+1}$

Παρατήρηση: Το σημαντικότερο από τα μέτρα θέσης είναι η μέση τιμή γιατί χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του όλες τις πληροφορίες του δείγματος. Επηρεάζεται όμως πολύ από τις ακραίες τιμές. Η διάμεσος και η κορυφή δεν επηρεάζονται από ακραίες τιμές, γι' αυτό και πολλές φορές χαρακτηρίζονται ως ανθεκτικό μέτρο κεντρικής τάσης, όμως δεν χρησιμοποιούν στον υπολογισμό τους όλες τις δεδομένες τιμές.

<u>Μέτρα Διασποράς ή Μεταβλητότητας</u>

Στα μέτρα διασποράς ανήκουν όλα εκείνα τα στατιστικά που αναφέρονται στο "άπλωμα" της κατανομής.

Τα σημαντικότερα μέτρα διασποράς είναι το εύρος, η διασπορά, η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβλητότητας.

- **Εύρος δείγματος**

  Εύρος δείγματος ονομάζεται η διαφορά ανάμεσα στη μεγαλύτερη και στη μικρότερη τιμή του.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

- **Διασπορά Δείγματος ή Δειγματική Διασπορά**

  Διασπορά δείγματος n μετρήσεων $x_1, x_2, \ldots, x_n$ για μη ομαδοποιημένα δεδομένα ονομάζεται η τιμή που προκύπτει από τον τύπο:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

όπου $\bar{x}$ο δειγματικός μέσος

Ενώ για ομαδοποιημένα η τιμή:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{\kappa} f_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{\kappa} f_i x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

όπου $\bar{x}$ο δειγματικός μέσος (από τον τύπο υπολογισμού για ομαδοποιημένα δεδομένα) x_i το κέντρο τηςi κλάσης, f_i η αντίστοιχη συχνότητα και κ το πλήθος των κλάσεων

- **Τυπική απόκλιση**

Τυπική απόκλιση δείγματος ή εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα, ονομάζεται η θετική τετραγωνική ρίζα της δειγματικής διασποράς:

$$s = \sqrt{s^2}$$

είτε μιλάμε για μη ομαδοποιημένα δεδομένα είτε για ομαδοποιημένα.

- **Συντελεστής Μεταβλητότητας**

Συντελεστής μεταβλητότητας (coefficientvariation) λέγεται ο λόγος της δειγματικής τυπικής απόκλισης προς το δειγματικό μέσο, δηλαδή:

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος από μονάδες μέτρησης και χαρακτηρίζει ένα δείγμα σαν ομογενές όταν η τιμή του είναι το πολύ 10%.

1.4.2 Κατανομές-Μέσες Τιμές-Διασπορές

Εισαγωγικά

Συνάρτηση πυκνότητας – πιθανότητας και κατανομής (*f(x), F(x)*)

Διακριτές τ.μ.	Συνεχείς τ.μ.
f(x): Συνάρτηση Πιθανότητας	*f(x)*:Συνάρτηση Πυκνότητας
F(x): Αθροιστική Συνάρτηση ή Συνάρτηση	*F(x)*: Συνάρτηση Κατανομής

Ιδιότητες της *f(x)*:

1. *f(x)*> 0
2. $\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Ιδιότητες της *F(x)*:

1. $F(x)\ \nearrow$
2. $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1\ \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
3. Είναι από δεξιά συνεχής

Μέση τιμή

Συμβολισμός: *E(X), EX*, μ, μ_X

Ερμηνεία: Η *E(X)* παριστάνει τον μέσο όρο των δυνατών τιμών της τ.μ. *X*

Ονομασία: Μέση Τιμή ή Αναμενόμενη τιμή ή Μαθηματική Ελπίδα

Υπολογισμός

Διακριτές	Συνεχείς
$$E(X) = \sum_{x\in\mathbb{R}} xf(x)$$	$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$E(g(X)) = \sum_{x \in \mathbb{R}} g(x)f(x)$	$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

Προσοχή η μέση τιμή στην διακριτή περίπτωση δεν ανήκει αναγκαστικά στο $\mathbb{R}_X$. Για παράδειγμα ο μέσος αριθμός παιδιών ανά οικογένεια στην Ελλάδα είναι 1.5

Ιδιότητες Μέσης Τιμής

1. $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. Αν $X \geq 0 \;\Rightarrow\; E(X) \geq 0 \qquad \pi.\chi. E(X^2) \geq 0$
3. Αν $X \geq Y \;\Rightarrow\; E(X) \geq E(Y)$
4. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

Διασπορά

Συμβολισμός: *Var(X), Var(X),* σ^2, σ_X^2

Ορισμός: $Var(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$=η μέση τετραγωνική απόκλιση της X από τη μέση τιμή της X

Υπολογισμός: $Var(X) = E(X^2)-(E(X))^2$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X-\mu)^2] = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = E(X^2) - E(2X\mu) + E(\mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \\ &= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \end{aligned}$$

Ποτέ δεν υπολογίζουμε τη διασπορά μέσω του τύπου του ορισμού.

Ιδιότητες

1. $Var(X) \geq 0$ *για κάθε τ.μ. X*
2. $Var(\alpha X+\beta) = \alpha^2 Var(X)$

Προσοχή: Στα *f(x)* και *F(x)* το x είναι μικρό γιατί εννοούμε τιμή, ενώ στα *E(X)* και *Var(X)* το *X* είναι κεφαλαίο γιατί εννοούμε τ.μ..

<u>Διακριτές:</u> Διωνυμική

Η διωνυμική κατανομή είναι οι πανεξάρτητες επαναλήψεις πειραμάτων Bernoulliμε την ίδια πιθανότητα επιτυχίας ρ και η συνάρτηση πιθανότητάς της μας δίνει την πιθανότητα να έχουμε χεπιτυχίες.

Μια τ.μ. Χ όταν θα ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και ρ θα συμβολίζεται με Χ~Β(n,ρ)

<u>Παράδειγμα 1</u>

Η πιθανότητα αν ρίξω 10 φορές ένα κέρμα να φέρω 3 φορές κορώνα.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Η πιθανότητα αν ρίξω 20 σουτ να βάλω τα 15.

<u>Παράδειγμα 3</u>

Η πιθανότητα αν ρίξω 10 πέναλτι να βάλω 6 γκολ.

Έστω Χ~Β(10,ρ)

f(5) = η πιθανότητα στις 10 προσπάθειες να έχω 5 επιτυχίες.

f(0) = η πιθανότητα στις 10 προσπάθειες να μην έχω καμία επιτυχία.

f(10) =η πιθανότητα στις 10 προσπάθειες να έχω 10 επιτυχίες.

f(11) =0 καθώς προφανώς δεν γίνεται να ρίξω 10 σουτ και να βάλω 11 καλάθια.

Έστω ότι ρίχνω ένα σουτ με πιθανότητα επιτυχίας ρ= ½

Αν ρίξω 30 σουτ περιμένω να έχουν μπει τα 15, δηλαδή ½ ×30

Οι τύποι της διωνυμικής είναι:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}\,, \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

Συνεχής: Κανονική $N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad , \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$E(X) = \mu$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

1.5 ΠΑΡΑΓΩΓΗ

Στο κομμάτι της παραγωγής, θα πρέπει να γίνει κατανοητή η έννοια της κατανομής (την οποία ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο), ως προς την παραγωγική διαδικασία. Θα πρέπει δηλαδή να γίνει αντιληπτό, ότι ένα μηχάνημα, δεν κατασκευάζει όλα τα προϊόντα, με τα ίδια ακριβώς χαρακτηριστικά, αλλά υπάρχει μια μέση τιμή χαρακτηριστικών και μια διασπορά. Υπάρχει συνεπώς μια απόκλιση, κατά τη διαδικασία παραγωγής. Εμείς, θα πρέπει να κάνουμε αντιληπτή την έννοια της κατανομής, και να παρουσιάσουμε το πως θα υπολογίσουμε, ποιο μέρος της παραγωγής, παραμένει εντός των ποιοτικών χαρακτηριστικών που εμείς θέσαμε. Αυτό σημαίνει, ότι από πλευράς πιθανοτήτων, θα χρειαστούμε την έννοια των διακριτών και των συνεχών κατανομών, ώστε να μπορέσει να γίνει ξεκάθαρη, η παραπάνω διαδικασία. Συνεπώς, μετά την έννοια των κατανομών, θα πρέπει να συνεχίσουμε με έννοιες, όπως είναι τα διαστήματα εμπιστοσύνης και οι έλεγχοι στατιστικών υποθέσεων. Τέλος, χρησιμοποιώντας προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.), θα βρούμε την βέλτιστη παραγωγική διαδικασία για τα προϊόντα μας.

1.5.1 Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Η μέθοδος η οποία ασχολείται με τον καθορισμό ενός φάσματος πιθανών τιμών μιας υπό εκτίμηση παραμέτρου ονομάζεται μέθοδος των διαστημάτων εμπιστοσύνης (confidence intervals). Η ανάπτυξη της μεθόδου αυτής χρησιμοποιεί μόνο τις αρχές της Θεωρίας Πιθανοτήτων χωρίς να χρειάζεται νέες έννοιες Στατιστικής Συμπερασματολογίας. Το διάστημα εμπιστοσύνης χρησιμοποιείται για ασφαλέστερη εκτίμηση μιας παραμέτρου ενός πληθυσμού με βάση ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό αυτό. Το διάστημα αυτό (που κατασκευάζεται με μεθοδολογία που θα αναπτυχθεί στην συνέχεια) παρέχει ένα φάσμα εύλογων (πιθανών) τιμών της παραμέτρου , συνοδευόμενο από τον βαθμό εμπιστοσύνης που έχουμε ότι το διάστημα αυτό περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου.

Ορισμός

Έστω $\tilde{X}$ ~ f($\tilde{X}$; θ) , θ∈Θ , g(θ) η άγνωστη τιμή προς εκτίμηση. Λέμε ότι το διάστημα $\left[T_1(\tilde{X}), T_2(\tilde{X})\right]$ με $T_1(\tilde{X})<T_2(\tilde{X})$ στατιστικές συναρτήσεις, είναι διάστημα εμπιστοσύνης για το g(θ) με συντελεστή εμπιστοσύνης 1-α (0 < α < 1), αν ισχύει

$$\mathbb{P}\left(T_1(\tilde{X}) \leq \theta \leq T_2(\tilde{X})\right) = 1-\alpha\,, \qquad \forall\theta \in \Theta$$

Κάτω φράγμα (Κ.Φ.) με συντελεστή εμπιστοσύνης *1-α* για το g(θ) θα συμβολίζουμε το L($\tilde{X}$) με:$\mathbb{P}\left(g(\theta) \geq L(\tilde{X})\right) = 1-\alpha\,,\ \forall\theta \in \Theta$

Άνω φράγμα (Α.Φ.) με συντελεστή εμπιστοσύνης *1-α* για το g(θ) θα συμβολίζουμε το U($\tilde{X}$) , με: $\mathbb{P}\left(g(\theta) \leq U(\tilde{X})\right) = 1-\alpha\,,\ \forall\theta \in \Theta$

1.5.2 Έλεγχοι Στατιστικών Υποθέσεων

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με ελέγχους στατιστικών υποθέσεων (Ε.Σ.Υ.)

Η εκτιμητική μαζί με τα Διαστήματα Εμπιστοσύνης (Δ.Ε.) και τους Ε.Σ.Υ. αποτελούν την Στατιστική Συμπερασματολογία

Η πρόταση "η τιμή του θ ανήκει στο Θ_0" θα λέγεται μηδενική υπόθεση και θα συμβολίζεται: $H_0: \theta \in \Theta_0$

Ανάλογα, η πρόταση "η τιμή του θ ανήκει στο Θ_1"θα λέγεται εναλλακτική υπόθεση και θα συμβολίζεται : $H_1: \theta \in \Theta_1$

Οι H_0, H_1 αναφέρονται ως στατιστικές υποθέσεις και το πρόβλημα συμβολικά γράφεται:
$(\Pi) H_0: \theta \in \Theta_0 \kappa\alpha\tau\acute{\alpha} \quad H_1: \theta \in \Theta_1$και λέγεται πρόβλημα Ε.Σ.Υ.

Η απόφαση ότι $\theta \in \Theta_0$αναφέρεται ως αποδοχή της H_0.Η απόφαση ότι $\theta \in \Theta_1$ αναφέρεται ως αποδοχή της H_1 (απόρριψη της H_0). (Αποδοχή της H_0 σημαίνει και απόρριψη της H_1)

	Απόφαση	
	Απόρριψη H_0	Αποδοχή H_0
$\theta \in \Theta_0$	Εσφαλμένη απόφαση Σφάλμα τύπου Ι Εσφαλμένη απόρριψη H_0	Ορθή απόφαση
$\theta \in \Theta_1$	Ορθή απόφαση	Εσφαλμένη απόφαση Σφάλμα τύπου ΙΙ Εσφαλμένη αποδοχή H_0

<u>Κατασκευή Ελέγχων με δεδομένο μέγεθος α</u>

Συμβολισμοί που θα χρειαστούμε:

1. Διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης *1-α* για το θ θα συμβολίζουμε το$[T_1(\tilde{X}), T_2(\tilde{X})]$, με $\mathbb{P}\left(T_1(\tilde{X}) \leq \theta \leq T_2(\tilde{X})\right) = 1 - \alpha$, $\forall \theta \in \Theta$
2. Κάτω φράγμα (Κ.Φ.) με συντελεστή εμπιστοσύνης *1-α* για το θ θα συμβολίζουμε το $L(\tilde{X})$ με:$\mathbb{P}\left(\theta \geq L(\tilde{X})\right) = 1 - \alpha$, $\forall \theta \in \Theta$
3. Άνω φράγμα (Α.Φ.) με συντελεστή εμπιστοσύνης *1-α* για το θ θα συμβολίζουμε το $U(\tilde{X})$, με: $\mathbb{P}\left(\theta \leq U(\tilde{X})\right) = 1 - \alpha$, $\forall \theta \in \Theta$

Στόχος μας είναι να μελετήσουμε τα προβλήματα με την παρακάτω μορφή:

$(\Pi 1) H_0: \theta = \theta_0 H_1: \theta \neq \theta_0$

$(\Pi 2) H_0: \theta \leq \theta_0 H_1: \theta > \theta_0$

$(\Pi 3) H_0: \theta \geq \theta_0 H_1: \theta < \theta_0$

<u>Πρόταση 1</u>

Θεωρούμε το πρόβλημα (Π1). Έστω Ι διάστημα εμπιστοσύνης (Δ.Ε) με συντελεστή εμπιστοσύνης *1-α* για το *θ*. Τότε ο έλεγχος

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & (\alpha\pi\acute{o}\rho\rho\iota\psi\eta\ H_0),\ \ \theta_0 \notin I \\ 0, & (\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}\ H_0),\ \ \theta_0 \in I \end{cases}$$

έχει μέγεθος *α*.

Πρόταση 2

Θεωρούμε το πρόβλημα (Π2). Έστω $L(\tilde{X})$ κάτω φράγμα εμπιστοσύνης (Κ.Φ.Ε) με συντελεστή εμπιστοσύνης *1-α* για το θ. Τότε ο έλεγχος

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & (\alpha\pi\acute{o}\rho\rho\iota\psi\eta\ H_0),\ \ \theta_0 < L(\tilde{X}) \\ 0, & (\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}\ H_0),\ \ \theta_0 \geq L(\tilde{X}) \end{cases}$$

έχει μέγεθος α.

Πρόταση 3

Θεωρούμε το πρόβλημα (Π3). Έστω $U(\tilde{X})$ άνω φράγμα εμπιστοσύνης (Α.Φ.Ε) με συντελεστή εμπιστοσύνης *1-α* για το θ. Τότε ο έλεγχος

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & (\alpha\pi\acute{o}\rho\rho\iota\psi\eta\ H_0),\ \ \theta_0 > U(\tilde{X}) \\ 0, & (\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}\ H_0),\ \ \theta_0 \leq U(\tilde{X}) \end{cases}$$

έχει μέγεθος α.

Θα θεωρήσουμε δύο νέα προβλήματα, τα

- $(\Pi'2) H'_0: \theta = \theta_0 \quad \kappa\alpha\tau\acute{\alpha} \quad H_1: \theta > \theta_0$
- $(\Pi'3) H'_0: \theta = \theta_0 \quad \kappa\alpha\tau\acute{\alpha} \quad H_1: \theta < \theta_0$

Τότε για το $(\Pi'2)$, ο έλεγχος $\varphi(\tilde{x})$ που κατασκευάστηκε για το $(\Pi 2)$ έχει μέγεθος α και για το $(\Pi'2)$.

Αντίστοιχα για το $(\Pi'3)$, ο έλεγχος $\varphi(\tilde{x})$ που κατασκευάστηκε για το $(\Pi 3)$ έχει μέγεθος α και για το $(\Pi'3)$.

Εφαρμογή ελέγχων σε N(θ,σ^2) με θ άγνωστο και σ^2 γνωστό

Έστω $\tilde{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ $\alpha.\iota. \sim N(\theta, \sigma^2)$

Να κατασκευαστούν έλεγχοι μεγέθους α για τα προβλήματα: (Π1),(Π2),(Π'2),(Π3),(Π'3)

Για την κανονική κατανομή $N(\theta, \sigma^2)$ με θ άγνωστο και σ^2 γνωστό έχουμε:

Δ.Ε.: $I = \left[\bar{X} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{X} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

Κ.Φ.: $L(\tilde{X}) = \bar{X} - z_a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Α.Φ.: $U(\tilde{X}) = \bar{X} + z_a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- Για το πρόβλημα (Π1) έχουμε :

Απόρριψη $H_0 \Leftrightarrow \theta_0 > \bar{X} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ή $\theta_0 < \bar{X} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\Leftrightarrow |\bar{X} - \theta_0| > z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \overset{\tau\upsilon\pi o\pi o\acute{\iota}\eta\sigma\eta}{\Longleftrightarrow} \left|\frac{\bar{X} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > z_{a/2} \Leftrightarrow |z| > z_{a/2}$$

Άρα ο έλεγχος γίνεται :

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & |z| > z_{a/2} \\ 0, & |z| \leq z_{a/2} \end{cases}$$

Με $Z = \frac{\bar{X} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma}$

- Για τα προβλήματα (Π2), (Π'2) :

$$Απόρριψη\ H_0 \Leftrightarrow \theta_0 < \bar{X} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{\bar{X} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_\alpha \Leftrightarrow z > z_\alpha$$

Άρα ο έλεγχος γίνεται:

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & z > z_\alpha \\ 0, & z \leq z_\alpha \end{cases}$$

- Για τα προβλήματα (Π3),(Π'3) :

$$Απόρριψη\ H_0 \Leftrightarrow \theta_0 > \bar{X} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{\bar{X} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_\alpha \Leftrightarrow z < -z_\alpha$$

Άρα ο έλεγχος γίνεται :

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & z < -z_\alpha \\ 0, & z \geq z_\alpha \end{cases}$$

Διευκρίνιση: Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε:

$$Z = \frac{\bar{X} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma}$$

Η ανισότητα στον έλεγχο (για τα Π2, Π3) όταν έχω απόρριψη είναι ίδιας φοράς με την ανισότητα στην περιοχή απόρριψης

Ανακεφαλαιώνοντας για την $N(\theta, \sigma^2)$ με σ^2 γνωστό έχουμε :

Διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή με συντελεστή εμπιστοσύνης 1-α

$$I = \left[\bar{X} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Έλεγχοι υποθέσεωνz(z-tests)

$(\Pi 1) H_0: \theta = \theta_0 H_1: \theta \neq \theta_0$

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & |z| > z_{a/2} \\ 0, & |z| \leq z_{a/2} \end{cases}$$

$(\Pi 2) H_0: \theta \leq \theta_0 H_1: \theta > \theta_0$

$(\Pi' 2) H_0: \theta = \theta_0 H_1: \theta > \theta_0$

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & z > z_\alpha \\ 0, & z \leq z_\alpha \end{cases}$$

$(\Pi 3) H_0: \theta \geq \theta_0 H_1: \theta < \theta_0$

$(\Pi' 3) H_0: \theta = \theta_0 H_1: \theta < \theta_0$

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & z < -z_\alpha \\ 0, & z \geq -z_\alpha \end{cases}$$

Όπου $Z = \frac{\bar{X} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma}$

<u>Αντίστοιχα για την $N(\theta, \sigma^2)$ με σ^2 άγνωστο έχουμε :</u>

Διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή με συντελεστή εμπιστοσύνης *1-α*

$$I = \left[\bar{X} - t_{n-1,a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1,a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Έλεγχοι υποθέσεωνt(t-tests)

$(\Pi 1) H_0: \theta = \theta_0 H_1: \theta \neq \theta_0$

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & |t| > t_{n-1,a/2} \\ 0, & |t| \leq t_{n-1,a/2} \end{cases}$$

$(\Pi 2) H_0: \theta \leq \theta_0 H_1: \theta > \theta_0$

$(\Pi' 2) H_0: \theta = \theta_0 H_1: \theta > \theta_0$

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & t > t_{n-1,a/2} \\ 0, & t \leq t_{n-1,a/2} \end{cases}$$

$(\Pi 3) H_0: \theta \geq \theta_0 H_1: \theta < \theta_0$

$(\Pi' 3) H_0: \theta = \theta_0 H_1: \theta < \theta_0$

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & t < -t_{n-1,a/2} \\ 0, & t \geq -t_{n-1,a/2} \end{cases}$$

Όπου $t = \frac{\bar{X}-\theta_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\theta_0}{S}$

<u>Αντίστοιχα για την $N(\mu, \sigma^2)$ με μ,σ^2 άγνωστο έχουμε :</u>

Διάστημα εμπιστοσύνης για την διασπορά με συντελεστή εμπιστοσύνης *1-α*

$$I = \left[\frac{(n-1)S^2}{x^2_{n-1,a/2}}, \frac{(n-1)S^2}{x^2_{n-1,1-a/2}}\right]$$

Έλεγχοι υποθέσεωνX^2(X^2-tests)

$(\Pi 1) H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \sigma_0^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{x^2_{n-1,a/2}} \text{ή } \sigma_0^2 > \dfrac{(n-1)S^2}{x^2_{n-1,1-a/2}} \\ 0, & \dfrac{(n-1)S^2}{x^2_{n-1,a/2}} \leq \sigma_0^2 \leq \dfrac{(n-1)S^2}{x^2_{n-1,1-a/2}} \end{cases}$$

$(\Pi 2) H_0 : \theta \leq \theta_0 H_1 : \theta > \theta_0$

$(\Pi' 2) H_0 : \theta = \theta_0 H_1 : \theta > \theta_0$

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & S^2 > \dfrac{x^2_{n-1,\alpha}\sigma_0^2}{(n-1)} \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{cases}$$

$(\Pi 3) H_0 : \theta \geq \theta_0 H_1 : \theta < \theta_0$

$(\Pi' 3) \quad H_0 : \theta = \theta_0 H_1 : \theta < \theta_0$

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \sigma_0^2 > \dfrac{(n-1)S^2}{x^2_{n-1,1-\alpha}} \Leftrightarrow S^2 < \dfrac{x^2_{n-1,1-\alpha}\sigma_0^2}{(n-1)} \\ 0, & t \geq -t_{n-1,a/2} \end{cases}$$

Όπου$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

<u>Αντίστοιχα για την $N(\mu,\sigma^2)$ με μγνωστό και σ^2 άγνωστο έχουμε :</u>

Διάστημα εμπιστοσύνης για την διασπορά με συντελεστή εμπιστοσύνης *1-α*

$$I = \left[\frac{nS_0^2}{x^2_{n,a/2}}, \frac{nS_0^2}{x^2_{n,1-a/2}}\right]$$

Έλεγχοι υποθέσεωνX^2(X^2-tests)

$(\Pi 1) H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \sigma_0^2 < \frac{nS_0^2}{x^2_{n,a/2}} \text{ ή } \sigma_0^2 > \frac{nS_0^2}{x^2_{n,1-a/2}} \\ 0, & \frac{nS_0^2}{x^2_{n,a/2}} \leq \sigma_0^2 \leq \frac{nS_0^2}{x^2_{n,1-a/2}} \end{cases}$$

$(\Pi 2) H_0: \theta \leq \theta_0 H_1: \theta > \theta_0$

$(\Pi' 2) H_0: \theta = \theta_0 H_1: \theta > \theta_0$

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & S_0^2 > \frac{x^2_{n,\alpha}\sigma_0^2}{n} \\ 0, & διαφορετικά \end{cases}$$

$(\Pi 3) H_0: \theta \geq \theta_0 H_1: \theta < \theta_0$

$(\Pi' 3) \quad H_0: \theta = \theta_0 H_1: \theta < \theta_0$

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \sigma_0^2 > \frac{nS_0^2}{x^2_{n,1-\alpha}} \Leftrightarrow S_0^2 < \frac{x^2_{n,1-\alpha}\sigma_0^2}{n} \\ 0, & διαφορετικά \end{cases}$$

Όπου$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$

1.5.3 Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των πεπερασμένων πόρων ενός συστήματος σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Αναζητά μεταξύ όλων των εναλλακτικών σχεδιασμών, εκείνον ('πρόγραμμα') ο οποίος θα οδηγήσει στο άριστο αποτέλεσμα.

Από μαθηματικής σκοπιάς, ο γραμμικός προγραμματισμός περιγράφει ένα μοντέλο, το οποίο αφορά την μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης κάτω από κάποιου είδους περιορισμούς.

Αν και παρόμοιες εφαρμογές είχαν μελετηθεί πριν την καθιέρωση του όρου, η συστηματική μελέτη καθώς επίσης και μια μαθηματική διαδικασία λύσης τέτοιας μορφής προβλημάτων, **η μέθοδος Simplex**, οφείλεται στον G.B.Dantig στα 1947, περίοδος στην οποία ήταν επικεφαλής του AirForceStatisticalControl'sCombatAnalysisBranch στο Πεντάγωνο των Η.Π.Α. Το έργο στο οποίο απασχολούνταν με την ομάδα του, είχε την ονομασία SCOOP (ScientificComputationofOptimumPrograms) και στόχευε στην εγκαθίδρυση βέλτιστων μηχανισμών εκπαίδευσης, ανάπτυξης και συντήρησης του όλου μηχανισμού. Τα σχέδια τα οποία εκπονούσαν τα αποκαλούσαν 'προγράμματα', και μπορούσαν να εκφραστούν μαθηματικά με την βοήθεια συστημάτων γραμμικών ανισοτήτων. Εξ' ου και ο όρος 'Γραμμικός Προγραμματισμός'.

Ένα πρόβλημα είναι π.γ.π. όταν:

-ο αντικειμενικός στόχος είναι μια γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης

-οι περιορισμοί είναι ένα σύστημα γραμμικών ανισοτήτων των μεταβλητών απόφασης

Κάθε συνδυασμός τιμών $X= (X_1,X_2,\ldots Xn)$ των μεταβλητών απόφασης ενός π.γ.π. ονομάζεται λύση του προβλήματος.

Το υποσύνολο *F*του R^nπου σχηματίζεται από τα σημεία λύσης $X= (X_1,X_2,\ldots Xn)$ που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς ενός π.γ.π. ονομάζεται **εφικτή περιοχή** του π.γ.π., τα δε σημεία X, **εφικτές λύσεις.**

Σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης, **άριστη ή βέλτιστη λύση** ονομάζεται κάθε εφικτή λύση, η οποία μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

Γραφική Επίλυση π.γ.π.

Οποιοδήποτε π.γ.π. με δύο μόνο μεταβλητές μπορεί να λυθεί γραφικά. Σε μια τέτοια περίπτωση, ονομάζουμε τις μεταβλητές X_1, X_2 και κατασκευάζουμε ένα σύστημα αξόνων στο οποίο ο οριζόντιος άξονας παριστά τις τιμές της μεταβλητής X_1και ο κάθετος τις τιμές της μεταβλητής $X_{2.}$

Στη συνέχεια θα πρέπει διαδοχικά να:

-σχεδιάσουμε στο πρώτο τεταρτημόριο (θετικοί ημιάξονες), τις ευθείες όλων των περιορισμών του προβλήματος,

-καθορίσουμε την εφικτή περιοχή,

-σχεδιάσουμε για αυθαίρετες τιμές του Ζτις αντίστοιχες ευθείες (ευθείες σταθερού κέρδους),

-εντοπίσουμε την κατεύθυνση αύξησης (ή μείωσης σε προβλήματα ελαχιστοποίησης) της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης,

-εντοπίσουμε το σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης πριν εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή,

-βρούμε τις συνιστώσες αυτού του σημείου (άριστη λύση)

-υπολογίσουμε την τιμή της αντικειμενικής συναρτήσης Ζστο σημείο αυτό (μέγιστη/ελάχιστη τιμή).

1.6 ΠΩΛΗΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό, για να μελετήσουμε την πορεία των πωλήσεων, θα χρησιμοποιήσουμε χρονοσειρές, θα μιλήσουμε για το απλό γραμμικό μοντέλο και πως αυτό, μπορεί να ερμηνεύσει καλά ή όχι την πορεία των πωλήσεών μας. Θα κάνουμε μια συσχέτιση, μεταξύ της διαφήμισης και των πωλήσεων και τέλος, θα χρησιμοποιήσουμε αριθμοδείκτες, έτσι ώστε να ερμηνεύσουμε, πιθανή περιοδικότητα στις πωλήσεις μας, η οποία θα μπορούσε να προέρχεται, από μια εποχικότητα του προϊόντος.

1.6.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

Σε πολλές στατιστικές εφαρμογές συναντάμε το πρόβλημα της μελέτης της σχέσης δύο ή περισσοτέρων τυχαίων μεταβλητών. Παραδείγματα τέτοιας σχέσης έχουμε στη μελέτη του ύψους και του βάρους μιας ομάδας ανθρώπων, του εισοδήματος και κατανάλωσης εργαζομένων σε μια εταιρεία κλπ. Το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε είναι αφ’ ενός να αποφασίσουμε αν υπάρχει μια τέτοια σχέση και στη συνέχεια να προσδιορίσουμε τη σχέση αυτή με βάση ορισμένες παρατηρήσεις. Ένας από τους κύριους λόγους που η μελέτη αυτή είναι σημαντική, κυρίως σε εφαρμογές που έχουν σχέση με επιχειρήσεις και με την οικονομία, είναι ότι οι σχέσεις αυτές χρησιμοποιούνται συχνά για προβλέψεις. Είναι προφανές ότι συχνά, είτε ιδιωτικές εταιρείες είτε κρατικές μονάδες χρειάζεται να προβλέψουν μεταβλητές όπως η ζήτηση, τα επιτόκια, ο πληθωρισμός, οι τιμές πρώτων υλών, το εργατικό κόστος κλπ.

Ανεξάρτητα, όμως, από τους λόγους για τους οποίους η μελέτη της σχέσης δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών είναι χρήσιμη, το πρώτο βήμα για να πραγματοποιηθεί η μελέτη αυτή είναι η κατασκευή μιας μαθηματικής εξίσωσης (μοντέλου) που περιγράφει τη φύση της σχέσης που υφίσταται μεταξύ των υπό μελέτη μεταβλητών.

Η διαδικασία δημιουργίας μιας μαθηματικής εξίσωσης για την περιγραφή ενός φαινομένου μπορεί να είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για την κατασκευή του μοντέλου απαιτείται κάποια γνώση της φύσης της σχέσης μεταξύ των μεταβλητών. Για παράδειγμα, ένας επενδυτής στην αγορά χρυσού, προκειμένου να προβεί σε μια μεγάλη αγορά, θα ενδιαφερόταν να προβλέψει την τιμή του χρυσού σε δύο χρόνια από τώρα χρησιμοποιώντας κάποια τεχνική. Παράγοντες που μπορεί να επηρεάσουν την τιμή αυτή είναι τα επιτόκια, ο πληθωρισμός, η τιμή του πετρελαίου, η ζήτηση για χρυσά κοσμήματα, η ζήτηση για βιομηχανικό και εμπορικό χρυσό και ο δείκτης του Χρηματιστηρίου. Έστω, πιο συγκεκριμένα, ότι ο επενδυτής αυτός ενδιαφέρεται να μελετήσει αρχικά τον τρόπο που τα επιτόκια επηρεάζουν την τιμή του χρυσού. Αν θεωρήσει ότι υπάρχει μια γραμμική σχέση, αυτό θα συνεπάγεται ίσως ότι όταν τα επιτόκια αυξάνουν (ή πέφτουν) η τιμή του χρυσού θα αυξάνει (θα μειώνεται). Μια εξίσωση τετραγωνικής μορφής θα οδηγεί, ενδεχομένως, στο συμπέρασμα ότι η τιμή του χρυσού θα αυξάνει για κάποιο συγκεκριμένο φάσμα τιμών του πληθωρισμού αλλά θα μειώνεται για κάποιο διαφορετικό φάσμα. Ενδεχομένως, οι συγκεκριμένοι συνδυασμοί τιμών του πληθωρισμού και άλλων μεταβλητών επιδρούν στην τιμή του χρυσού με ένα τρόπο, ενώ άλλοι συνδυασμοί επηρεάζουν την τιμή αυτή με ένα άλλο τρόπο. Ο αριθμός των διαφορετικών μαθηματικών μοντέλων που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν είναι σχεδόν άπειρος.

Στα περισσότερα από τα πρακτικά προβλήματα που θα μας απασχολήσουν μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε πώς μεταβάλλεται μια τυχαία μεταβλητή Y σε σχέση με μια - ή περισσότερες - μεταβλητές

X1 ,X2 ,...,Xn των οποίων ο ερευνητής μπορεί να επιλέξει τις τιμές.

Αν το μοντέλο που εξετάζουμε είναι τέτοιας μορφής που η

τυχαία μεταβλητή Y είναι γραμμική συνάρτηση των *παραμέτρων* του

μοντέλου τότε μιλάμε για ένα *γραμμικό μοντέλο* (***linear model***).

Η απλούστερη μορφή τέτοιας σχέσης είναι η

Y = α + βX

όπου α και β είναι σταθερές.

Y= α+βX+ε (απλή γραμμική παλινδρόμηση,

simple linear regression).

Ο πίνακας που ακολουθεί , δίνει στοιχεία για την ποσότητα σε νερό που χρησιμοποιήθηκε για

πότισμα σε ένα χωράφι (σε εκατοστά) και την παραγωγή τριφυλλιού

(σε τόνους ανά στρέμμα) στο χωράφι αυτό (που χρησιμοποιήθηκε

πειραματικά).

Νερό (χ) 12 18 24 30 36 42 48

Σοδειά (y) 5.27 5.68 6.25 7.21 8.05 8.71 8.42

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια γραμμική σχέση

Y = α + βX (1)

ανάμεσα στη σοδειά και το νερό.

Είναι φανερό ότι αν χρησιμοποιήσουμε πάλι 30cm νερού είναι μάλλον

απίθανο να πάρουμε πάλι σοδειά 7.21 τόνους/στρέμμα. Για το λόγο

αυτό αντί για το ντετερμινιστικό μοντέλο Y = α + βX χρησιμοποιούμε

ένα στοχαστικό μοντέλο

Yi = α + βXi + εi (2)

όπου το ει αντιπροσωπεύει ένα τυχαίο λάθος. (Φυσικά, αν είχαμε μια τέλεια γραμμική σχέση για όλα τα i = 1,2,... τα ει θα ήταν μηδέν). Η σχέση (2) συνεπάγεται ότι η τιμή y του Y που παρατηρήσαμε (για ένα συγκεκριμένο X=x) είναι μια τυχαία τιμή από τον πληθυσμό των τιμών της τυχαίας μεταβλητής Y που αντιστοιχούν στο συγκεκριμένο x. (Στο παράδειγμα η τιμή 7.21 είναι μια τιμή που θα μπορούσε να έχει η σοδειά Y όταν η ποσότητα νερού που χρησιμοποιήθηκε ήταν 30cm).

Για τα ει υποθέτουμε ότι είναι τυχαία και όχι συστηματικά. Επίσης υποθέτουμε ότι

E (εi) = 0

Τέλος, λόγω των αποκλίσεων των παρατηρουμένων τιμών της τυχαίας μεταβλητής Y και του γεγονότος ότι η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί μια κατανομή, υποθέτουμε ότι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y *για δοθέν* x συνδέεται γραμμικά με το x. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$E(Y_\iota\ I\ x_\iota)$= α + βxi (3)

Η ευθεία (3) ονομάζεται *ευθεία παλινδρόμησης* ***(regression line)*** και οι συντελεστές α και β που την προσδιορίζουν ονομάζονται *μοντέλα απλής γραμμικής παλινδρόμησης* ***(regression coefficients).***

Οι υποθέσεις που κάνουμε στο στοχαστικό μοντέλο όπου οι τιμές της μεταβλητής X καθορίζονται από τον ερευνητή, ισοδυναμούν με την υπόθεση ότι, για ένα συγκεκριμένο x, *η μέση τιμή του* Y (και όχι μια συγκεκριμένη τιμή του Y) είναι σε γραμμική σχέση με το x.

Η μεταβλητή X (οι τιμές της οποίας καθορίζονται από τον ερευνητή) λέγεται *ανεξάρτητη μεταβλητή* ***(independent variable)*** ενώ η τυχαία μεταβλητή Y λέγεται *εξαρτημένη* ***(dependent variable).***

Το πρόβλημά μας συνίσταται στον προσδιορισμό της ευθείας παλινδρόμησης (regression line) (της ευθείας (3)). Επειδή η τιμή y της Υ που θα παρατηρήσουμε θα αποκλίνει, εν γένει, από την Ε(Y_ι I x_ι)δεν μπορούμε να προσδοκούμε ότι είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε την ακριβή ευθεία παλινδρόμησης. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να βρούμε μια *εκτίμηση της ευθείας παλινδρόμησης* έστω $\hat{Y}$= a + bx η οποία θα βασίζεται σε ένα τυχαίο δείγμα παρατηρήσεων (x1,y1), (x2,y2), ...,(xn,yn). Δοθέντος δηλαδή του τυχαίου δείγματος (x1,y1), (x2,y2), ..., (xn,yn) θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές a και b, (οι οποίοι θα είναι σημειακές εκτιμήσεις των α και β, δηλαδή τιμές των εκτιμητριών α και β των αˆ και βˆ αντίστοιχα), ώστε η γραμμή $\hat{Y}$= a + bx (η οποία είναι μία σημειακή εκτίμηση της ευθείας (3)) να είναι όσο το δυνατόν πλησιέστερη προς την πραγματική ευθεία παλινδρόμησης. Η ευθεία (3) λέγεται *γραμμική παλινδρόμηση (linear regression)*

Η μέθοδος εύρεσης της βέλτιστης ευθείας στηρίζεται στην ελαχιστοποίηση μιας παράστασης που περιέχει τετράγωνα. Για τον λόγο αυτό ονομάζεται *μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (methodofleast -squares).*

a=$\bar{y}$-b$\bar{x}$

$$b=\frac{\sum_i (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_i (x_i-\bar{x})^2}$$

Τα a και b ονομάζονται *εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων των Συντελεστών γραμμικής παλινδρόμησης (least-squares estimates of the coefficients of linear regression).*

1.6.2 Χρονοσειρές

Γενικά, *χρονοσειρά* ονομάζουμε ένα σύνολο παρατηρήσεων οι οποίες παίρνονται κατά ορισμένες χρονικές στιγμές ή περιόδους που ισαπέχουν μεταξύ τους.

Αν συμβολίσουμε με Y_iτην τιμή της παρατήρησης που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή X_i , τότε η χρονοσειρά θα αποτελείται από N ζεύγη $(Y_1,X_1),\ldots(Y_N,X_N)$.

Χαράζουμε την τεθλασμένη γραμμή που συνδέει τα διαδοχικά σημεία $(Y_1,X_1),\ldots(Y_N,X_N)$ και παίρνουμε το διάγραμμα της χρονοσειράς.

Στην γραφική απεικόνιση της χρονοσειράς, σημειώνουμε πάνω στον άξονα των τετμημένων τις χρονικές μονάδες (έτη, εξάμηνα, τρίμηνα, μήνες, μέρες, ώρες) και πάνω στον άξονα των τεταγμένων τις τιμές του μεγέθους που μελετάμε.

Η μεγάλη σημασία που έχει για την Οικονομική Στατιστική η ανάλυση των χρονοσειρών προέρχεται από το γεγονός ότι μέσω αυτής είναι δυνατό, μέσα σε ορισμένα όρια και με ορισμένες επιφυλάξεις, να διατυπώνονται προβλέψεις για μελλοντικές εξελίξεις φαινομένων.

Η σημασία αυτών των προβλέψεων φαίνεται από το γεγονός ότι καμιά επιχείρηση, δημόσια ή ιδιωτική, δεν μπορεί να αποφύγει τη διατύπωση προγραμμάτων για το μέλλον.

Οι κυριότερες συνιστώσες μιας χρονοσειράς

Οι χρονοσειρές παρουσιάζουν μεταβολές με μορφή και ένταση που κάθε φορά διαφέρει.
Εξετάζοντας τις μεταβολές αυτές, που ονομάζονται κινήσεις της μεταβλητής Y_i σε συνάρτηση με το χρόνο X_i μιας χρονοσειράς, διακρίνουμε κυρίως τα ακόλουθα είδη κίνησης:

-τη μακροχρόνια τάση ή γενική τάση (trend)

-τις περιοδικές μεταβολές

-τις κυκλικές μεταβολές

-τις άρρυθμες ή ακανόνιστες ή απρόοπτες μεταβολές.

Μακροχρόνια τάση

Αν για μεγάλη χρονική περίοδο οι τιμές μιας χρονοσειράς τείνουν να αυξηθούν ή να μειωθούν, τότε λέμε ότι η σειρά των παρατηρήσεων παρουσιάζει μακροχρόνια τάση. Δηλαδή, *τάση* είναι η μακροχρόνια αύξηση ή μείωση που παρατηρείται στα δεδομένα.

Το χαρακτηριστικό της μακροχρόνιας τάσης είναι ότι έχουμε μακροχρόνια και σταθερή κίνηση των οικονομικών μεγεθών που επηρεάζεται από γενικότερους παράγοντες.

Περιοδικές μεταβολές

Οι περιοδικές μεταβολές είναι εκείνες που επαναλαμβάνονται κατά ορισμένα χρονικά διαστήματα μέσα σε ορισμένη χρονική περίοδο.

Οι πιο συχνές περιοδικές μεταβολές είναι εκείνες που συμβαίνουν μέσα σε ένα χρόνο και ονομάζονται *εποχιακές μεταβολές*.

Κυκλικές μεταβολές

Κυκλικές μεταβολές ή κυκλικές διακυμάνσεις είναι οι ταλαντώσεις γύρω από μια γραμμή ή καμπύλη τάσης σε μια μακροχρόνια περίοδο.

Οι κυκλικές μεταβολές διαφέρουν από τις περιοδικές γιατί είναι διάρκειας μεγαλύτερης από ένα έτος και δεν παρουσιάζουν, γενικά, κανονική περιοδικότητα.

Ακανόνιστες μεταβολές

Οι ακανόνιστες μεταβολές διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: στις *συμπτωματικές* και στις *τυχαίες*. Οι συμπτωματικές μεταβολές προέρχονται από εξαιρετικά και απρόβλεπτα γεγονότα, όπως είναι οι σεισμοί, οι θύελλες, οι απεργίες, οι επιδημίες, οι πόλεμοι κ.λπ., ενώ οι τυχαίες μεταβολές οφείλονται σε πολυάριθμους άγνωστους παράγοντες ή, όπως συνήθως λέγεται, στην τύχη.

<u>Μέθοδοι προσδιορισμού της μακροχρόνιας τάσης</u>

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούμε για τον προσδιορισμό της τάσης είναι:

α) Πρακτικοί τρόποι

1) Χάραξη της τάσης με το χέρι

2) Μέθοδος των δύο μέσων σημείων

3) Μέθοδος των κινητών μέσων

β) Μαθηματική μέθοδος προσδιορισμού της τάσης.

<u>Χάραξη της τάσης με το χέρι</u>

Κατασκευάζουμε πρώτα την τεθλασμένη γραμμή των εμπειρικών στοιχείων και μετά χαράζουμε με το χέρι μια γραμμή που να περνάει ανάμεσα από την τεθλασμένη γραμμή των εμπειρικών στοιχείων, κατά τέτοιο τρόπο που το άθροισμα των εμβαδών που βρίσκονται κάτω από την τάση να είναι περίπου ίσο με το άθροισμα των εμβαδών που βρίσκονται πάνω από την τάση.

<u>Μέθοδος των δύο μέσων σημείων</u>

Για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής χωρίζουμε τις παρατηρήσεις, οι οποίες αποτελούν την χρονοσειρά, σε δύο ίσες ομάδες και υπολογίζουμε τους αριθμητικούς μέσους των δύο ομάδων. Μετά χαράζουμε την ευθεία η οποία περνάει από τα σημεία των αριθμητικών μέσων.

Στον πίνακα δίνεται η παραγωγή ενός εργοστασίου, σε χιλιόμετρα σωλήνα, κατά την διάρκεια των ετών 2008 μέχρι το 2013.

Έτη	Παραγωγή (Y_i)
2008	5
2009	8
2010	12
2011	15
2012	20
2013	23

Ζητείται να προσδιοριστεί με την μέθοδο των δύο μέσων σημείων η ευθεία της τάσης.

Διαιρούμε την χρονοσειρά σε δύο ομάδες και προσδιορίζουμε τους αριθμητικούς μέσους όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

Έτη	X_i	Y_i
2008	0	5
2009	1 3 : 3= 1	8 25 : 3 = 8.3
2010	2	12
2011	3	15
2012	4 12 : 3 = 4	20 58 : 3 = 19.3
2013	5	23

Η τάση που ζητούμε είναι αυτή που περνάει από τα σημεία των συντεταγμένων

M_1 (1,8,3)και M_2 (4, 19, 13)

Μέθοδος των κινητών μέσων

Όταν οι παρατηρήσεις μιας χρονοσειράς παρουσιάζουν κυκλικές μεταβολές ρυθμικά επαναλαμβανόμενες, η εκτίμηση της τάσης είναι δυνατή με τη μέθοδο των κινητών μέσων. Με τη μέθοδο αυτή προκύπτει μια νέα σειρά παρατηρήσεων , απαλλαγμένη από την κυκλική συνιστώσα, και ταυτόχρονα γίνεται και εξομάλυνση των ακανόνιστων μεταβολών. Ο αριθμός των όρων που χρησιμοποιούνται στον κινητό μέσο καθορίζει το βαθμό της ομαλότητας. Συνήθως, όσο περισσότεροι όροι χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του κινητού μέσου, τόσο καλύτερη ομαλότητα προκύπτει.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Α) Όταν ο αριθμός των μέσων (n)είναι μονός αριθμός π.χ. n = 3, θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα

Χρόνος	Τιμές	Κινητοί μέσοι 3 όρων	Κινητοί μέσοι 5 όρων
1	a_1		
2	$a_2 \rightarrow$	$a'_2 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$	
3	$a_3 \rightarrow$	$a'_3 = \frac{a_2 + a_3 + a_4}{3}$	$a'_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5}$
4	$a_4 \rightarrow$	$a'_4 = \frac{a_3 + a_4 + a_5}{3}$	$a'_3 = \frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{5}$
5	a_5	…………………….	………………………………..
6	a_6	…………………….	………………………………..

Οι κινητοί αυτοί μέσοι ονομάζονται *εξομαλυνθείσες τιμές τάξης* 1. Μετά τον υπολογισμό των εξομαλυντικών τιμών της τάξης 1, μπορούμε να υπολογίσουμε τις εξομαλυντικές τιμές της $2^{ης}$ τάξης. Οι τιμές αυτές προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο όπως οι τιμές της τάξης 1, με την διαφορά ότι οι κινητοί μέσοι υπολογίζονται με τη βοήθεια των εξομαλυντικών τιμών τάξης 1 και όχι με τη βοήθεια των ακατέργαστων αρχικών τιμών.

Έτσι, υπολογίζοντας τους κινητούς μέσους τριών όρων (τους οποίους παριστάνουμε με a'_1) επί των προηγούμενων κινητών μέσων τάξης 1 τριών όρων (a'_1), θα έχουμε:

$$a'_3 = \frac{a'_2 + a'_3 + a'_4}{3} = \frac{\frac{a_1+a_2+a_3}{3} + \frac{a_2+a_3+a_4}{3} + \frac{a_3+a_4+a_5}{3}}{3}$$
$$= \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 2a_4 + a_5}{9}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε το a'_3 :

$$a'_4 = \frac{a'_3 + a'_4 + a'_5}{3} = \frac{a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6}{9}$$

Επίσης, οι κινητοί μέσοι της τάξης των 5 όρων θα είναι :

$$a'_5 = \frac{a'_3 + a'_4 + a'_5 + a'_6 + a'_7}{5}$$
$$= \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 4a_6 + 7a_7 + 2a_8 + a_9}{25}$$

Κατά τον ιδιό τρόπο εργαζόμαστε και για τους υπόλοιπους όρους.

Β) Όταν ο αριθμός των όρων είναι ζυγός π.χ. n = 2, θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα

Χρόνος	Τιμές	Κινητοί μέσοι 2 όρων	Κινητοί μέσοι 2 όρων <<κεντρικοί>>
1	a_1	$M'_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$	
2	a_2	$M'_2 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}$	$\alpha'_2 = \frac{M'_1 + M'_2}{2} = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3}{4}$
3	a_3	$M'_3 = \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}$	$\alpha'_3 = \frac{M_2 + M_3}{2} = \frac{\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4}{4}$
4	a_4	$M'_4 = \frac{\alpha_4 + \alpha_5}{2}$	…
5	a_5	…	…
....	…	…	…

Επίσης για n = 4 θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα

Χρόνος	Τιμές	Κινητοί μέσοι 4 όρων	Κινητοί μέσοι 4 όρων <<κεντρικοί>>
1	a_1	$M_1'=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2}$	
2	a_2	...	$\alpha_2'=\frac{M_1'+M_2'}{2}=\frac{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}{4}$
3	a_3	...	...
4	a_4	...	...
5	a_5	...	...
....	...	...	...

Παρατηρούμε ότι οι κινητοί μέσοι 4 όρων <<κεντρικοί>> αντιστοιχούν με μέσους σταθμικούς 5 όρων και συντελεστές βαρύτητας 1, 2, 2, 2, 1 και άθροισμα των συντελεστών βαρύτητας 2 × n = 4 × 2 = 8.

Επίσης, αποδεικνύεται ότι οι κινητοί μέσοι 12 όρων {κεντρικοί} αντιστοιχούν με μέσους σταθμικούς 13 όρων με συντελεστές βαρύτητας 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1 και άθροισμα βαρών 12 + 12 = 24. Π.χ. το

$$\alpha_7 = \frac{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+2\alpha_6+2\alpha_7+2\alpha_8+2\alpha_9+2\alpha_{10}+2\alpha_{11}+2\alpha_{12}+\alpha_{13}}{24}$$

<u>Προσδιορισμός της τάσης με μια γραμμική εξίσωση</u>

Η μέθοδος αυτή αποβλέπει στην αναζήτηση μιας εξίσωσης που να μπορεί να προσαρμοστεί στα δεδομένα μιας χρονοσειράς και να μας περιγράψει κατά τον καλύτερο τρόπο την τάση ενός φαινομένου. Η πιο απλή περίπτωση είναι η γραμμική εξίσωση, η οποία έχει την παρακάτω μορφή:

$$\widehat{y_i} = \hat{a} + \hat{b}x_i$$

Όπου οι σταθερές $\hat{a}$ και $\hat{b}$ ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\sum y_i = N\hat{a} + \hat{b}\sum x_i$$

$$\sum x_i y_i = \hat{a}\sum x_i + \hat{b}\sum {x_i}^2$$

Στην περίπτωση όμως των χρονοσειρών είναι δυνατό να διατάξουμε τα δεδομένα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να έχουμε$\sum x_i$=0. Τότε το παραπάνω σύστημα των κανονικών εξισώσεων θα πάρει την μορφή:

$\sum y_i = N\hat{a} \Rightarrow \hat{a} = \frac{\sum y_i}{N}$

$\sum x_i y_i = \hat{b}\sum {x_i}^2 \Rightarrow \hat{b} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum {x_i}^2}$

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται, οι πωλήσεις σε kg παγωτού για την χρονική περίοδο 2008-2012.

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας τάσης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Έτος	Πωλήσεις (σε kg)
2008	1.885
2009	1.938
2010	1.981
2011	2.050
2012	2.088

Επειδή έχουμε μονό αριθμό ετών (τιμών της X), αντιστοιχίζουμε το μεσαίο έτος στην υποδιαίρεση 0 του άξονα O_x

Οπότε έχουμε: $\sum x_i$=0

Έτσι, αν κατασκευάσουμε τον κάτωθι πίνακα, βρίσκουμε:

Έτος	Y_i	X_i	$X_i\, Y_i$	X_i^2
2008	1.855	-2	-3.710	4
2009	1.938	-1	-1.938	1
2010	1.981	0	0	0
2011	2.050	1	2.050	1
2012	2.088	2	4.176	4
Σύνολο	9.912	0	578	10

$$\hat{a} = 1982{,}4$$

$$\hat{b} = 57{,}8$$

Επομένως η ευθεία τάσης θα έχει την εξίσωση:

$\hat{y_i}$ = 1982,4 + 57,8x_i

1.6.3 Αριθμοδείκτες

Οι αριθμοδείκτες είναι στατιστικά μέτρα που δείχνουν τις μεταβολές μιας μεταβλητής ή μιας ομάδας μεταβλητών που σχετίζονται μεταξύ τους, μεταξύ δύο χρονικών περιόδων ή δύο γεωγραφικών περιοχών και, γενικότερα, μεταξύ δύο καταστάσεων.

Βασικός σκοπός της κατάρτισης ενός αριθμοδείκτη είναι ο χαρακτηρισμός της σχετικής μεταβολής μιας μεταβλητής με ένα μόνο αριθμό, ή μιας ομάδας σχετικών μεταβλητών μεταξύ δύο εποχών ή δύο γεωγραφικών τόπων.

Οι χρονολογικοί αριθμοδείκτες διακρίνονται βασικά σε δύο κατηγορίες:

α) Ιδιαίτεροι αριθμοδείκτες, αν δείχνουν τις μεταβολές μίας μόνο μεταβλητής μεταξύ δύο χρονικών περιόδων.

β) Συνθετικοί αριθμοδείκτες, αν εκφράζουν τις μεταβολές πολλών μεταβλητών του ίδιου φαινομένου με συνδυασμό των ιδιαίτερων δεικτών των επιμέρους μεταβλητών και χρησιμοποίησης ενός τύπου μέσης αριθμητικής τιμής. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι δείκτες βιομηχανικής παραγωγής, οι δείκτες τιμών των γεωργικών προϊόντων, οι δείκτες κόστους ζωής κ.λπ. Ο χρονολογικός αριθμοδείκτης που δείχνει τις μεταβολές των τιμών των διαφόρων αγαθών στο χρόνο ονομάζεται τιμάριθμος.

Ιδιαίτεροι αριθμοδείκτες

(α) Σχετικές τιμές

Σχετική τιμή είναι ο λόγος της τιμής ενός αγαθού σε μια χρονική περίοδο, προς την τιμή του ίδιου αγαθού σε μια άλλη χρονική περίοδο που ονομάζεται περίοδος βάσης.

Οι σχετικές τιμές συνήθως εκφράζονται σε ποσοστό επί τοις εκατό.

Αν με p_0 συμβολίζουμε την τιμή ενός αγαθού στην περίοδο 0 που παίρνουμε ως βάση και με p_1 την τιμή του ίδιου αγαθού σε μια άλλη περίοδο 1, τότε η σχετική τιμή στην περίοδο 1, με βάση την περίοδο 0, ορίζεται ως το πηλίκο $^{p_1}/_{p_0} \cdot 100\%$ και συμβολίζεται με $P_{1/0}$, δηλαδή :

$$P_{1/0} = \frac{p_1}{p_0} \cdot 100\%$$

Η σχετική τιμή που αντιστοιχεί στην περίοδο βάσης θα είναι 100.

Παράδειγμα 1

Η τιμή λιανικής πώλησης μιας μεγάλης συσκευασίας οικογενειακού παγωτού κατά τα έτη 2013 και 2014 ήταν 12 και 14€ αντίστοιχα. Αν πάρουμε το έτος 2013 ως έτος βάσης, να υπολογιστεί η σχετική τιμή.

Λύση:

Η σχετική τιμή θα είναι:

$$P_{1/0} = \frac{p_1}{p_0} \cdot 100\% = \frac{14}{12} \cdot 100\% = 117\%$$

Αυτό σημαίνει ότι το 2014, με βάση το έτος 2013, η τιμή μιας μεγάλης συσκευασίας οικογενειακού παγωτού αυξήθηκε κατά 17%.

(β) Σχετικές ποσότητες

Πολλές φορές, αντί να συγκρίνουμε τις τιμές ενός αγαθού, μπορούμε να συγκρίνουμε τις ποσότητες ή τον όγκο του. Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε σχετικές ποσότητες.

Αν με q_0 συμβολίσουμε την ποσότητα ενός αγαθού κατά την περίοδο 0 και με q_1 την ποσότητα του ίδιου αγαθού στην περίοδο 1, τότε ο σχετικός ποσοτήτων, με βάση την περίοδο 0, ορίζεται ως το πηλίκο $\frac{q_1}{q_0} \cdot 100\%$ και συμβολίζεται με $Q_{1/0}$.

$$Q_{1/0} = \frac{q_1}{q_0} \cdot 100\%$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Η παραγωγή σωλήνων (σε km) σε ένα εργοστάσιο στο νομό Κοζάνης κατά τα έτη 2011 και 2012 ήταν 4.200 και 4.800 km αντίστοιχα. Να υπολογιστεί ο δείκτης σχετικών ποσοτήτων με βάση το έτος 2011.

<u>Λύση</u>:

Ο δείκτης σχετικών ποσοτήτων ή όγκων δίνεται από τον τύπο:

$$Q_{1/0} = \frac{q_1}{q_0} \cdot 100\% = \frac{4800}{4200} \cdot 100\% = 114\%$$

Η τιμή 114% σημαίνει ότι η παραγωγή των σωλήνων κατά το έτος 2012 αυξήθηκε κατά 14% σε σύγκριση με το έτος 2011.

(γ) Σχετικές αξίες

Αν p_0 είναι η τιμή ενός αγαθού στην περίοδο 0 και q_0 είναι η ποσότητα ή ο όγκος του αγαθού αυτού στην ίδια περίοδο, τότε το γινόμενο $v_1 = p_1 q_1$ παριστάνει την συνολική αξία στην περίοδο 1.

Η σχετική αξία για την περίοδο 1, με βάση την περίοδο 0, θα είναι:

$$V_{1/0} = \frac{v_1}{v_0} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0} = \frac{p_1}{p_0}\frac{q_1}{q_0} = P_{1/0} Q_{1/0}$$

ή

$$V_{1/0} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0} 100\%$$

Παράδειγμα 3

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές (σε ευρώ) και οι ποσότητες (σε μέτρα) ενός αγαθού (σωλήνες) κατά τα έτη 2010 και 2012.

Έτη	Τιμές	Ποσότητες
2010	32	162
2012	41	168

Να υπολογιστεί ο σχετικός δείκτης αξίας για το έτος 2012, με βάση το έτος 2010.

Λύση:

Ο σχετικός δείκτης αξίας δίνεται από τον τύπο:

$$V_{1/0} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0} 100\% = \frac{41 \cdot 168}{32 \cdot 162} 100\% = \frac{6.888}{5.184} 100\% = 133\%$$

Συνθετικοί αριθμοδείκτες

Στην παραπάνω παράγραφο είδαμε πώς υπολογίζεται ο δείκτης ενός μόνο αγαθού μεταξύ δύο χρονικών περιόδων. Στην πράξη όμως ενδιαφερόμαστε για τις μεταβολές μεγάλων ομάδων των αγαθών αυτών, π.χ. για τον υπολογισμό του δείκτη κόστους ζωής, δεν μας ενδιαφέρει μόνο η μεταβολή της τιμής ή της ποσότητας του ψωμιού, αλλά μιας ομάδας αγαθών.

Στην παραπάνω περίπτωση υπολογίζουμε ένα δείκτη, που είναι ένα μέτρο θέσης των τιμών ή των ποσοτήτων των παραπάνω αγαθών.

Όπως ο μέσος αριθμητικός διακρίνεται σε απλό και σταθμικό ανάλογα με το αν έχουμε συχνότητες ή όχι, έτσι και εδώ θα έχουμε απλούς συνθετικούς δείκτες και σταθμικούς συνθετικούς δείκτες ανάλογα με το αν οι ιδιαίτεροι δείκτες παρουσιάζουν την ίδια σπουδαιότητα ή όχι, δηλαδή αν κάθε αγαθό έχει την ίδια σημασία για το κοινωνικό σύνολο.

Απλοί συνθετικοί δείκτες τιμών

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι οι τιμές των αγαθών έχουν συντελεστή στάθμισης τη μονάδα, δηλαδή ότι όλα τα αγαθά έχουν την ίδια βαρύτητα.

Οι μέθοδοι υπολογισμού αυτών των δεικτών είναι:

(α) Μέθοδος των συνολικών τιμών

Παριστάνουμε με $p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, p_0^{(3)}, \dots, p_0^{(\nu)}$ τις τιμές των αγαθών 1,2,3,…ν στην περίοδο βάσης 0 και $p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, p_1^{(3)}, \dots, p_1^{(\nu)}$ τις τιμές των αγαθών 1,2,3….ν στην περίοδο 1. Στην περίπτωση αυτή ο δείκτης των συνολικών τιμών βρίσκεται υπολογίζοντας το παρακάτω πηλίκο:

$$P_{1/0} = \frac{p_1^{(1)} + p_1^{(2)} + p_1^{(3)} + \cdots + p_1^{(\nu)}}{p_0^{(1)} + p_0^{(2)} + p_0^{(3)} + \cdots + p_0^{(\nu)}} = \frac{\Sigma_{p_1}}{\Sigma_{p_0}}$$

Ώστε ο απλός δείκτης των συνολικών τιμών είναι ο λόγος του αθροίσματος των τιμών ν αγαθών στην περίοδο 1 προς το άθροισμα των τιμών των ίδιων αγαθών σε μια άλλη χρονική περίοδο που παίρνουμε ως έτος βάσης.

Ο παραπάνω δείκτης των συνολικών τιμών παρουσιάζει τα παρακάτω μειονεκτήματα:

(1) Δεν παίρνει υπόψη τις ποσότητες των αγαθών
(2) Όλα τα αγαθά δεν έχουν κοινή ομάδα
(3) Όλα τα αγαθά δεν έχουν την ίδια βαρύτητα

Παράδειγμα 4

Ο πίνακας δείχνει τις μέσες τιμές χονδρικής πώλησης τεσσάρων ειδών σωλήνα κατά τα έτη 2008 και 2010.Να υπολογιστεί ο δείκτης των συνολικών τιμών για το έτος 2010, με βάση το έτος 2008.

Λύση:

Ο δείκτης συνολικών τιμών θα είναι:

Σωλήνες	Τιμές σωλήνων	
	2008	2010
	p_0	p_1
Α	24	30
Β	30	36
Γ	36	39
Δ	12	18
Σύνολο	102	123

$$P_{1/0} = \frac{\Sigma_{p_1}}{\Sigma_{p_0}} = \frac{123}{102} = 1.2058 \text{ ή } 120.58\%$$

Δηλαδή οι τιμές χονδρικής πώλησης κατά το έτος 2010 είναι 20.58% μεγαλύτερες του 2008

(β) Μέθοδος του αριθμητικού μέσου των σχετικών τιμών

Είναι γνωστό ότι, η σχετική τιμή ενός αγαθού είναι ${p_1}/{p_0}$, αν όμως έχουμε ν αγαθά και πάρουμε το άθροισμα $\Sigma(p_1/p_0)$ και το διαιρέσουμε με το Ν, προκύπτει ο μέσος αριθμητικός των σχετικών τιμών, δηλαδή:

$$P_{1/0} = \frac{\frac{p_1^{(1)}}{p_0^{(1)}} + \frac{p_1^{(2)}}{p_0^{(2)}} + \cdots + \frac{p_1^{(\nu)}}{p_0^{(\nu)}}}{N} = \frac{\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0}\right)}{N} = \frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0}\right)$$

Ο παραπάνω δείκτης έχει δύο βασικά μειονεκτήματα:

(1) Δεν λαμβάνει υπόψη τη σχετική σπουδαιότητα των διαφόρων αγαθών, αλλά δίνει ίση βαρύτητα (σπουδαιότητα) σε όλα τα αγαθά

(2) Οι μονάδες που χρησιμοποιούνται για το χαρακτηρισμό των τιμών, όπως κιλά, γαλόνια, τόνοι κ.λπ., επηρεάζουν τις τιμές του δείκτη.

Παράδειγμα 5

Ο πίνακας δίνει τις τιμές (σε ευρώ) ορισμένων αγαθών κατά τα έτη 2011 και 2012. Να υπολογιστεί ο μέσος αριθμητικός των σχετικών τιμών.

Αγαθά	Τιμές		Σχετικές τιμές
	2011	2012	
	p_0	p_1	$\frac{p_1}{p_0}$
Α	2	4	2
Β	5	7	1.4
Γ	3	6	2
Δ	7	9	1.28
Ε	3	4	1.33
Σύνολο	20	30	8.01

Επομένως, ο μέσος αριθμητικός των σχετικών τιμών θα είναι:

$$P_{1/0} = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{p_1}{p_0} \right) = \frac{1}{5} 8.01 = 1.602 \text{ ή } 160.2\%$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θα χρησιμοποιηθούν δύο παραδείγματα επιχειρήσεων, ώστε να γίνουν κατανοητά, τα παραπάνω θεωρητικά δεδομένα. Το πρώτο, έχει να κάνει με εταιρεία πώλησης σωλήνων ονόματι PIPELINE. Το συγκεκριμένο, αποτελεί ένα πολύ καλό παράδειγμα, για να καταστήσουμε σαφή, την έννοια των προδιαγραφών καθώς επίσης και των κατανομών, στην διαδικασία παραγωγής. Το δεύτερο παράδειγμα που θα χρησιμοποιηθεί, είναι η εταιρεία παρασκευής παγωτών FROSTY. Ο λόγος που επιλέγεται μια εταιρεία παρασκευής παγωτών, είναι ότι οι πωλήσεις μεταξύ χειμώνα και καλοκαιριού, είναι τελείως διαφορετικές, καθώς το συγκεκριμένο προϊόν εμφανίζει έντονη εποχικότητα. Το παράδειγμα της συγκεκριμένης εταιρείας, είναι πλήρως εναρμονισμένο, με αυτό που εμείς θέλουμε να καταστήσουμε ξεκάθαρο, την εμφάνιση δηλαδή της εποχικότητας σε ένα προϊόν. Αντίθετα, οι σωλήνες, δεν εμφανίζουν καμία απολύτως εποχικότητα. Ξεκινώντας από την δημιουργία ερωτηματολογίων για καθεμία εκ των εταιριών θα αποκομίσουμε τα αναγκαία χαρακτηριστικά της αγοράς έχοντας έτσι τη δυνατότητα να οδηγηθούμε στα απαραίτητα συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά θα μας δώσουν την απάντηση στα ερωτήματα της μεγιστοποίησης της κερδοφορίας και της ελαχιστοποίησης του κόστους.

2.2 Έρευνα αγοράς

Στο κομμάτι αυτό θα γίνει έρευνα αγοράς, μέσω της δημιουργίας ερωτηματολογίων, τα οποία και θα μοιραστούν, στο εν δυνάμει πελατολόγιο των δύο εταιρειών. Σκοπός αυτών των ερωτηματολογίων, είναι να εξακριβωθεί ποιες είναι οι προτιμήσεις και οι προδιαγραφές, που το αγοραστικό κοινό απαιτεί να πληρούνται για το προϊόν, καθώς και να μπορέσει να γίνει, μια πρώτη πρόβλεψη της κατανάλωσης. Σε κάθε ερώτηση του ερωτηματολογίου, θα δοθούν τέσσερις δυνατές απαντήσεις. Για την εταιρεία παγωτών, τα ερωτηματολόγια θα μοιραστούν σε πελάτες σούπερ μάρκετ, ενώ για την εταιρεία παραγωγής σωλήνων, τα ερωτηματολόγια θα μοιραστούν σε εργολάβους, υδραυλικούς και λοιπούς τεχνίτες.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΠΑΓΩΤΩΝ FROSTY

1. Πόσο συχνά αγοράζετε οικογενειακή συσκευασία παγωτού;
   Α) Καθημερινά
   Β) 4–5 φορές την βδομάδα
   Γ) 2-3 φορές την βδομάδα
   Δ) Μία φορά την βδομάδα

2. Τι γεύση προτιμάτε;
   Α) Σοκολάτα
   Β) Βανίλια
   Γ) Φράουλα
   Δ) Ανάμικτο

3. Με ποιό κριτήριο επιλέγετε παγωτό;
   Α) Τιμή
   Β) Ποιότητα
   Γ) Ποσότητα

Δ) Γεύση

4. Πόσα λίτρα θέλετε να είναι η οικογενειακή συσκευασία;

   Α) 0.5 L

   Β) 1 L

   Γ) 1.5 L

   Δ) 2 L

5. Ποιόν μήνα ξεκινάτε να αγοράζετε παγωτό;

   Α) Απρίλιο

   Β) Μάιο

   Γ) Ιούνιο

   Δ) Αγοράζω παγωτό όλο τον χρόνο

6. Ποιόν μήνα σταματάτε να αγοράζετε παγωτό;

   Α) Αύγουστο

   Β) Σεπτέμβριο

   Γ) Οκτώβριο

   Δ) Αγοράζω παγωτό όλο τον χρόνο

Ανάλυση ερωτήσεων ερωτηματολογίου

1. Η ερώτηση αυτή έχει ως στόχο να μας δώσει μία πρώτη εντύπωση της κατανάλωσης.
2. Αναζητούμε τις γεύσεις τις οποίες προτιμούν οι καταναλωτές ώστε η παραγωγή μας να στραφεί στις ανάγκες της αγοράς.
3. Αναζητούμε τα χαρακτηριστικά που θα δώσουνε στα προϊόντα μας, ποιοτικό πλεονέκτημα έναντι του ανταγωνισμού.
4. Θα μας προσφέρει τις προδιαγραφές του συγκεκριμένου προϊόντος.
5. Αυτή η ερώτηση μαζί με την επόμενη στόχο έχουν να απαντήσουν στα ερωτήματα του ποια είναι η περίοδος κατανάλωσης καθώς και πως αυτή μεταβάλλεται από μήνα σε μήνα. Π.χ. αν το 40% των ερωτηθέντων απαντήσουν πως καταναλώνουν παγωτό όλο τον χρόνο αυτό σημαίνει πως το 40% της ζήτησης παραμένει σταθερό ενώ το υπόλοιπο 60% εμφανίζεται μόνο μία συγκεκριμένη περίοδο.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΣΩΛΗΝΩΝ PIPELINE

1. Τι ποσότητα σωλήνων χρησιμοποιείτε ετησίως;

   Α) Έως 100m

   Β) Από 100mέως 500m

   Γ) Από 500mέως 1000m

   Δ) Πάνω από 1000m

2. Από τι υλικό επιθυμείτε να είναι οι σωλήνες;

   Α) PVC

   Β) Χαλκός

   Γ) Χάλυβας

   Δ) Σίδηρος

3. Τι διαμέτρου σωλήνες χρησιμοποιείτε (υλικό PVC) ;

   Α) 5εκ.

   Β) 10εκ.

   Γ) 20εκ.

   Δ) 30εκ.

4. Τι διαμέτρου σωλήνες χρησιμοποιείτε (υλικό χαλκός) ;

   Α) 5εκ.

   Β) 10εκ.

   Γ) 20εκ.

   Δ) 30εκ.

5. Τι διαμέτρου σωλήνες χρησιμοποιείτε (υλικό χάλυβας) ;

   Α) 5εκ.

   Β) 10εκ.

   Γ) 20εκ.

   Δ) 30εκ.

6. Τι διαμέτρου σωλήνες χρησιμοποιείτε (υλικό σίδηρος) ;

   Α) 5εκ.

   Β) 10εκ.

   Γ) 20εκ.

   Δ) 30εκ.

7. Τι σφάλμα διασποράς είναι αποδεκτό για σωλήνες από PVC;

   Α) 1 χιλιοστό

   Β) 5 χιλιοστά

   Γ) 10 χιλιοστά

   Δ) 20 χιλιοστά

8. Τι σφάλμα διασποράς είναι αποδεκτό για σωλήνες από χαλκό;

   Α) 1 χιλιοστό

   Β) 5 χιλιοστά

   Γ) 10 χιλιοστά

   Δ) 20 χιλιοστά

9. Τι σφάλμα διασποράς είναι αποδεκτό για σωλήνες από χάλυβα;

   Α) 1 χιλιοστό

   Β) 5 χιλιοστά

   Γ) 10 χιλιοστά

   Δ) 20 χιλιοστά

10. Τι σφάλμα διασποράς είναι αποδεκτό για σωλήνες από σίδηρο;

    Α) 1 χιλιοστό

    Β) 5 χιλιοστά

    Γ) 10 χιλιοστά

    Δ) 20 χιλιοστά

11. Τι μήκος θεωρείτε πως πρέπει να έχουν οι σωλήνες ώστε να είναι εύχρηστοι κατά την μεταφορά τους;

    Α) 0.5m

    Β) 1m

    Γ) 2m

    Δ) 5m

Ανάλυση ερωτήσεων ερωτηματολογίου

1. Η ερώτηση αυτή έχει ως στόχο να μας δώσει μία πρώτη εντύπωση της κατανάλωσης.
2. Η ερώτηση αυτή καθώς και οι ερωτήσεις 3,4,5,6,7,8,9,10 και 11 θα μας προσφέρουν τις προδιαγραφές που το πελατολόγιό μας απαιτεί.

2.3 Προδιαγραφές κατά την παραγωγή και διαδικασία παραγωγής

Εφαρμογή 1:

Η εσωτερική διάμετρος (σε εκατοστά) των σωλήνων από χαλκό που παράγει το εργοστάσιο του παραδείγματός μας, ακολουθεί την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(10, \sigma^2)$. Μετά την μελέτη των ερωτηματολογίων μας καταλήξαμε πως οι σωλήνες με εσωτερική διάμετρο εκτός των ορίων 10 ± 0.1 εκατοστά θα ανακυκλώνονται, καθώς θεωρούνται ακατάλληλοι βάσει των προδιαγραφών που οι πελάτες της εταιρείας μας απαιτούν.

Α) Αν τα μηχανήματα του εργοστασίου κατά την παραγωγή των σωλήνων έχουν $\sigma = 0.1$, να βρεθεί η πιθανότητα να ανακυκλωθούν ακριβώς 3 σωλήνες σε ένα δείγμα 5 σωλήνων που επιλέχθηκε τυχαία από την παραγωγή του εργοστασίου.

Β) Πόση θα πρέπει να γίνει η διακύμανση του μήκους της εσωτερικής διαμέτρου των παραγόμενων σωλήνων (η μέση τιμή παραμένει σταθερή) έτσι ώστε η πιθανότητα ανακύκλωσης ενός σωλήνα να είναι 0,06;

Α) Έχουμε ότι $\sigma = 0.1$. Θεωρούμε X τυχαία μεταβλητή, όπου *X: μήκος εσωτερικής διαμέτρου ενός σωλήνα.*

Έστω Y τυχαία μεταβλητή, όπου *Y: πλήθος σωλήνων που ανακυκλώνονται στο δείγμα των 5 σωλήνων.*

$$Y \sim B(5, p)$$

όπου

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}(\text{"X≤10-0.1"v"X≥10+0.1"}) = \mathbb{P}(X \leq 10 - 0.1) + \mathbb{P}(X \geq 10 + 0.1) \\ &= \mathbb{P}(X \leq 10 - 0.1) + \big(1 - \mathbb{P}(X \leq 10 - 0.1)\big) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X - 10}{0.1} \leq \frac{10 - 0.1 - 10}{0.1}\right) + 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X - 10}{0.1} \leq \frac{10 + 0.1 - 10}{0.1}\right) \\ &= \Phi(-1) + 1 - \Phi(1) = 1 - \Phi(1) + 1 - \Phi(1) = 2 - 2\Phi(1) \\ &= 2 - 2 \times 0.8413 \approx 0.32 \end{aligned}$$

Άρα $Y \sim B(5{,}0.32)$. Οπότε

$$f_Y(y) = \binom{5}{y}(0.32)^y(0.68)^{5-y}$$

Θέλουμε $\mathbb{P}(Y = 3) = f_Y(3) = \binom{5}{y}(0.32)^3(0.68)^{5-3} = 10 \times (0.32)^3(0.68)^2$

Άρα σε ένα τυχαίο δείγμα 5 σωλήνων η πιθανότητα να ανακυκλώσουμε τους 3 εξ αυτών είναι ίση περίπου με 15%. Σε αυτή την περίπτωση (δηλαδή αν σ = 0.1) τα μηχανήματά μας είναι ιδιαίτερα αναξιόπιστα και η εταιρεία θα πρέπει άμεσα να προβεί σε αναβάθμιση εξοπλισμού.

Β) Θέλουμε

$$\mathbb{P}(\text{"X}\leq\text{10-0.1"}\vee\text{"X}\geq\text{10+0.1"}) = 0.06 \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{P}(X \leq 10 - 0.1) + \mathbb{P}(X \geq 10 + 0.1) = 0.06 \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{P}(X \leq 10 - 0.1) + \big(1 - \mathbb{P}(X \leq 10 - 0.1)\big) = 0.06 \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{X - 10}{0.1} \leq \frac{10 - 0.1 - 10}{0.1}\right) + 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X - 10}{0.1} \leq \frac{10 + 0.1 - 10}{0.1}\right) = 0{,}06 \Leftrightarrow$$

$$\Phi\left(-\frac{0.1}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) = 0.06 \Leftrightarrow$$

$$1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) = 0.06 \Leftrightarrow 2 - 2\Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) = 0.06 \Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) = 1.94$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) = 0.97 \Rightarrow \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) = \Phi(1.88) \Rightarrow \frac{0.1}{\sigma} = 1.88 \Rightarrow \sigma = \frac{0.1}{1.88} \approx 0.053$$

Άρα η εταιρεία θα πρέπει να προχωρήσει σε αγορά μηχανημάτων με δυνατότητα ακρίβειας παραγωγής σ ≤ 0.05 αν θέλει να ανακυκλώνει λιγότερο από το 6% των σωλήνων που παράγει. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να γίνει μια μελέτη κόστους ωφελείας ώστε να καταλήξουμε αν η επένδυση της εταιρείας σε καλύτερο εξοπλισμό είναι προτιμότερη ή αν το κόστος ανακύκλωσης είναι κατάλληλα μικρό ώστε να μην χρειάζεται να προχωρήσουμε σε τέτοια επένδυση.

Εφαρμογή 2:

Η εταιρεία παραγωγής παγωτών FROSTY διαθέτει στο εμπόριο οικογενειακά παγωτά σε συσκευασίες των $500gr$ (καθαρό βάρος). Το ινστιτούτο προστασίας καταναλωτών, για να διαπιστώσει μήπως η εταιρεία εξαπατά το κοινό (δηλαδή οι συσκευασίες έχουν κατά μέσο όρο καθαρό βάρος μικρότερο των $500gr$) έλαβε δείγμα 10 συσκευασιών από το οποίο προέκυψαν τα εξής καθαρά βάρη: 503 ,497 ,498 ,502 ,495 ,495 ,502 ,505 ,490 ,504. Αν υποθέσουμε ότι το καθαρό βάρος της συσκευασίας ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\theta, 25)$ τότε:

Α) Σε επίπεδο σημαντικότητας (μέγεθος) 10% να ελεγχθεί εάν η εταιρεία εξαπατά ή όχι το κοινό.

Β) Ας υποθέσουμε ότι $\theta = 490$ (δηλαδή η εταιρεία μας εξαπατά το κοινό). Χρησιμοποιώντας έλεγχο της μορφής του ερωτήματος (α), ποια είναι η πιθανότητα να μην αποκαλυφθεί η απάτη;

Γ) Χρησιμοποιώντας τον ίδιο έλεγχο, ποια είναι η πιθανότητα να κατηγορηθεί άδικα η εταιρεία;

Α) Κατά μέσο όρο το βάρος των 10 συσκευασιών είναι:

$$\bar{X} = \frac{503 + 497 + \cdots + 504}{10} = 499.1 < 500$$

Ορίζω θ το μέσο βάρος συσκευασιών που παράγει η εταιρεία

Έχουμε για $\theta < 500$ η εταιρεία εξαπατά και για $\theta = 500$ (ή $\theta \geq 500$) η εταιρεία δεν εξαπατά. Οπότε έχουμε το πρόβλημα:

$(\Pi 3') H_0 : \theta = 500 \quad H_1 : \theta < 500$ ή

$(\Pi 3) H_0 : \theta \geq 500 \quad H_1 : \theta < 500$

Οπότε έχουμε τον έλεγχο:

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & (\alpha\pi\acute{o}\rho\rho\iota\psi\eta\ H_0)\ \ Z < -z_\alpha \quad (\varepsilon\xi\alpha\pi\alpha\tau\acute{\alpha}) \\ 0, & (\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}\ H_0)\ \ Z \geq z_\alpha \quad (\delta\varepsilon\nu\ \varepsilon\xi\alpha\pi\alpha\tau\acute{\alpha}) \end{cases}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma} = \frac{(499.1 - 500)}{5}\sqrt{10} = -0.56$$

$$z_\alpha = z_{0.1} = 1.28$$

Επειδή $-0.59 > -1.28 \Rightarrow Z > -z_a \Rightarrow \varphi(\tilde{x}) = 0$ έχουμε αποδοχή της $H_0 \Rightarrow$ με βάση τα συγκεκριμένα δεδομένα, σε επίπεδο σημαντικότητας *α=10%* δεν υπάρχει ένδειξη ότι η εταιρεία εξαπατά το κοινό.

B)

$$\mathbb{P}(\nu\alpha\ \mu\eta\nu\ \alpha\pi o\kappa\alpha\lambda\upsilon\varphi\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \eta\ \alpha\pi\acute{\alpha}\tau\eta\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ \eta\ \varepsilon\tau\alpha\iota\rho\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \sigma\upsilon\sigma\kappa\varepsilon\upsilon\acute{\alpha}\zeta\varepsilon\iota\ \sigma\upsilon\sigma\kappa\varepsilon\upsilon\alpha\sigma\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \tau\omega\nu\ 490gr)$$

$$= \mathbb{P}_{\theta=490}(\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}\ H_0) = \beta(490) = \mathbb{P}_{\theta=490}(Z \geq -z_a)$$

$$= \mathbb{P}_{\theta=490}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma} \geq -z_a\right) = \mathbb{P}_{\theta=490}\left(\bar{X} \geq \theta_0 - z_a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\theta=490}\left(\frac{\bar{X} - 490}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\theta_0 - 490 - z_a\,\sigma/\sqrt{n}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\theta=490}\left(Z^* \geq \frac{10\sqrt{10}}{5} - 1.28\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\theta=490}(Z^* \geq 6.32 - 1.28)$$

$$= \mathbb{P}_{\theta=490}(Z^* \geq 5.04)$$

Από πίνακες έχουμε ότι $\mathbb{P}(Z^* > 3.99) \approx 33 \times 10^{-7} \approx 0$

Οπότε πρακτικά $\mathbb{P}_{\theta=490}(\varepsilon\xi\alpha\pi\alpha\tau\acute{\alpha}) \approx 0$

Άρα σε καμία περίπτωση δεν προτείνουμε στην εταιρεία να βάζει κατά μέσο όρο 490gr παγωτού στις συσκευασίες των 500grκαθώς είναι βέβαιο πως θα αποκαλυφθεί από τις καταναλωτικές οργανώσεις.

Αν *θ=495* η πιθανότητα να μην αποκαλυφθεί είναι ***0.031≈3%***

Όπως γίνεται αντιληπτό σε καμία περίπτωση δεν προτείνεται στην εταιρεία να εξαπατήσει το αγοραστικό κοινό.

Γ) $\mathbb{P}(\textit{να κατηγορηθεί άδικα η εταιρεία}) = \mathbb{P}_{\theta=500}(\textit{απόρριψη } H_0) = \alpha = 0.10$

Άρα υπάρχει πιθανότητα *10%* να κατηγορηθεί άδικα η εταιρεία.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι σε καμία περίπτωση η εταιρία μας δεν θα πρέπει να επιχειρήσει να εξαπατήσει το αγοραστικό κοινό καθώς είναι βέβαιο πως αυτό θα γίνει αντιληπτό από τις καταναλωτικές οργανώσεις. Ταυτόχρονα όμως συμπεραίνουμε πως η ακρίβεια των μηχανημάτων μας είναι αρκετά καλή ώστε η πιθανότητα η εταιρία να κατηγορηθεί άδικα να είναι πολύ μικρή.

Εφαρμογή 3:

Ανταγωνιστική εταιρεία παγωτών, ισχυρίζεται ότι η τυπική απόκλιση της ποσότητας ζάχαρης στα παγωτά της σε mg είναι *10*. Σε τυχαίο δείγμα *23* οικογενειακών παγωτών προέκυψε τυπική απόκλιση *12.16*. Εάν η ποσότητα ζάχαρης ακολουθεί κανονική κατανομή, να ελεγχθεί ο ισχυρισμός της εταιρείας σε επίπεδο σημαντικότητας (μέγεθος) 5%.

Η ποσότητα ζάχαρης ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με μ = άγνωστο, $n=23$
Δειγματική τυπική απόκλιση: *12,16=S*

Έχουμε το πρόβλημα $(\Pi 1) H_0\colon\ \sigma = 10 = \sigma_0 H_1\colon\ \sigma \neq 10 \ \Leftrightarrow$
$H_0\colon\ \sigma^2 = 100 = \sigma_0^2 H_1\colon\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2 = 100$

Ο έλεγχος είναι της μορφής

$$(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \sigma_0^2 \notin I \\ 0, & \sigma_0^2 \in I \end{cases}$$

$$I = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{x^2_{n-1,{}^{\alpha}/_{2}}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{x^2_{n-1,1-{}^{\alpha}/_{2}}} \right]$$

$S = 12.16$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = (n-1)S^2 = 22 \times 12.16^2$$

Οπότε θέλουμε $x^2_{22,0,025} = 36.781$ και $x^2_{22,0.975} = 10.982$

Άρα το Δ.Ε. είναι

$I = [88.44,296.22]$

$\sigma_0^2 = 100 \in I$ άρα έχουμε αποδοχή της H_0

Άρα από τα δεδομένα του δείγματός μας είμαστε υποχρεωμένοι να αποδεχθούμε τον ισχυρισμό της ανταγωνίστριάς μας εταιρείας δηλαδή ότι η τυπική απόκλιση (σ) της ζάχαρης είναι 10. Οπότε δεν μπορούμε να προχωρήσουμε σε πιθανή καταγγελία της ανταγωνίστριας εταιρίας για ψευδή χαρακτηριστικά στα προϊόντα της.

Εφαρμογή 4:

Η εταιρεία γάλακτος FROSTYστην προσπάθειά της να διεισδύσει στην αγορά του παγωτού πολυτελείας, επενδύει σε μια μικρή πιλοτική γραμμή παραγωγής δύο προϊόντων της κατηγορίας αυτής. Πρόκειται για οικογενειακές συσκευασίες παγωτού κρέμας με άρωμα πραγματικής βανίλιας (προϊόν Α) και παγωτού με πραγματική σοκολάτα (προϊόν Β). Αν και είναι φανερό ότι η παραγωγική διαδικασία είναι αρκετά πολύπλοκη, θα θεωρήσουμε εδώ ότι για την παραγωγή αυτών των προϊόντων η εταιρεία δεσμεύει ανά εβδομάδα ένα μικρό μέρος των παραγωγικών της συντελεστών : γάλα (βασική πρώτη ύλη), εργασία (παραλαβή πρώτων υλών, ποιοτικός έλεγχος, συσκευασία, διανομή, κ.τ.λ.), καθώς επίσης και διαθεσιμότητα στη μονάδα παστερίωσης και ψύξης.

Στον πίνακα που ακολουθεί βλέπουμε τα δεδομένα του προβλήματος που έχουν προσδιοριστεί κι αφορούν την παραγωγή ενός τεμαχίου του κάθε προιόντος:

	Προϊόν Α	Προϊόν Β	Διαθεσιμότητα
Γάλα (lit)	1	1	550
Εργασία (min)	1	3	1000
Επεξεργασία (min)	2	5	2000
Μέγιστη ζήτηση	400	Απεριόριστη	
Κέρδος/τεμάχιο	150 χ.μ.	200 χ.μ.	

Αναζητάμε το εβδομαδιαίο πρόγραμμα παραγωγής που θα μεγιστοποιήσει το συνολικό κέρδος.

Το μαθηματικό πρότυπο για το πρόβλημα της εταιρείας είναι το εξής:

MaximizeZ= $(150X_1 + 200X_2)$

κάτω από τους περιορισμούς:

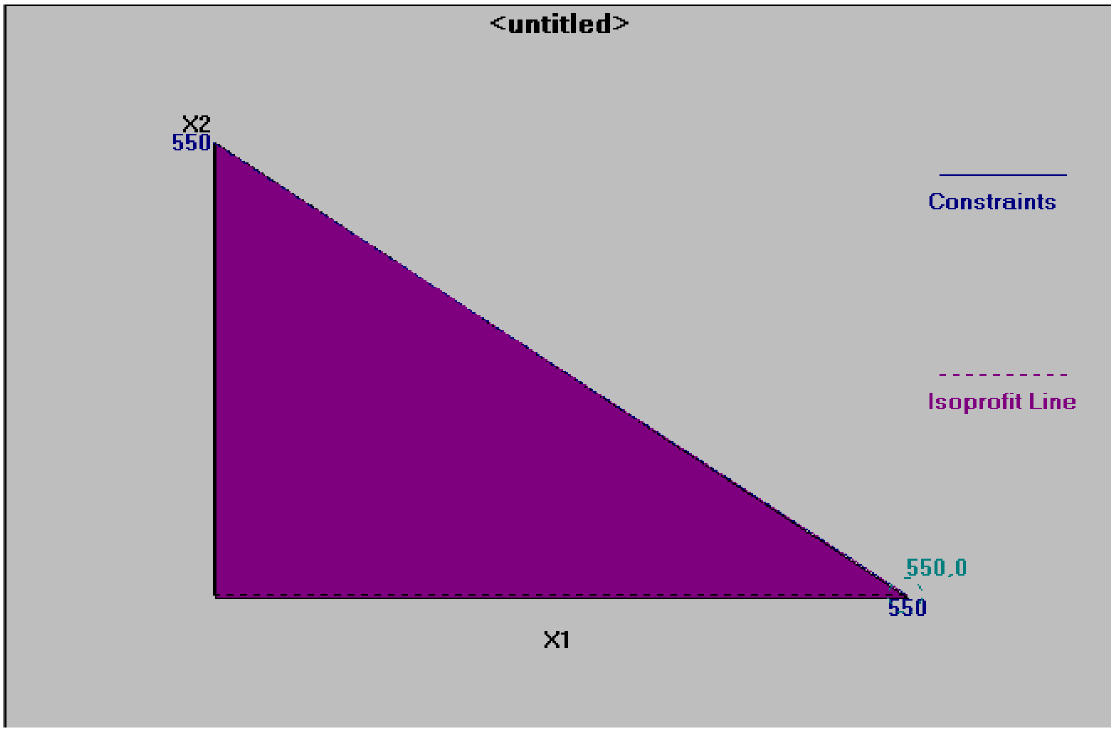
1) $X_1 + X_2 \leq 550$ (διαθέσιμο γάλα, lit)
2) $X_1 + X_2 \leq 1000$ (χρόνος εργασίας, min)
3) $2X_1 + 5X_2 \leq 2000$ (διαθεσιμότητα μονάδων,min)
4) $X_1 \leq 400$ (ζήτηση αγοράς)
5) $X_1 , X_2 \geq 0$

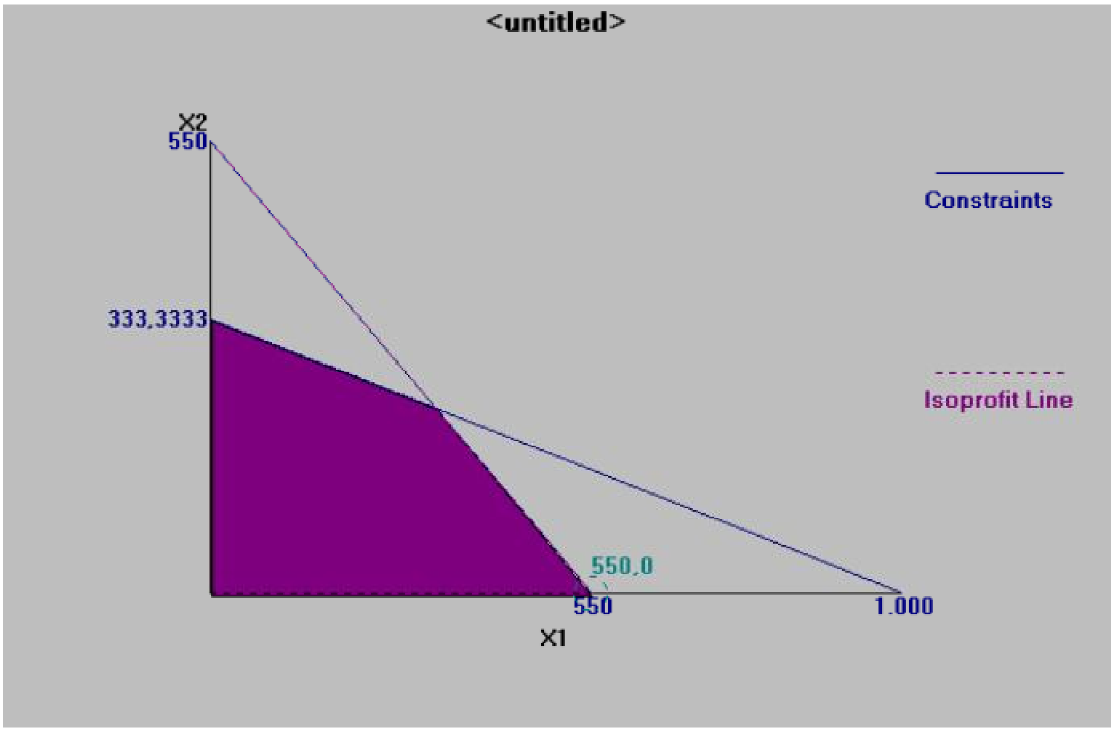
Είναι π.γ.π. διότι

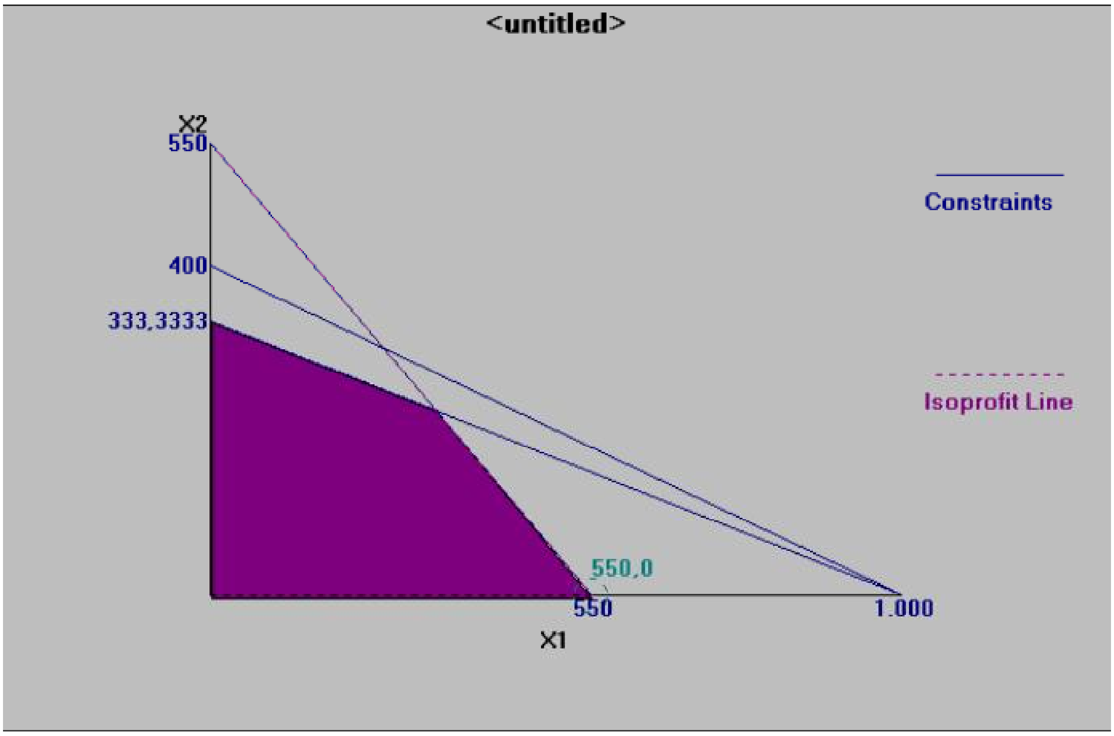
-ο αντικειμενικός στόχος είναι μια γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης,

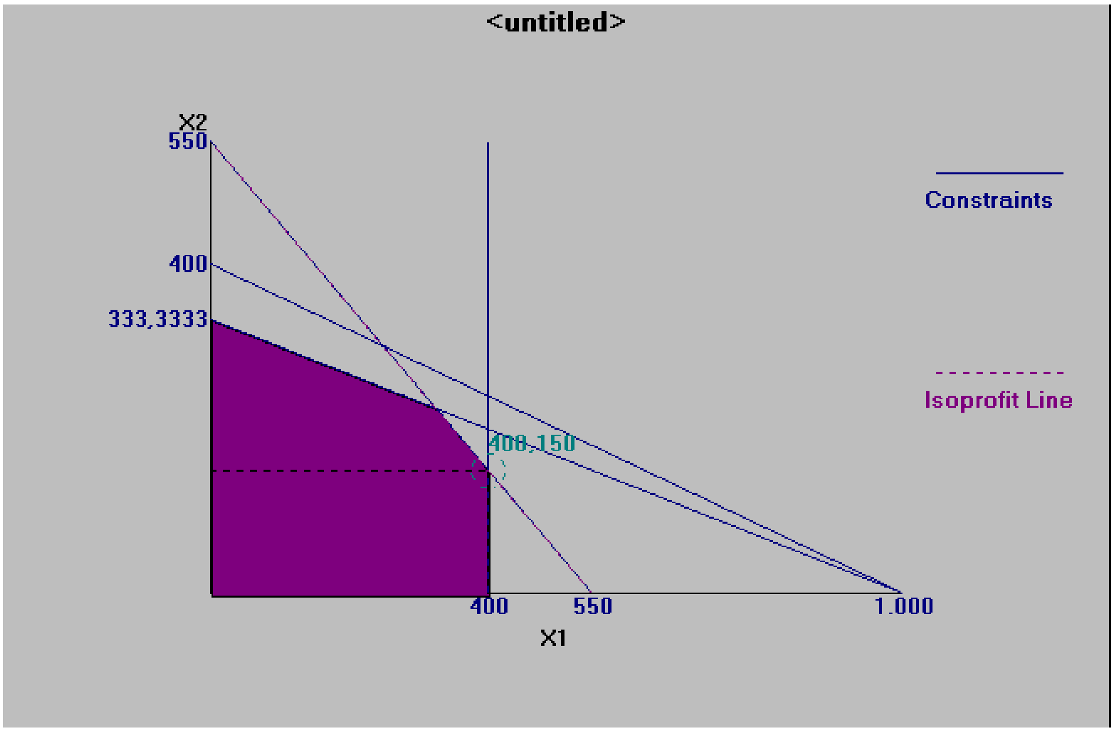
-οι περιορισμοί είναι ένα σύστημα γραμμικών ανισοτήτων των μεταβλητών απόφασης

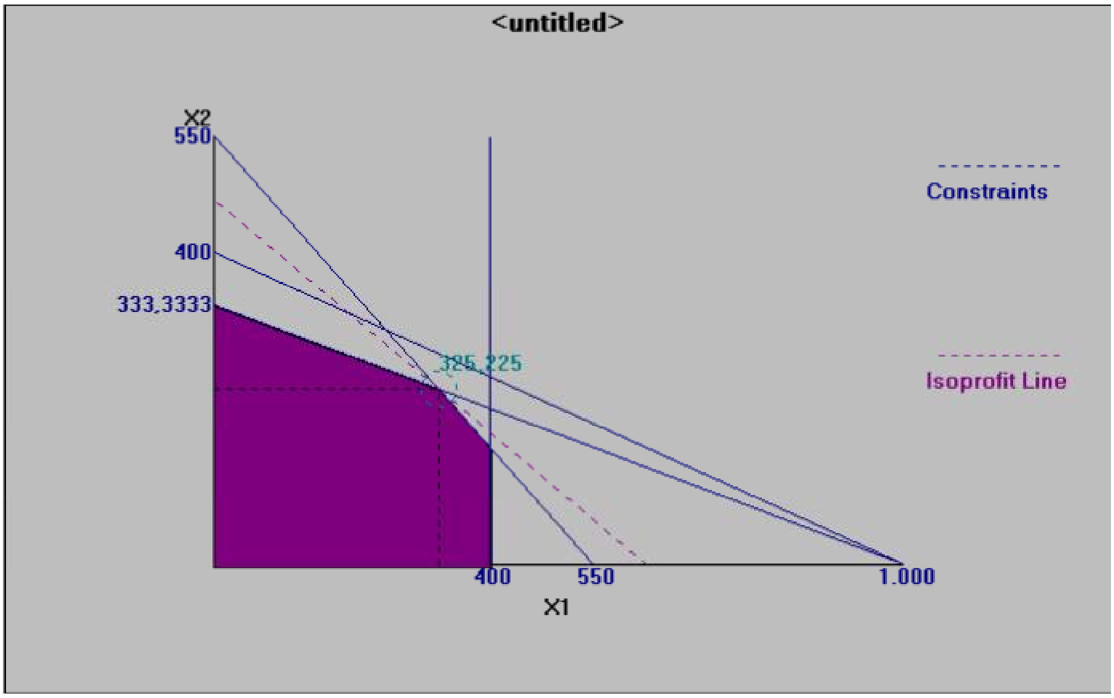
Ένας περιορισμός π.γ.π. χαρακτηρίζεται ως **δεσμευτικός** αν και μόνον αν η άριστη λύση τον καθιστά ισότητα. Στην αντίθετη περίπτωση ονομάζεται **χαλαρός**.




<untitled>
X2
550
333,3333
Constraints
Isoprofit Line
550,0
550
1.000
X1


<untitled>
X2
550
400
333,3333
Constraints
Isoprofit Line
550,0
550
1.000
X1





Η άριστη λύση είναι μια από τις κορυφές της εφικτής περιοχής (αποδεικνύεται και μαθηματικά) κάτι που είναι εξαιρετικά σημαντικό.

Και τούτο διότι με τον τρόπο αυτό περιορίζεται δραστικά το πλήθος των εφικτών λύσεων που πρέπει να διερευνήσουμε για τον εντοπισμό της. Αρκεί να υπολογίσουμε τις τιμές που παίρνει η αντικειμενική συνάρτηση μόνο για τις κορυφές της εφικτής περιοχής (που είναι πεπερασμένου πλήθους).

Κορυφή	(X_1, X_2)	Z	
Α	(0,0)	0	
Β	(400,0)	60.000	
Γ	(400,150)	9.0000	
Δ	(325,225)	93.750	**Άριστη**
Ε	(0,1000/3)	200.000/3	

Άρα η βέλτιστη εβδομαδιαία παραγωγή για την εταιρεία μας είναι 325 συσκευασίες παγωτού κρέμας με άρωμα πραγματικής βανίλιας και 225 συσκευασίες παγωτού με πραγματική σοκολάτα. Η παραγωγή αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα τα εβδομαδιαία κέρδη της εταιρείας μας να ανέρχονται σε 93.750 ευρώ. Οπότε η πρόταση μας προς την εταιρία είναι να ακολουθήσει ακριβώς αυτή την παραγωγική μέθοδο.

2.4 Πώληση

Εφαρμογή 5:

Τα στοιχεία του παρακάτω πίνακα, αναφέρονται στην κατανάλωση σε χιλιάδες ευρώ του παγωτού της εταιρείας μας, στο υπό μελέτη σούπερ μάρκετ το αντίστοιχο έτος (Y_t) και στα αντίστοιχα χρήματα που δαπανήθηκαν για τη διαφήμιση του προϊόντος σε όλη τη χώρα (X_t) για την περίοδο 1997-2012.

Έτος	Y_t	X_t	$\widehat{Y_t}$	$\widehat{u_t}$
T	Αξία κατανάλωσης παγωτού (χιλιάδες ευρώ)	Δαπάνη για διαφήμιση (χιλιάδες ευρώ)	Υπολογισμένες τιμές	Κατάλοιπα
1997	5.121	105.508	5.094	0.026
1998	4.134	107.497	5.169	-1.035
1999	4.653	111.875	5.333	-0.679
2000	5.622	124.676	5.814	-0.191
2001	5.499	130.118	6.017	-0.518
2002	6.453	142.140	6.469	-0.016
2003	7.093	155.338	6.964	0.129
2004	8.907	171.456	7.568	1.338
2005	8.625	182.420	7.980	0.644
2006	9.204	192.895	8.373	0.831
2007	9.647	204.164	8.796	0.851
2008	10.167	221.908	9.461	0.705
2009	9.961	240.471	10.158	-0.197
2010	10.580	267.849	11.185	-0.605
2011	10.658	289.450	11.995	-1.337
2012	13.139	318.550	13.087	0.052

Στον πίνακα δίνονται επίσης οι υπολογισμένες τιμές $\widehat{Y_t}$, και τα κατάλοιπα $\widehat{u_t}$ τα οποία υπολογίστηκαν με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων όπως φαίνεται παρακάτω:

$\Sigma Y = 129.463$ $\Sigma X^2 = 617645.622$ $\Sigma x^2 = 67706.579$

$\Sigma X = 2966.315$ $\Sigma Y^2 = 1151.018$ $\Sigma xy = 2540.196$

$\Sigma XY = 26541.949$ $\bar{X} = 185.394$ $\Sigma y^2 = 103.476$

$T = 16$ $\bar{Y} = 8.091$

Αντικαθιστώντας τις σχετικές τιμές έχουμε:

$\widehat{\beta_1}$ = 0,0375

Και $\widehat{\beta_0}$ = 1,136

Επομένως, η συνάρτηση κατανάλωσης του παγωτού της εταιρείας μας είναι:

$$\widehat{Y_t} = 1.136 + 0.0375\, X_t$$

Άρα η δυναμική των προϊόντων της εταιρείας μας η οποία είναι ίση με το $\widehat{\beta_0}$ είναι 1.136. Δηλαδή αν η εταιρεία μας δεν δαπανήσει ούτε ένα ευρώ για την διαφήμιση των παγωτών της περίπου 1136 ευρώ θα είναι η κατανάλωση στο εν λόγω σούπερ μάρκετ μέσα σε ένα χρόνο, που θα έχουν τα προϊόντα της εταιρείας μας. Η απόδοση της διαφήμισης είναι ίση με το $\widehat{\beta_1}$ δηλαδή για κάθε 1000 ευρώ που δαπανά η εταιρεία μας για διαφήμιση, η κατανάλωση των παγωτών στο εν λόγω σούπερ μάρκετ αυξάνεται κατά 37.5 ευρώ.

Αν λοιπόν στο σύνολο των σούπερ μάρκετ στα οποία πωλούνται τα προϊόντα της εταιρείας για κάθε 1000 ευρώ διαφήμισης η κατανάλωση αυξάνεται συνολικά λιγότερο από 1000 ευρώ τότε σε καμία περίπτωση δεν συμφέρει την εταιρεία μας να διαφημίσει τα προϊόντα της. Αν τώρα η συνολική κατανάλωση αυξάνεται περισσότερο από 1000 ευρώ, η εταιρεία μας θα πρέπει να προχωρήσει στην εξής ανάλυση. Κόστος παραγωγής + κόστος διαφήμισης καλύπτονται από την επιπλέον κατανάλωση; Αν ναι τότε η εταιρεία μας θα πρέπει να διαθέσει το μέγιστο δυνατό ποσό στην διαφήμιση. Αν όχι τότε η διαφήμιση θεωρείται ασύμφορη.

Αν η εταιρεία μας έχει καθαρό κέρδος 20% επί των πωλήσεων και για κάθε 1000 ευρώ διαφήμισης οι συνολικές πωλήσεις αυξάνονται κατά 3500 ευρώ τότε έχουμε 3500 x 0.2 = 700 ευρώ καθαρό κέρδος. Από την στιγμή που έχουμε ξοδέψει 1000 ευρώ για διαφήμιση η εταιρεία μας έχει ζημιωθεί κατά 300 ευρώ άρα η επιλογή της διαφήμισης θεωρείται ασύμφορη. Αν για κάθε 1000 ευρώ διαφήμισης οι πωλήσεις αυξάνονταν κατά 5500 ευρώ τότε 5500x0.2 = 1100 καθαρά κέρδη και από τη στιγμή που δαπανήθηκαν 1000 ευρώ για διαφήμιση, η εταιρεία μας κέρδισε 100 επιπλέον ευρώ καθαρών κερδών. Άρα η διαφήμιση θεωρείται προσοδοφόρα.

Εφαρμογή 6:

Η τιμή λιανικής πώλησης μιας μεγάλης συσκευασίας οικογενειακού παγωτού κατά τα έτη 2013 και 2014 ήταν 12 και 14€ αντίστοιχα. Αν πάρουμε το έτος 2013 ως έτος βάσης, να υπολογιστεί η σχετική τιμή.

Η σχετική τιμή θα είναι:

$$P_{1/0} = \frac{p_1}{p_0} \cdot 100\% = \frac{14}{12} \cdot 100\% = 117\%$$

Αυτό σημαίνει ότι το 2014, με βάση το έτος 2013, η τιμή μιας μεγάλης συσκευασίας οικογενειακού παγωτού αυξήθηκε κατά 17%.

Εφαρμογή 7:

Η παραγωγή σωλήνων (σε km) σε ένα εργοστάσιο στο νομό Κοζάνης κατά τα έτη 2011 και 2012 ήταν 4.200 και 4.800 km αντίστοιχα. Να υπολογιστεί ο δείκτης σχετικών ποσοτήτων με βάση το έτος 2011.

Ο δείκτης σχετικών ποσοτήτων ή όγκων δίνεται από τον τύπο:

$$Q_{1/0} = \frac{q_1}{q_0} \cdot 100\% = \frac{4800}{4200} \cdot 100\% = 114\%$$

Η τιμή 114% σημαίνει ότι η παραγωγή των σωλήνων κατά το έτος 2012 αυξήθηκε κατά 14% σε σύγκριση με το έτος 2011.

Εφαρμογή 8:

Ο πίνακας δείχνει τις μέσες τιμές χονδρικής πώλησης τεσσάρων ειδών σωλήνα κατά τα έτη 2008 και 2010.Να υπολογιστεί ο δείκτης των συνολικών τιμών για το έτος 2010, με βάση το έτος 2008.

Ο δείκτης συνολικών τιμών θα είναι:

Σωλήνες	Τιμές σωλήνων	
	2008	2010
	p_0	p_1
Α	24	30
Β	30	36
Γ	36	39
Δ	12	18
Σύνολο	102	123

$$P_{1/0} = \frac{\Sigma_{p_1}}{\Sigma_{p_0}} = \frac{123}{102} = 1.2058 \text{ ή } 120.58\%$$

Δηλαδή οι τιμές χονδρικής πώλησης κατά το έτος 2010 είναι 20.58% μεγαλύτερες του 2008

2.5 Συμπεράσματα

Έπειτα από την εφαρμογή όλων των παραπάνω μαθηματικών εργαλείων, οδηγούμαστε σε μια σειρά συμπερασμάτων στον τομέα των προδιαγραφών, στον τομέα της παραγωγής και τέλος στον τομέα της πώλησης.

Στον τομέα των προδιαγραφών, οι απαντήσεις των ερωτηματολογίων είναι αυτές που θα παίξουν καθοριστικό ρόλο. Στην πραγματικότητα, αυτές θα αποτελέσουν και την κατευθυντήρια γραμμή για τις προδιαγραφές που πρέπει να πληρούν τα προϊόντα, όπως αυτές έχουν οριστεί από την εταιρεία. Θα πρέπει να σημειωθεί πως χωρίς την χρήση των ερωτηματολογίων, η εταιρεία θα είχε ελλιπή γνώση στο κομμάτι της αγοραστικής δυναμικής, κάτι που θα οδηγούσε κατά συνέπεια σε λανθασμένη εκτίμηση όσον αφορά τη θέσπιση των κατάλληλων προδιαγραφών για το προϊόν.

Στον τομέα της παραγωγής διαπιστώνουμε ότι εργαλεία όπως κατανομές, διαστήματα εμπιστοσύνης και έλεγχοι υποθέσεων είναι αυτά τα οποία θα μας δώσουν σημαντικές πληροφορίες, τόσο για το κομμάτι που αφορά την παραγωγική διαδικασία, όσο και για το αν και κατά πόσο είναι προς το συμφέρον μας ως εταιρεία, η επένδυση σε αρτιότερο εξοπλισμό.

Στον τομέα της πώλησης έγινε κατανοητό μέσω της έρευνάς μας ότι η μελέτη χρονοσειρών και η μέθοδος παλινδρόμησης παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες για τη μελλοντική πορεία των πωλήσεών μας καθώς και για τη σχέση μεταξύ πωλήσεων και διαφήμισης. Από την εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων λαμβάνουμε μια εξίσωση, που για δεδομένο διαφημιστικό κόστος μας δίνει την αντίστοιχη κατανάλωση. Τέλος, οι αριθμοδείκτες μας παρέχουν δευτερεύουσες πληροφορίες, οι οποίες αναλύουν την κερδοφορία της εταιρείας μας.

Βιβλιογραφία

1. Κιόχος Π. , 1993, *Στατιστική*, Εκδόσεις Interbooks, Αθήνα.

2. Κιόχος Π. , 1993, *Περιγραφική στατιστική*, Εκδόσεις Interbooks, Αθήνα.

3. Κολυβά-Μαχαίρα Φ. , Μπόρα-Σέντα Ε. , 1998 *Στατιστική-Θεωρία & Εφαρμογές*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

4. Βενέτης Ι. , 2013, *Εισαγωγή στην Οικονομετρία*, Εκδόσεις Gotsis, Πάτρα.

5. Τζαβαλής Η. , 2008, *Οικονομετρία*, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών Εταιρεία Ο.Π.Α. Α.Ε., Αθήνα.

6. Δάρας Τ. , Σύψας Π. , 2010, *Πιθανότητες και Στατιστική*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

7. Ρούσσας Γ. , 1995, *Στατιστική Συμπερασματολογία, Τόμος ΙΙ*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

8. Κούτρας Μ. , 2004, *Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Τόμος Ι*, 2η Έκδοση, Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα.

9. Κούτρας Μ. , 2005, *Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Τόμος ΙΙ*, 2η Έκδοση, Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα.

10. Χρήστος Γ. , 2002, *Εισαγωγή στην Οικονομετρία*, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.

11.Αθανασόπουλος Κ. , Γεωργόπουλος Α. , Μπάλλας Α., 1995, *Ανάλυση Λογιστικών Καταστάσεων*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

12. Συριόπουλος Κ. , 1998, *Ανάλυση και Έλεγχοι Μονομεταβλητών Χρηματοοικονομικών Χρονολογικών Σειρών*, Εκδόσεις Τυπωθήτω, Αθήνα.