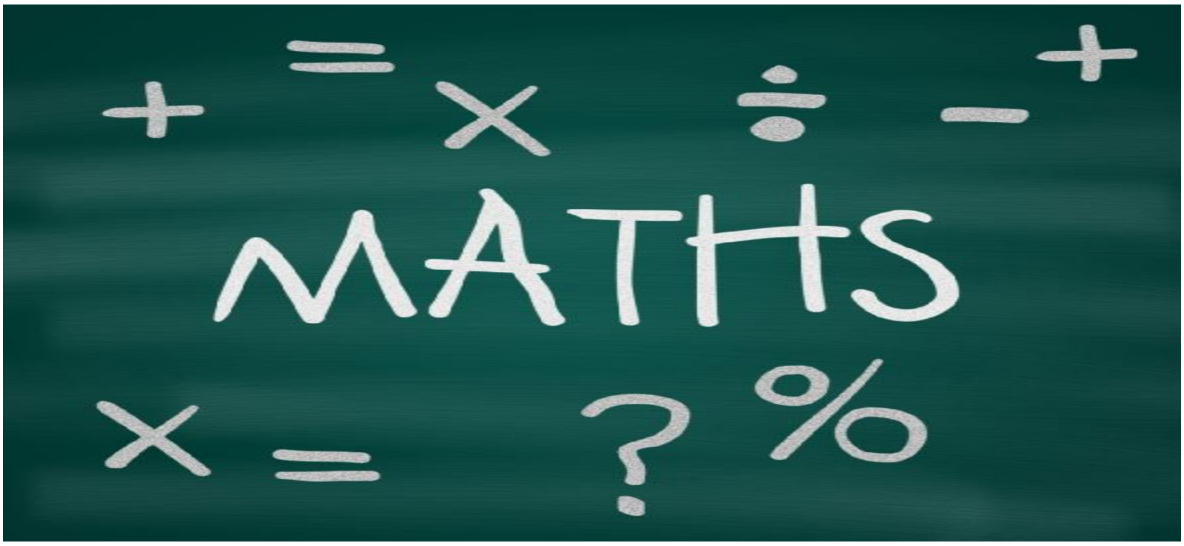
Τεχνολογικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Σχολή: Διοίκησης Και Οικονομίας

Τμήμα: Διοίκησης επιχειρήσεων

Πτυχιακή εργασία

Θέμα: Εφαρμογές των γενικών μαθηματικών στη διοίκηση και την οικονομία



Φοιτητής: Νεκτάριος-Ανάργυρος Ζαραφωνίτης

Εποπτεύων Καθηγητής : Γεωργία Βάσιου

ΠΑΤΡΑ 2016

Πρόλογος

Η πτυχιακή σχετίζεται με τις εφαρμογές των γενικών μαθηματικών στη διοίκηση και στην οικονομία. Δηλαδή το πώς τα γενικά μαθηματικά (συναρτήσεις, πίνακες, παράγωγοι, ολοκληρώματα) συμβάλουν στην επίλυση διοικητικών και οικονομικών προβλημάτων. Η επιλογή του θέματος αυτού έγινε με βάση το γεγονός ότι συνδιάζει τα μαθηματικά με τη διοίκηση και τα οικονομικά. Πράγμα αρκετά καλό καθώς και οι τρείς κλάδοι έχουν αρκετά μεγάλο ενδιαφέρων.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Το θέμα της εργασίας είναι οι εφαρμογές των γενικών μαθηματικών στη διοίκηση και στην οικονομία. Πιο συγκεκριμένα το πώς κεφάλαια των γενικών μαθηματικών όπως οι πίνακες, οι συναρτήσεις (εξισώσεις με έναν άγνωστο, όρια, ακρότατα), παράγωγοι, ολοκληρώματα εφαρμόζονται πάνω στον τομέα της διοίκησης επιχειρήσεων καθώς και των οικονομικών, με σκοπό την επίλυση προβλημάτων διοικητικού και οικονομικού περιεχομένου καθώς και την ανάδειξη της σημασίας αυτών στην επίτευξη αυτού του σκοπού. Η μέθοδος που ακολουθήθηκε σε αυτήν την εργασία είναι η αναζήτηση παραδειγμάτων από διάφορα επιστημονικά βιβλία οικονομικού περιεχομένου, η καταγραφή και ανάλυση αυτών με σκοπό την όσο το δυνατόν καλύτερη αποτύπωση της σημασίας τους για αυτούς τους δύο μεγάλους επιστημονικούς τομείς καθώς και η εύκολη κατανόηση αυτών από τον οποιοδήποτε αναγνώστη.

The theme of this project is, how the general mathematics find them self useful at the economics and the business management. More specific how the functions, tables, integrals, derivatives, can be used on the filed of economics and business management. The method that was used was the search of examples-problems taken by a series of scientific books and there listing with a way that would make them understandable by anyone. This is all to prove how important the general mathematics are for the economics and management.

Εισαγωγή

Όπως προαναφέρθηκε το θέμα της εργασίας αυτής είναι οι εφαρμογές των γενικών μαθηματικών στην διοίκηση και στην οικονομία. Δηλαδή η αναζήτηση προβλημάτων διοικητικού και οικονομικού χαρακτήρα τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια συγκεκριμένων κεφαλαίων των γενικών μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα το κομμάτι των συναρτήσεων, πινάκων, παράγωγοι και ολοκληρώματα.

Σκοπός της είναι να αναδείξει την σημασία τους για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων καθώς και τις δυνατότητες τους πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο.

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε ήταν η αναζήτηση εφαρμογών σε διάφορα οικονομικά-διοικητικά βιβλία τα οποία πιθανών να είχαν κάποια παραδείγματα που να επιλύονταν με τη χρήση γενικών μαθηματικών. Κατόπιν η εξαγωγή αυτών και η καταγραφή τους με τρόπο απλό και κατανοητό ακόμα και για άτομα τα οποία δεν έχουν μεγάλη έφεση στα αντικείμενα των μαθηματικών, της διοίκησης και των οικονομικών. Επίσης στο κάθε παράδειγμα η ομάδα παραδειγμάτων δίδετε και ένα θεωρητικό υπόβαθρο των όσων θα ακολουθήσουν ώστε να είναι πιο κατανοητά. Τέλος παρέχονται και σχεδιαγράμματα όπου κρίνεται απαραίτητο για περεταίρω κατανόηση. Σε κάποια σημεία που η εργασία καλύπτει συγκεκριμένους τομείς των οικονομικών δίδεται και ένα μικρό θεωρητικό υπόβαθρο ώστε ο αναγνώστης να εξοικειώνεται άμεσα με αυτό.

Κεφάλαιο 1ο : Πίνακες

Λίγα λόγια για τους πίνακες

Μια διάταξη μ*ν το πλήθος αριθμών σε μορφή ορθογωνίου σχήματος με μ γραμμές και ν στήλες λέγεται πίνακας τύπου μ*ν ή απλούστερα μ*ν πίνακας.

Τους πίνακες τους συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα Α,Β,Γ κτλ. Οι αριθμοί με τους οποίους σχηματίζουμε έναν πίνακα λέγονται στοιχεία του πίνακα. Το στοιχείο ενός μ*ν πίνακα Α που ανήκει στην ι γραμμή και ξ στήλη συμβολίζεται με: a_{ij} . Έτσι ο πίνακας μ*ν θα μπορούσε να γραφτεί: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2j} \ldots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mj} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$ i=γραμμή, j=στήλη

Ή $[a_{ij}]$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Οι πίνακες μπορούν να είναι ίσοι όταν είναι του ίδιου τύπου, δηλαδή έχουν τον ίδιο αριθμό στηλών και γραμμών. Π.χ. α[2,2], β[2,2]

Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα (α+β=β+α)

Μπορούν να γίνουν πράξεις με πίνακες υπό προϋποθέσεις.

Πρόσθεση γίνεται μόνον αν οι πίνακες είναι ιδίου τύπου, δηλαδή 2χ2 ή 3χ3 κτλ. Π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}$

Το ίδιο ισχύει και για την αφαίρεση.

Για τον πολλαπλασιασμό έχουμε. Το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ με έναν πίνακα $A=[a_{ij}]$, λέγεται ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του Α με το λ. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με λ*Α ή λΑ. Δηλαδή: $\lambda * A = [\lambda a_{ij}]$.

Π.χ. $3*\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -27 & -3 \end{bmatrix}$

Αν $A=[a_{ik}]$ είναι ένας μ*ν πίνακας και $B=[b_{kj}]$ είναι ένας ν*ρ πίνακας , τότε ορίζουμε ως γινόμενο του πίνακα Α με τον πίνακα Β και το συμβολίζουμε με Α*Β ή ΑΒ τον μ*ρ πίνακα, του οποίου κάθε στοιχείο g_{ij} είναι το άθροισμα των γινομένων των ν στοιχείων της I γραμμής του Α με τα αντίστοιχα ν στοιχεία της j στήλης του β. Δηλαδή:

$$g_{ij} = a_{i1} * b_{1j} + a_{i2} * b_{2j} + \ldots + a_{in} * b_{nj}$$

Π.χ. $[+1+2]*\begin{bmatrix} -2+3 \\ -1+0 \end{bmatrix} = [0+3]$

[4]

Παράδειγμα 1ο

Το προσωπικό ενός εργοστασίου, που λειτουργεί σε 2 βάρδιες, κατανέμεται σε 3 κατηγορίες με ημερομίσθια 1500 δρχ. και 2500 δρχ. αντίστοιχα και αμοιβή για εργασία σε μέρες αργίας 2000 δρχ., 2500 δρχ. Και 3000 δρχ. αντίστοιχα.

Αν ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} +34+26+15 \\ +25+21+12 \end{bmatrix}$ παριστάνει την κατανομή του προσωπικού κατά κατηγορία σε κάθε βάρδια και $B = \begin{bmatrix} 1.500+2.000 \\ 2.000+2.500 \\ 2.500+3.000 \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας των ημερησίων αμοιβών, τι παριστάνει ο Α*Β;

Λύση

Το Α*Β παριστάνει τις αμοιβές του προσωπικού αν κατηγορία βάρδιας.

$$A * B = \begin{bmatrix} +34+26+15 \\ +25+21+12 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} +1.500+2.000 \\ +2.000+2.500 \\ +2.500+3.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43*1.500+26*2.000+15*2.500 \\ 25*2.000+21*2.500+12*3.000 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} +67500+52000+37500 \\ +50000+52500+36000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 157000 \\ 138500 \end{bmatrix}$$ ευρώ. [4]

Παράδειγμα 2^{o}

Τα στοιχεία για τις αμοιβές και τον αριθμό των εργατών σε δύο οικοδομικές εταιρίες Α και Β έχουν την μορφή πινάκων ως εξής:

Αριθμός εργατών Ημερήσιες αποδοχές

Ειδικευμένοι, ανειδίκευτοι (σε ευρώ)

$$\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{bmatrix} 60 & 75 \\ 30 & 60 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{r} \text{Ειδικευμένοι} \\ \text{Ανειδίκευτοι} \end{array} \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Ποιο το σύνολο των αμοιβών των εργατών στις δύο εταιρείες;

Λύση

Αρκεί να βρούμε το γινόμενο των δύο πινάκων (από τη στιγμή που επρόκειτο για γινόμενο πινάκων δεν χρειάζεται να είναι ιδίου τύπου).

$$\begin{bmatrix} +60+75 \\ +30+60 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (+60*50)+(+75*40) \\ (+30*50)+(+60*40) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +6000 \\ +3900 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ειδικευμένοι} \\ \text{ανειδίκευτοι} \end{bmatrix}$$

Άρα οι συνολικές αποδοχές των ειδικευμένων εργαζόμενων είναι: 6000 ευρώ ενώ των ανειδίκευτων: 3900

[4]

Παράδειγμα 3^{o}

Μια βιομηχανία επίπλων κουζίνας έχει δυο εργοστάσια Ε1 και Ε2. Οι πίνακες Μ και Ν δίνουν τις ώρες εργασίας για την κατασκευή κάθε επίπλου και τις ωριαίες αμοιβές του προσωπικού σε ευρώ αντιστοίχως.

$$\begin{array}{cccl} \text{Κατασκευή} & \text{Βάψιμο} & \text{Συσκευασία} & \\ \end{array}$$
$$M = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 & 0,2 \\ 1 & 0,9 & 0,3 \\ 1,5 & 1,2 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Πάγκος} \\ \text{Καρέκλα} \\ \text{Τραπέζι} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array}$$
$$N = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Κατασκευή} \\ \text{Βάψιμο} \\ \text{Συσκευασία} \end{array}$$

Α) Τι εκφράζει ο πίνακας ΜΝ;

Β) Ποιο είναι το κόστος εργασίας για την παραγωγή μιας καρέκλας στο εργοστάσιο Ε1 και ενός πάγκου στο εργοστάσιο Ε2;

Λύση

Α) Το γινόμενο των πινάκων ΜΝ εκφράζει το συνολικό κόστος παραγωγής του κάθε πάγκου, καρέκλας, τραπεζιού.

$$M * N = \begin{bmatrix} +0,6+0,6+0,2 \\ +1+0,9+0,3 \\ +1,5+1,2+0,4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} +5+6 \\ +6+7 \\ +4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +7,4+8,8 \\ +11,6+13,8 \\ +16,5+19,4 \end{bmatrix}$$

Β) Άρα το Ε1 εργοστάσιο έχει κόστη παραγωγής 7,4 ευρώ για τον πάγκο, 11,6 ευρώ για την καρέκλα και 16,5 ευρώ για το τραπέζι.

Το Ε2 εργοστάσιο έχει κόστη παραγωγής 8,8 ευρώ για τον πάγκο, 13,8 ευρώ για την καρέκλα και 19,4 ευρώ για το τραπέζι.

[4]

Παράδειγμα 4^{o}

Μια βιομηχανία που κατασκευάζει τηλεοράσεις, βίντεο και φωτογραγικές μηχανές έχει δύο εργοστάσια παραγωγής Π1 και Π2. Το κόστος παραγωγής ανά συσκευή δίνεται σε δεκάδες ευρώ στους παρακάτω πίνακες.

$$\begin{array}{cccc} & \text{Φωτ. Μηχ} & \text{Βιντ} & \text{Τηλεορ} \\ \Pi_1 = & \left[\begin{matrix} 30 & 28 & 40 \\ 25 & 32 & 36 \end{matrix}\right] & & \end{array} \begin{matrix} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{matrix} \qquad \begin{array}{c} \text{Φωτ. Μηχ. \quad Βιντ. \quad Τηλεορ} \\ \Pi_2 = \left[\begin{matrix} 38 & 30 & 42 \\ 23 & 28 & 38 \end{matrix}\right] \end{array} \begin{matrix} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{matrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας $\frac{1}{2}(P1+P2)$, τι εκφράζει αυτός ο πίνακας;

$$\frac{1}{2}*(P1+P2)=\frac{1}{2}*\left(\begin{bmatrix} 30 & 28 & 40 \\ 25 & 32 & 36 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 38 & 30 & 42 \\ 23 & 28 & 38 \end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}*\left(\begin{bmatrix} 68 & 58 & 82 \\ 58 & 60 & 74 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 34 & 29 & 41 \\ 29 & 30 & 37 \end{bmatrix}$$

Ο τελικός πίνακας $\frac{1}{2}*(P1+P2)$ εκφράζει το κόστος παραγωγής στο 1 εργοστάσιο.

[4]

Παράδειγμα 5^{o}

Μια βιομηχανία έχει 4 εργοστάσια παραγωγής Π1,Π2,Π3 και Π4, καθένα απο τα οποία παράγει δύο προϊόντα Ε1 και Ε2. Το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής σε μονάδες προϊόντων δίνεται στον επόμενο πίνακα.

$$\begin{array}{cccccc} & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 & \\ A = & \left[\begin{matrix} 200 \\ 80 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 180 \\ 40 \end{matrix} & \begin{matrix} 140 \\ 120 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 60 \\ 120 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} \end{array}.$$

1) Να βρεθεί το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής, αν αυτή αυξηθεί κατά 10%.

2) Νε βρεθεί το σύνολο της παραγωγής ανά προϊόν σε 5 μήνες, αν υποτεθεί ότι τα εργοστάσια δουλεψαν 2 μήνες με το προηγούμενο επίπεδο παραγωγής και 3 μήνες με το νέο. (1 μήνας=30 μέρες)

Λύση

Για να βρεθεί το νέο ημερήσιο επίπεδο παραγωγής αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το 10% ή το 0,10 με τον πίνακα Α

$$0{,}10 * \mathrm{A} = 0{,}10 * \begin{bmatrix} 200 & 180 & 140 & 60 \\ 80 & 40 & 120 & 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 & 198 & 154 & 66 \\ 88 & 44 & 132 & 132 \end{bmatrix}$$

2) Για να βρεθεί το σύνολο της παραγωγής ανά προϊόν σε 5 μήνες αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τους πίνακες Α και A_1 με το 30 προκειμένου να βρούμε την μηνιαία παραγωγή και μετα να αθροίσουμε τους πίνακες $2 * \mathrm{A}$ και $3 * \mathrm{A}_1$ (όπου A_1 το νέο επίπεδο παραγωγής με την αύξηση του 10%). Δηλαδή:

$$30 * \mathrm{A} = 30 * \begin{bmatrix} 200 & 180 & 140 & 60 \\ 80 & 40 & 120 & 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 & 5400 & 4200 & 1800 \\ 1800 & 1200 & 3600 & 3600 \end{bmatrix}$$

Θέτουμε $\mathrm{A}_2 = \begin{bmatrix} 6000 & 5400 & 4200 & 1800 \\ 1800 & 1200 & 3600 & 3600 \end{bmatrix}$

$$30 * \mathrm{A}_1 = 30 * \begin{bmatrix} 220 & 198 & 154 & 66 \\ 88 & 44 & 132 & 132 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6600 & 5940 & 4620 & 1980 \\ 2640 & 1320 & 3960 & 3960 \end{bmatrix}$$

Θέτουμε $\mathrm{A}_3 = \begin{bmatrix} 6600 & 5940 & 4620 & 1980 \\ 2640 & 1320 & 3960 & 3960 \end{bmatrix}$

Άρα

$$2 * A_2 = 2 * \begin{bmatrix} 6000 & 5400 & 4200 & 1800 \\ 1800 & 1200 & 3600 & 3600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12000 & 10800 & 8400 & 3600 \\ 3600 & 2400 & 7200 & 7200 \end{bmatrix}$$

Αυτό για τους 2 πρώτους μήνες

$$3 * A_3 = 3 * \begin{bmatrix} 6600 & 5940 & 4620 & 1980 \\ 2460 & 1320 & 3960 & 3960 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19800 & 17820 & 13860 & 5940 \\ 7380 & 3960 & 11880 & 11880 \end{bmatrix}$$

Αυτό για τους 3 επόμενους μήνες.

Άρα

$$2A_2 + 3A_3 = \begin{bmatrix} 12000 & 10800 & 8400 & 3600 \\ 3600 & 2400 & 7200 & 7200 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19800 & 17820 & 13860 & 5940 \\ 7380 & 3960 & 11880 & 11880 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 31800 & 28620 & 22260 & 9540 \\ 10980 & 6360 & 19080 & 19080 \end{bmatrix}$$

Άρα το Ε1 εργοστάσιο θα έχει παραγωγή στους 5 μήνες 31800 για το Π1, 28620 για το Π2, 22260 για το Π3 και 9540 για το Π4

Ενώ το Ε2 εργοστάσιο θα έχει παραγωγή στους 5 μήνες 10980 για το Π1, 6360 για το Π2, 19080 για το Π3 και 19080 για το Π4.

Κεφάλαιο 2ο: Συναρτήσεις

Λίγα πράγματα για τις συναρτήσεις

Η συνάρτηση (function) η πιο βασική έννοια της Μαθηματικής Αναλύσεως, υπήρξε αντικείμενο μελέτης των μεγαλύτερων Μαθηματικών των τελευταίων τεσσάρων αιώνων και σαν έννοια εμφανίστηκε, κατά την εποχή ης θεμελιώσεως των Φυσικών Επιστημών, από την ανάγκη να παρακολουθήσουν τις ποσοτικές εκδηλώσεις των φυσικών φαινομένων που μελετούσαν. Στη ραγδαία εξέλιξη της θεωρίας και των εφαρμογών των συναρτήσεων βοήθησαν πολύ οι κλάδοι της Άλγεβρας και της Αναλυτικής Γεωμετρίας, ενώ η θεωρία των Συνόλων έδωσε, αργότερα, αυστηρότητα και κομψότητα στις προτάσεις αυτών.

Ορισμός: Έστω Α ένα υποσύνολο του R. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο χ και συμβολίζεται με $f(x)$.

$f : A \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$

Το γράμμα χ, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του Α λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το γράμμα y, παριστάνει την τιμή της f στο χ, λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

Το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f .

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y | y = f(x)$ για κάποιο $x \in A\}$.

Συνήθως, όμως, αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνον τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$. Σε μια τέτοια περίπτωση θεωρείτε συμβατικά ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών χ, για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα.

Π.χ. Αντί να δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 2] \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$ θα δίνεται μόνον ο τύπος της συνάρτησης.

Ιδιότητες συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

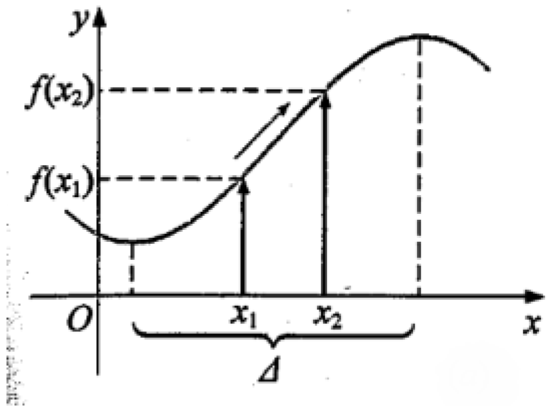
Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι 1-1

Μπορούν να γίνουν πράξεις με συναρτήσεις όπως

- Άθροισμα: $(f+g)*(x) = f(x) + g(x)$
- Αφαίρεση: $(f-g)*(x) = f(x) - g(x)$
- Γινόμενο: $(fg)*(x) = f(x) * g(x)$
- Πηλίκο: $\left(\frac{f}{g}\right)*(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$

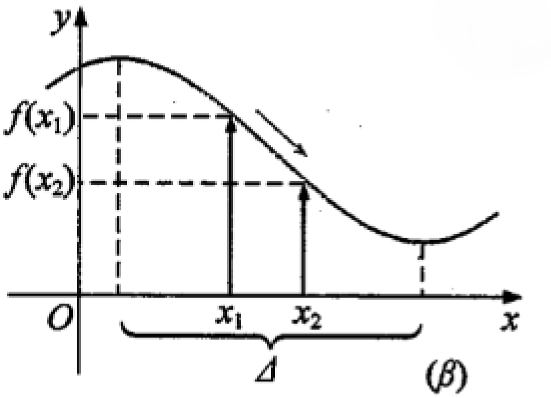
Σχήμα:



Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$f(x_1) > f(x_2)$

Σχήμα:



Για να δηλώσουμε το πότε η f είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ χρησιμοποιούμε το $f \nearrow \Delta$ και το $f \searrow \Delta$ αντίστοιχα.

Όρια

Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Θα λέγαμε ότι η f έχει στο x_0 όριο $l \in \mathbb{R}$, όταν για κέθε ε>0 υπάρχει δ>0 τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - l| < \varepsilon$

Επίσης ισχύουν τα παρακάτω

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - l) = 0$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x_0 + h) = l$

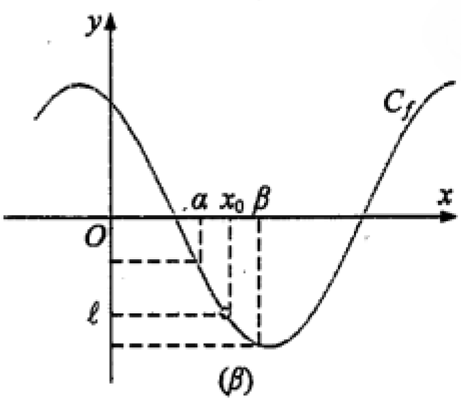
Ιδιότητες ορίων

Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

Σχήμα:

Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

Σχήμα:



[4],[2]

Παράδειγμα 1^o

Ο ετήσιος όγκος πωλήσεων μιας εταιρίας μειώνεται με σταθερό ρυθμό. Αν ο όγκος αυτός ανέρχεται μετά από ένα χρόνο σε 6,87 εκατ. χμ. και μετά από 4 χρόνια σε 4,36 εκατ. χμ. να υπολογισθεί ο ετήσιος ρυθμός και οι συναρτήσεις α) συνεχούς και β) διακεκριμένης παρακμής.

Λύση

Α) Ο ετήσιος όγκος πωλήσεων υπολογίζεται από τη σχέση $P = Poe^{-rt}$, όπου Po ο αρχικός ετήσιος όγκος πωλήσεων και r ο ρυθμός συνεχούς παρακμής.

Από τα δεδομένα προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\left\{\begin{array}{l} 6{,}87 = P0e^{-r} \\ 4{,}36 = P0e^{-4r} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ln(6{,}87) = \ln P0 - r\,,\ \ln P0 - 4r$$

Από τους πίνακες σχετικά με τις διάφορες τιμές του ln προκύπτει:

$$\left\{\begin{array}{l} 1{,}92716 = \ln P0 - r \\ 1{,}47247 = \ln P0 - 4r \end{array}\right\}$$

Και αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε ,

$0{,}45469 = 3r \Leftrightarrow r = 0{,}15156$ δηλ. ο ετήσιος ρυθμός συνεχώς παρακμής είναι 15,156%

Αντικαθιστώντας το r στην πρώτη από τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε $\ln Po = 2{,}0772$

Κατά συνέπεια από τους πίνακες σχετικά με τις διάφορες τιμές του ln προκύπτει (με μεταβολή) ότι $Po \approx 5{,}982$.

Κατά συνέπεια η συνάρτηση συνεχούς παρακμής είναι $P = 5{,}982e^{-0{,}15156*t}$

Β) Ο ετήσιος όγκος πωλήσεων υπό μορφή διακεκριμένης παρακμής υπολογίζεται από τη σχέση $P = 5{,}982*(1+i)^{-t}$, όπου I ο ετήσιος ρυθμός διακεκριμένης παρακμής. Από την ισότητα $(1+i)^{-t} = e^{-0{,}1516*t}$ προκύπτει: $-t*\ln(1+i) = -0{,}1516*t$ ή $\ln(1+i) = 0{,}15156$

Κατά συνέπεια από τους πίνακες σχετικά με τις διάφορες τιμές του ln προκύπτει (με παρεμβολή) ότι $1+i \approx 1{,}66$ δηλ. $i = 0{,}166$ ή $16{,}6\%$.

Η συνάρτηση διακεκριμένης παρακμής είναι: $P = 5{,}982*1.166^{-t}$.

Ο ετήσιος όγκος πωλήσεων υπό μορφή διακεκριμένης παρακμής υπολογίζεται από τη σχέση $P = 5{,}982*(1+i)^{-t}$, όπου I ο ετήσιος ρυθμός διακεκριμένης παρακμής. Από την ισότητα $(1+i)^{-t} = e^{-0{,}1516*t}$ προκύπτει $-t*\ln(1+i) = -0{,}1516*t$ ή $\ln(1+i) = 0{,}15156$

Κατά συνέπεια από τους πίνακες σχετικά με τις διάφορες τιμές του ln προκύπτει ότι $1+i \approx 1{,}66$ δηλαδή $i = 0{,}166$ ή $16{,}6\%$. Η συνάρτηση διακεκριμένης παρακμής είναι $P = 5{,}982*1.166^{-t}$

[1]

Παράδειγμα 2^{o}

Για την παραγωγή ενός προϊόντος προβλέπεται ένα αρχικό κόστος 600 χ.μ. και στη συνέχεια τρέχοντα έξοδα 5 χ.μ. ανά μ.μ. του προϊόντος, η τιμή πώλησης του οποίου είναι 10 χ.μ η μ.μ.

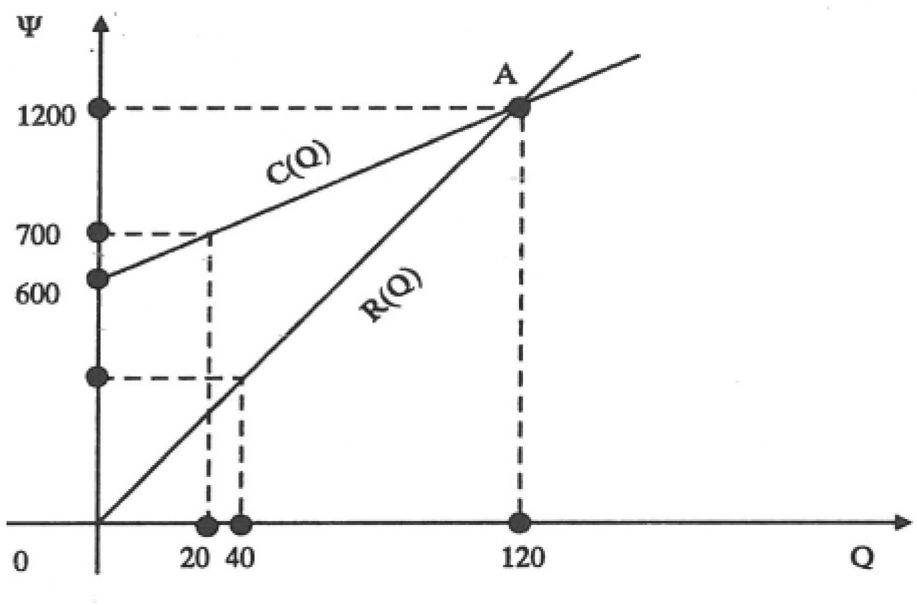
Α) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων του κόστους παραγωγής και του εσόδου από την πώληση του προϊόντος.

Β) Να προσδιορισθεί αλγεβρικά και γραφικά το σημείο εκείνο της ποσότητας Q του προϊόντος, για την οποία τα έξοδα παραγωγής, ισοσκελίζονται με τα έσοδα από την πώληση του προϊόντος (break point)

Λύση

Έστω Q η παραγόμενη ποσότητα του προϊόντος.

Α) Η συνάρτηση του κόστους παραγωγής είναι $C(Q) = 600 + 5Q$, ενώ η συνάρτηση των εσόδων από την πώληση είναι $R(Q) = 10Q$, με Q>0. Οι γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων δίδονται στο παρακάτω σχήμα (το σύστημα αξόνων δεν είναι ορθοκανονικό).



B) το ζητούμενο σημείο Q(0) προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης $C(Q) = R(Q)$ ή $600 + 5Q = 10Q$ και είναι $Q0 = 120$ μ.μ.

Γραφικά στο παραπάνω σχήμα το Q(0) αντιστοιχεί στο σημείο A(120,1200) της τομής των ημιευθειών C(Q) και R(Q).

Γραφικά στο παραπάνω σχήμα το Q(0) αντιστοιχεί στο σημείο A(120,1200) της τομής των ημιευθειών C(Q) και R(Q).

Οι συντεταγμένες του Α αντιστοιχούν στη μοναδική λύση του συστήματος των εξισώσεων $\begin{cases} y = 600 + 5Q \\ y = 10Q \end{cases}$, με άγνωστους τα ψ και Q

[2]

Παράδειγμα 3ο

Σε μία οικονομία δύο τομέων η κατανάλωση εκφράζεται από τη σχέση $C = C(Y) = 50 + 0{,}8Y$, όπου $Y \geq 0$ είναι το εισόδημα και οι επενδύσεις I=50 είναι σταθερές.

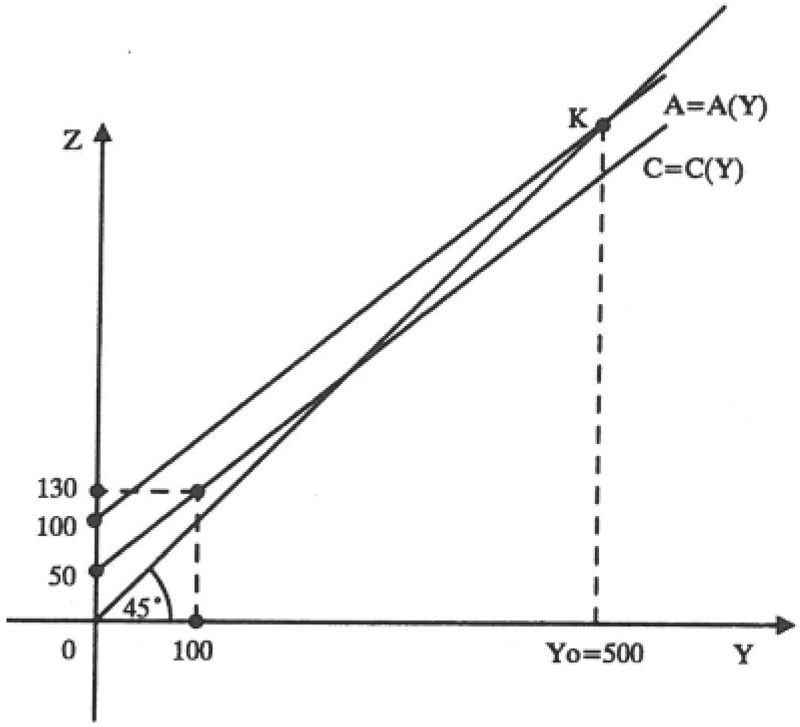
Ποιό το επίπεδο ισοροπίας ;

Λύση

Το απαιτούμενο εισόδημα δίδεται από τη σχέση:

$A = A(Y) = C + I = 100 + 0{,}8Y$

Το επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος Y0 προκύπτει όταν το απαιτούμενο εισόδημα Α γίνεται ίσο με το διαθέσιμο εισόδημα Y. Από την ισότητα Α=Y βρίσκουμε $0{,}2Y = 100$ και κατά συνέπεια $Y0 = 500$.



Στο παραπάνω σχήμα οι γραφικές παραστάσεις των $C = C(Y)$ και $A = A(Y)$ είναι δύο παράλληλες ημιευθείες. Το επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος προκύπτει γραφικά από την τετμημένη της τομής της ημιευθείας $A = A(Y)$ και της διχοτόμου της γωνίας $Z\hat{O}Y$, που έχει εξίσωση Y=Z

[1]

Παράδειγμα 4^{o}

Αν η τιμή του ηλεκτρικού ρεύματος είναι 10 δρχ./kw και με κάθε λογαριασμό καταβάλλεται και ένα πάγιο ποσό 200 δρχ. να εκφρασθούν:

Α) Η τιμή του ρεύματος σαν συνάρτηση της κατανάλωσης.

Β) Η κατανάλωση σαν συνάρτηση της τιμής του ρεύματος.

Γ) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων των περιπτώσεων α,β

Δ) Αν αποφασισθεί αύξηση του παγίου σε κάθε λογαριασμό κατά 500 δρχ. τι θα συμβεί με τη γραφική παράσταση της περιπτ. Α;

Λύση

Α) Αν χ είναι ο αριθμός των καταναλωθέντων kw, τότε η τιμή του ρεύματος υπολογίζεται με τη βοήθεια της συνάρτησης:
$y = f(c) = 10c + 200$, με $D(f) = [0,+¥)$ και $R(f) = [200,+¥)$

Β) Λύνοντας τη σχέση $y = 10c + 200$ ως προς χ παίρνουμε $c = \frac{y - 200}{10}$.

Θέτοντας χ=ψ προκύπτει $y = \frac{c - 200}{10}$.

Κατά συνέπεια η συνάρτηση $Y = f^{-1}(c) = \frac{c - 200}{10}$ με $D(f^{-1}) = [200,+¥)$

Και $R(f) = [0,+¥)$ αποδίδει την κατανάλωση σαν συνάρτηση της τιμής του ρεύματος.

Γ) (λείπει σχήμα θα το περάσω)

Στο παραπάνω σχήμα έχει κατασκευασθεί αρχικά η ημιευθεία Cf και στη συνέχεια η $C^{-1}f$, συμμετρική της Cf ως προς την ευθεία με την εξίσωση χ=ψ

Δ) Η αύξηση του παγίου ποσού από 200 δρχ. σε 800 δρχ. στον κάθε λογαριασμό έχει σαν συνέπεια η τιμή του ρεύματος να υπολογίζεται πλέον με τη βοήθεια της συνάρτησης $g(x) = 10x + 800$ με $D(g) = [0,+¥)$ και $R(g) = [800,+¥)$

Η Cg είναι μία ημιευθεία παράλληλη προς την Cf (αφού έχουν την ίδια κλίση), με αρχή το σημείο $G = (0,800)$

[1]

Παράδειγμα 4^{o}

Με την βοήθεια του παρακάτω πίνακα τιμών

Α) Να εκφραστεί η αποταμίευση (Α) στη γραμμική συνάρτηση του εισοδήματος Υ.

Β) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

Γ) Να εξηγειθεί η οικονομική σημασία της κλήσης της παραπάνω γραφικής παράστασης.

Y	0	1000	2000	3000	4000
A	-400	-200	0	200	400

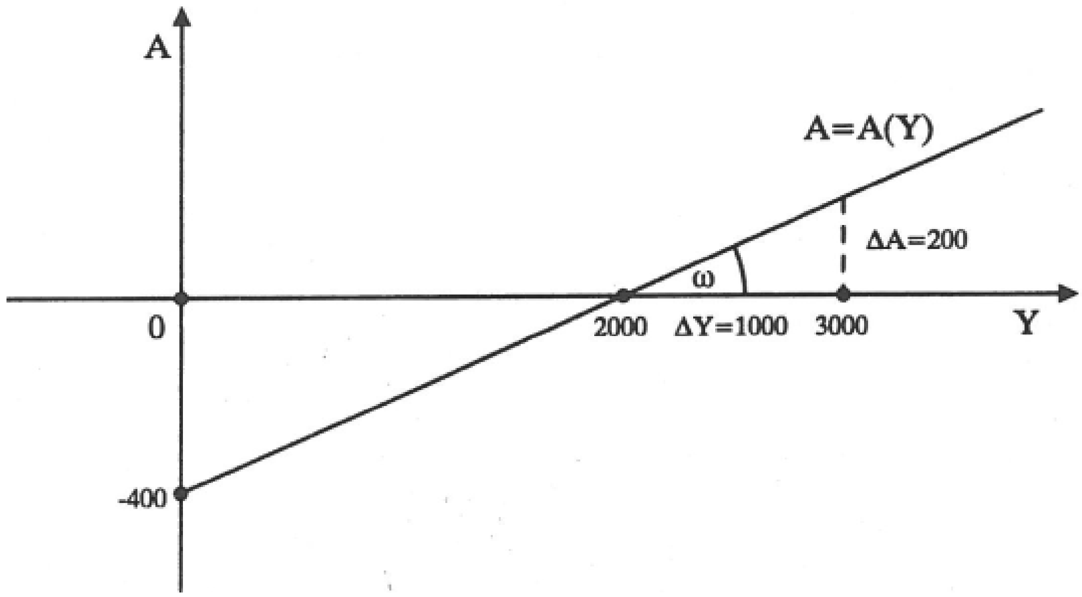
Λύση

Α) Η ζητούμενη συνάρτηση θα είναι της μορφής $A = aY + b$. Αντικαθιστώντας στη θέση Υ και Α τα ζεύγη των τιμών (0,400) και (2000,0) προκύπτει $b = -400$ και $2000a + b = 0$ ή $2000a - 400 = 0 \Rightarrow a = 0,2$

Άρα η ζητούμενη συνάρτησης είναι $A = 0,2\,Y - 400$, με $Y \geq 0$.

Κατά συνέπεια πρέπει $Y = 5A + 2000 \geq 0$ ή $A \geq -400$.

Β)



Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης δίδεται στο παραπάνω σχήμα (μη ορθοκανονικό σύστημα αξόνων).

Γ) Η κλίση $\frac{DU}{DA} = ef\,w$ της ημιευθείας Α=Α(Υ) είναι 0,2 και δίδει το ρυθμό μεταβολής της αποταμίευσης σε σχέση με τη μεταβολή του εισοδήματος.

Έτσι αύξηση του εισοδήματος κατά 1000 χ.μ. έχει σαν συνέπεια την αντίστοιχη αύξηση της αποταμίευσης κατά $0,2*1000 = 200$ χ.μ.

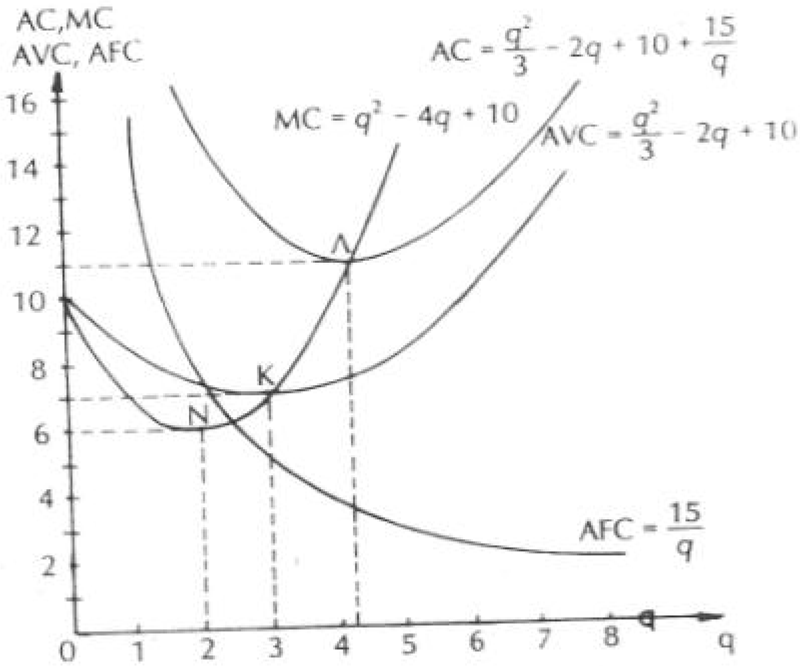
[1]

Παράδειγμα 5^{o}

Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση του ολικού κόστους παραγωγής προϊόντος μιας επιχείρησης είναι: $C = \frac{q^3}{3} - 2q^2 + 10q + 15$

Να ελαχιστοποιηθούν τα MC,AC,AVC,AFC

Λύση



$C = \frac{q^3}{3} - 2q^2 + 10q + 15$, τότε ATC ή $AC = \frac{C}{q} = \frac{q^3}{3} - 2q + 10 + \frac{15}{q}$,

$AVC = \frac{VC}{q} = \frac{q^2}{3} - 2q + 10$ και $MC = \frac{dC}{dq} = q^2 - 4q + 10$, όπως γίνεται και στο προηγούμενο σχήμα.

Το AC παίρνει ακρότατη τιμή στο σημείο όπου
$\frac{d(AC)}{dq} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}q - 2 + \frac{15}{q^2} = 0 \Leftrightarrow q \approx 4{,}25$. Επειδή για q=4,25 είναι

$\frac{d^2}{dq^2}(AC) = \frac{2}{3} + \frac{30}{q^3} > 0$ και $AC(q = 4{,}25) = \frac{4{,}25^2}{3} - 2 * 4{,}25 + 10 + \frac{15}{4{,}25} = 11{,}05$

συμπεραίνουμε ότι το σημείο Λ (4,25 , 11,05) είναι ελάχιστο του AC. Η τιμή q=4,25 στο σημείο Λ επαληθεύεται και από την εξίσωση AC=MC.

Το AVC έχει ακρότατη τιμή στο σημείο όπου:
$\frac{d}{dq}(AVC) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}q - 2 = 0 \Leftrightarrow q = 3$. Επειδή $\frac{d^2}{dq^2}(AVC) = \frac{2}{3} > 0 \; \forall q$ (άρα και για q=3) και $AVC(q = 3) = \frac{3^2}{3} - 2 * 3 + 10 = 7$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο K(3,7) είναι το ελάχιστο του AVC. Η τιμή q=3 στο σημείο K επαληθεύεται και από την εξίσωση AVC=MC.

Τέλος το MC έχει ακρότατη τιμή στο σημείο όπου:
$\frac{d}{dq}(MC) = 0 \Leftrightarrow 2q - 4 = 0 \Leftrightarrow q = 2$. Επειδή ακόμα είναι $\frac{d^2}{dq^2}(MC) = 2 \; \forall q$ (άρα

και για q=2) και $MC(q=2)=2^2 - 4*2+10=6$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο N(2,6) είναι το ελάχιστο του MC.

[2]

Παράδειγμα 6ο

Αν $S=-100+0,6Y$ και I=0,2Y

Α) Πότε έχουμε ισορροπία

Β) Αν η αποταμιευτική τάση αυξάνεται και γίνεται $S_1 - 80+0,6Y$, ενώ η επενδυτική τάση παραμένει σταθερή τότε ποιο το νέο σημείο ισορροπίας;

Γ) Αν η αποταμιευτική τάση μειωθεί στο $S_2=-150+0,6Y$ ενώ η επενδυτική παραμείνει σταθερή τότε ποιο το νέο σημείο ισορροπίας;

Λύση

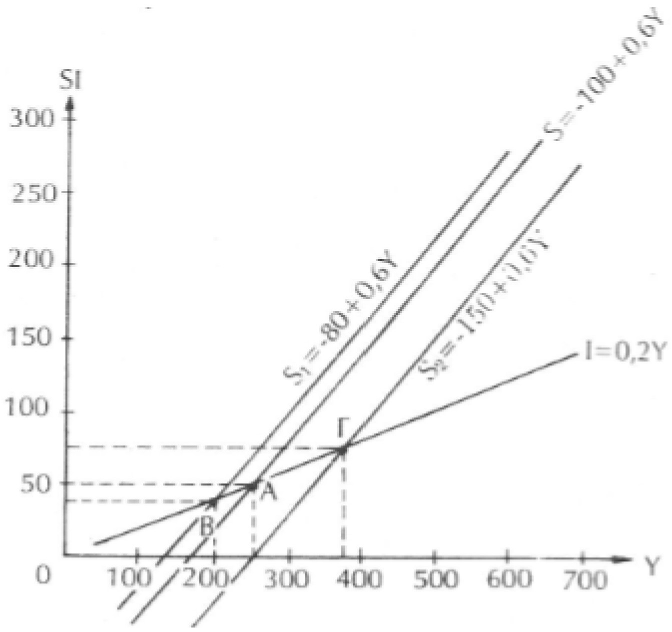
Α) Για να έχουμε ισορροπία πρέπει S=I δηλαδή όταν $-100+0,6Y=0,2Y$

Από όπου βρίσκουμε Y=250 και S=I=50

Β) Το νέο σημείο ισορροπίας θα βρίσκεται σε χαμηλότερο επίπεδο εθνικού εισοδήματος, αφού S1=I **à** $-80+0,6Y=0,2Y$ βρίσκουμε Y=200 και S1=I=40

Γ) Το σημείο ισορροπίας θα βρίσκεται σε ψηλότερο επίπεδο εθνικού εισοδήματος αφού S2=I **à** $-150+0,6Y=0,2$ βρίσκουμε Y=375 και S2=I=75 χρ. Μον.

Σχήμα:



[2]

.

Παράδειγμα 7^{ο}

Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης σιταριού στην Ε.Ε. είναι $P = 12 - 4Q_D$, όπου P είναι η τιμή του σιταριού (σε € ανά κιλό) και Q_D είναι η ζητούμενη ποσότητα σιταριού (σε δισεκατομμύρια κιλά). Έστω, επίσης, ότι η συνάρτηση προσφοράς σιταριού στην Ε.Ε. είναι $P = -2 + 2Q_S$, όπου Q_S είναι η προσφερόμενη ποσότητα σιταριού (σε δισεκατομμύρια κιλά).

α) Ποια είναι η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας του σιταριού;

β) Πρέπει η πραγματική τιμή να ισούται με την τιμή ισορροπίας; Ναι ή όχι και

γιατί;

Λύση

Α) Η τιμή ισορροπίας P*, είναι η τιμή στην οποία $Q_D = Q_S = Q^*$, όπου Q^* είναι η ποσότητα ισορροπίας. Ας γράψουμε το σύστημα των εξισώσεων ζήτησης και προσφοράς ως εξής:

$P^* = 12 - 4Q^*$, $P^* = -2 + 2Q^*$

Από το παραπάνω σύστημα εξισώσεων έχουμε:

$12 - 4Q^* = -2 + 2Q^* \Leftrightarrow 14 = 6Q^* \Leftrightarrow Q^* = 2{,}23$

Θέτοντας Q* = 2,33 είτε στη συνάρτηση ζήτησης, είτε στη συνάρτηση προσφοράς, βρίσκουμε ότι η τιμή ισορροπίας είναι P* = €2,67.

Β) Η πραγματική τιμή πρέπει να ισούται προς την τιμή ισορροπίας, ώστε να εκκαθαρίζει η αγορά και να μην υπάρχει ούτε πλεόνασμα ούτε έλλειψη του προϊόντος

σε αυτήν.

Καμπύλη των παραγωγικών δυνατοτήτων

Παράδειγμα 1ο

Η συνάρτηση ζήτησης για ακτινίδια δίνεται από τον τύπο . Η συνάρτηση προσφοράς δίνεται από τον τύπο .

Α) Ποια η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας για ακτινίδια και να απεικονιστεί διαγραμματικά.

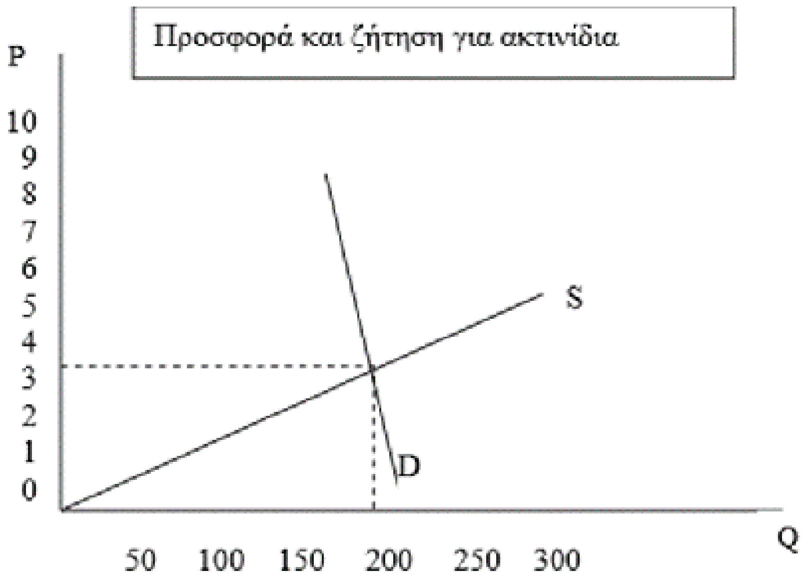
Β) Να δειχθεί διαγραμματικά τις επιπτώσεις από έναν παγετό που καταστρέφει τη μισή παραγωγή ακτινιδίων.

Γ) Να Δειχθεί διαγραμματικά πως θα μεταβληθεί η ισορροπία αν μια νέα μελέτη αποδεικνύει ότι η καθημερινή κατανάλωση ακτινιδίων προστατεύει αποτελεσματικά από ιώσεις.

Λύση

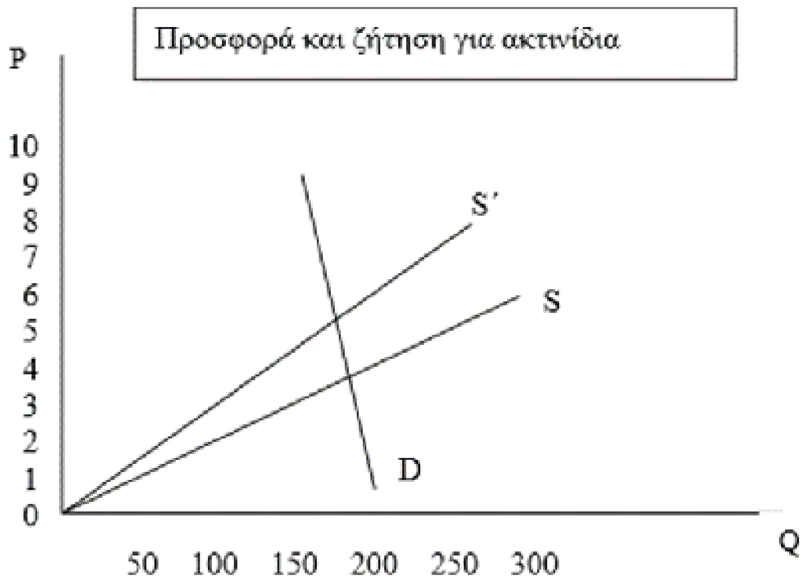
Στην ισορροπία, η ζητούμενη ποσότητα ισούται με την προσφερόμενη δηλαδή: αντικαθιστούμε το P=3 είτε στην DA είτε στην SA και βρίσκουμε: .

Σχήμα:



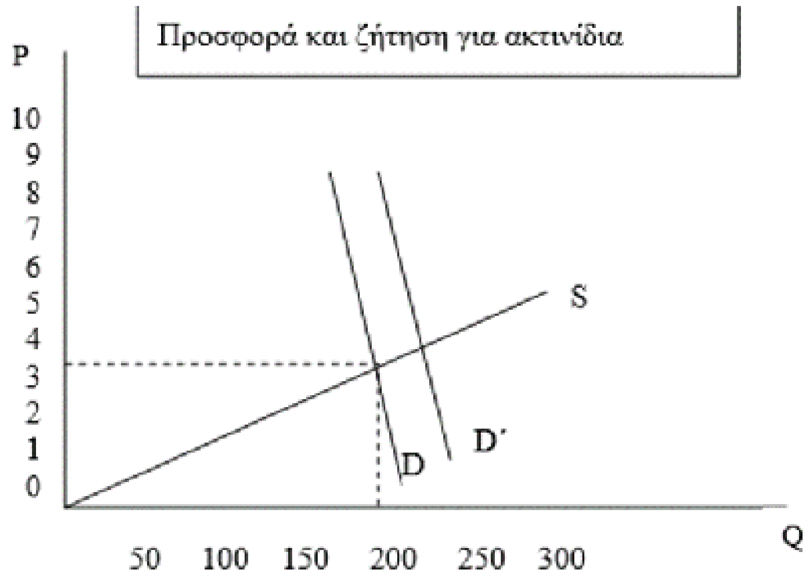
Β) Ένας παγετός που καταστρέφει τη μισή παραγωγή ακτινιδίων θε μειώσει την προσφορά ακτινιδίων σε κάθε τιμή κατά 50% ή κατά ½. Η συνάρτηση προσφοράς θα γίνει: και διαγραμματικά έχουμε μετατόπιση της καμπύλης προσφοράς επάνω αριστερά. Η νέα ισορροπία θα διαμορφωθεί σε υψηλότερη τιμή και μικρότερη ποσότητα.

Σχήμα:



Γ) Οι πληροφορίες για την θετική επίπτωση των ακτινιδίων στην υγεία θα οδηγήσουν σε αύξηση της ζήτησης, σε κάθε τιμή οι καταναλωτές θε ζητήσουν μεγαλύτερη ποσότητα από πριν. Θα υπάρξει μετατόπιση της καμπύλης ζήτησης προς τα δεξιά και πάνω . Η νέα τιμή ισορροπίας θα είναι υψηλότερη και η ποσότητα μεγαλύτερη.

Σχήμα:



Η έννοια της Ελαστικότητας.

- Ελαστικότητα ζήτησης: $ed = \frac{dQ}{dP}$ ή $\frac{\%DQ}{\%DP}$
- Σταυροειδής ελαστικότητα $edxy = \frac{dQx/Qx}{dPy/Py}$ ή $\frac{\%DQx}{\%DPy}$

αν edxy>0 => x,y υποκατάστατα, ενώ αν edxy<0 => X,y συμπληρωματικά

- Εισοδηματική ελαστικότητα. Κανονικά και κατώτερα αγαθά. Καμπύλη

$ey = \frac{dQ/Q}{dY/Y}$ ή $\frac{\%DQ}{\%DY}$

Παράδειγμα 1^{ο}

Η ελαστικότητα ζήτησης για τσιγάρα είναι 0,8 και στην τρέχουσα τιμή των €2 πωλούνται 1,000,000 πακέτα το χρόνο. Η ελαστικότητα ζήτησης για ουίσκι είναι 1,1 και στην τρέχουσα τιμή των €20 πωλούνται 100000 φιάλες το χρόνο. Ο υπουργός οικονομικών θέλει να επιβάλλει ένα φόρο 10% επί της τιμής των τσιγάρων και του ουίσκι ώστε να συγκεντρωθούν έσοδα. Ο φόρος επιβάλλεται και εισπράττεται ανά μονάδα πωλούμενου προϊόντος.

Α) υπολογίστε τη ζητούμενη ποσότητα τσιγάρων και ουίσκι μετά την επιβολή του φόρου. Β) Υπολογίστε τα αντίστοιχα φορολογικά έσοδα από κάθε προϊόν. Σχολιάστε τη διαφορά στα φορολογικά έσοδα για τα δύο προϊόντα.

Λύση

Α) Αγορά τσιγάρων. Μετά την επιβολή του φόρου 10%, (10%=0,1), η τιμή των τσιγάρων θα μεταβληθεί ως εξής: $Pt_1 = Pt + Tt$, όπου Tt ο φόρος που αναλογεί σε κάθε πακέτο και $Tt = (2,00 * 0,1) = 0,2$ ευρώ. Οπότε, $Pt_1 = 2 + 0,2 = 2,2$ ευρώ

Στη συνέχεια, λαμβάνουμε υπόψη ότι η ελαστικότητα ζήτησης για τα τσιγάρα είναι

$Et = 0,8 \Rightarrow \frac{\Delta Q\%}{\Delta P\%} = 0,8 \Rightarrow \Delta Q\% = 0,8 * \Delta P\% \Rightarrow \Delta Q\% = 0,8 * 10\% = 8\%$ και

$\Delta Q = Qt * \Delta Q\% = 1000000 * 8\% = 80000$ λιγότερα πακέτα τσιγάρα θα πωλούνται όταν η τιμή αυξηθεί κατά 10% και γίνει 2,2 ευρώ.

Άρα η ζητούμενη ποσότητα μετά την επιβολή του φόρου θα είναι $Qt_1 = Q - \Delta Q = 1000000 - 80000 = 920000$ πακέτα.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, βρίσκουμε για το ουίσκι τα εξής:

$P0_1 = P0 + T0 = 20 + (20 * 0,1) = 22$ ευρώ και

$eo = 1,1 \Rightarrow \frac{\Delta Q\%}{\Delta P\%} = 1,1 \Rightarrow \Delta Q\% = 1,1 * \Delta P\% \Rightarrow \Delta Q\% = 1,1 * 10\% = 11\%$ και

$\Delta Q = Q0 * \Delta Q\% = 100000 * 11\% = 11000$ λιγότερα μπουκάλια ουίσκι, δηλαδή $Q0_1 = 100000 - 11000 = 89000$ μπουκάλια θα είναι η ζητούμενη ποσότητα μετά την επιβολή του φόρου.

Β) Τα φορολογικά έσοδα διαμορφώνονται πολλαπλασιάζοντας τη νέα ζητούμενη ποσότητα για τσιγάρα και ουίσκι αντίστοιχα με το ποσό του φόρου ανά μονάδα προϊόντος, δηλαδή.

Τσιγάρα: Φορολογικά έσοδα =$Qt_1 * Tt = 920000 * 0,20 = 184000$ €

Ουίσκι: Φορολογικά έσοδα =$Q0_1 * T0 = 89000 * 2 = 178000$ €.

Παρατηρούμε ότι ενώ αρχικά η φορολογική βάση (αξία της φορολόγηση) των δύο προϊόντων ήταν ίδια, αφού η αξία των πωλούμενων τσιγάρων 1000000*2€=2 εκ ευρώ και του ουίσκι 10000*20€=2 εκ. ευρώ, τελικά τα τσιγάρα αποδίδουν περισσότερους φόρους. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ζήτηση για τσιγάρα είναι ανελαστική (0,8<1) ενώ για το ουίσκι ελαστική (1,1>1) και επομένως η ποσοστιαία μείωση της ζητούμενης ποσότητας μετά την επιβολή του ίδιου ποσοστού φόρου (10%) είναι μικρότερη για τα τσιγάρα παρά για το ουίσκι.

Παράδειγμα 2ο

Μετά από μία προσεκτική στατιστική ανάλυση, μία επιχείρηση συμπέρανε ότι η συνάρτηση ζήτησης για το προϊόν της είναι:

$$Qx = 500 - 3Px + 2Py + 0{,}1I$$

όπου Qx είναι η ζητούμενη ποσότητα του προϊόντος που παράγει η επιχείρηση, Px

είναι η τιμή του προϊόντος της, Py είναι η τιμή του προϊόντος ενός ανταγωνιστή της

και I είναι το κατά κεφαλήν διαθέσιμο εισόδημα. Αυτή τη στιγμή ισχύουν: Px = €10,

Py = €20 και I = €6.000.

α) Ποια είναι η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή για το προϊόν της επιχείρησης;

β) Ποια είναι η εισοδηματική ελαστικότητα ζήτησης;

γ) Ποια είναι η σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης ανάμεσα στο προϊόν της επιχείρησης και στο προϊόν του ανταγωνιστή της;

δ) Βάσει του αποτελέσματος που βρήκατε στο ερώτημα (α), αν η επιχείρηση αυξήσει ή μειώσει την τιμή του προϊόντος της, η χρηματική δαπάνη των καταναλωτών για το προϊόν της θα αυξηθεί ή θα μειωθεί;

Λύση

Για Px=10, Py=20 και I=6000, η ζητούμενη ποσότητα του προϊόντος είναι: $Qx = 500 - 3*10 + 2*20 + 0{,}1*6000 = 840$. Άρα η ελαστικότητα ζήτησης του προϊόντος της επιχείρησης ως προς την τιμή του είναι:

$$h_{xx} = \frac{\partial Qx}{\partial Px} * \frac{Px}{Qx} = -3 * \frac{10}{840} = -0{,}04$$

Επειδή $-1 < h_{cc} < 0$, η ζήτηση του Χ ως προς την τιμή του είναι ανελαστική

β) Η εισοδηματική ελαστικότητα ζήτησης του προϊόντος της επιχείρησης είναι: $h_1 = \frac{QQx}{QI} * \frac{I}{Qx} = 0{,}1 * \frac{6000}{840} = 0{,}71$

Επειδή η1>0, το προϊόν της επιχείρησης είναι ένα κανονικό αγαθό.

γ) Η σταυροειδής ελαστικότητα ανάμεσα στο προϊόν Χ και στο προϊόν Υ είναι: $h_{xy} = \frac{QQx}{QPy} * \frac{Py}{Qx} = 2 * \frac{20}{840} = 0{,}05$

Επειδή $h_{xy} > 0$, το προϊόν της επιχείρησης και εκείνο του ανταγωνιστή της είναι υποκατάστατα αγαθά.

Δ) Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι η ζήτηση του προϊόντος της επιχείρησης είναι ανελαστική ως προς την τιμή του. Συγκεκριμένα, αν η επιχείρηση αυξήσει την τιμή του προϊόντος της κατά 1%, η ζητούμενη ποσότητα θα μειωθεί κατά 0,04% μόνον. Συνεπώς, η δαπάνη των καταναλωτών για το προϊόν (η οποία αποτελεί και τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης) θα αυξηθεί.

θεωρία του καταναλωτή

Παράδειγμα 1^{ο}

Η Ελισάβετ ξοδεύει €60 την εβδομάδα σε πρόχειρο φαγητό. Έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο μόνο είδη, χάμπουργκερ που κοστίζουν €3 το ένα και κλαμπ σάντουιτς που κοστίζουν €6 η μερίδα.

Α) Σχεδιάστε την καμπύλη εισοδηματικού περιορισμού της Ελισάβετ. Ποια είναι η κλίση της?

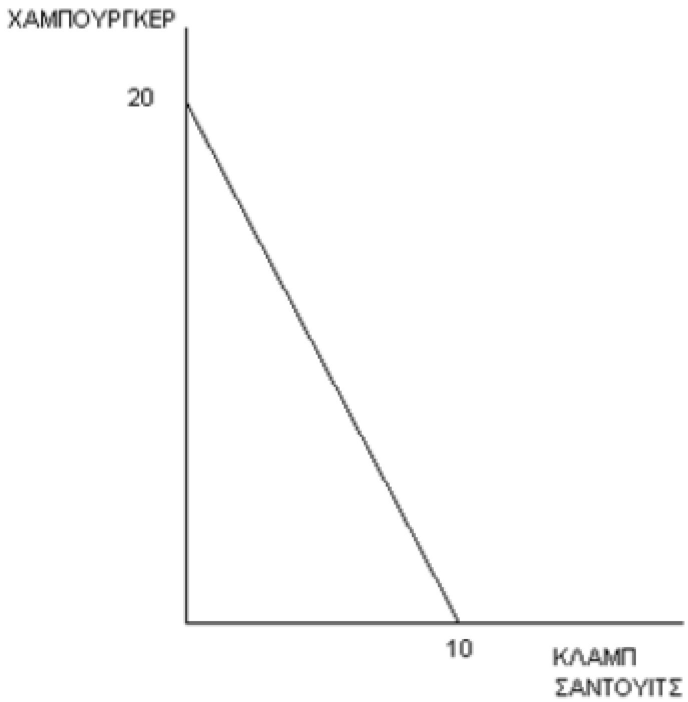
Β) Αν η Ελισάβετ καταναλώσει 5 κλαμπ σάντουιτς, πόσα χάμπουργκερ μπορεί να αγοράσει?

Γ) Σχεδιάστε την γραμμή εισοδηματικού περιορισμού (Ε.Π.) αν η τιμή των χάμπουργκερ ανέβει στα €4. Σχεδιάστε επίσης την γραμμή Ε.Π. αν η τιμή των κλαμπ σάντουιτς πέσει στα €5. Τέλος, σχεδιάστε την γραμμή Ε.Π. αν το εισόδημα της Ελισάβετ μειωθεί σε €40 με αμετάβλητες τις αρχικές τιμές.

Λύση

Η εξίσωση της καμπύλης είναι: 60=(Χ*3)+(Σ*6), όπου Χ= ο αριθμός των χάμπουργκερ και Σ ο αριθμός των Κλαμπ σάντουιτς. Σχεδιάζουμε τη γραμμή θέτοντας πρώτα Χ=0 (όλο το εισόδημα διατίθεται για αγορά Σάντουιτς) και λύνοντας ως προς Σ, εντοπίζοντας το σημείο πάνω στον άξονα των σάντουιτς (Σ=10) και στη συνέχεια βάζουμε Σ= 0 οπότε βρίσκουμε ότι Χ=20, δηλαδή αν όλο το εισόδημα διατεθεί για αγορά χάμπουργκερ, θα αγοραστούν 20. Η κλίση της καμπύλης είναι -2. Προκύπτει από τον λόγο των τιμών 6/2 και είναι αρνητική γιατί για να αυξηθεί η αγοραζόμενη ποσότητα των Σ κατά ένα, πρέπει να μειωθεί η ποσότητα των Χ κατά 2.

Σχήμα:



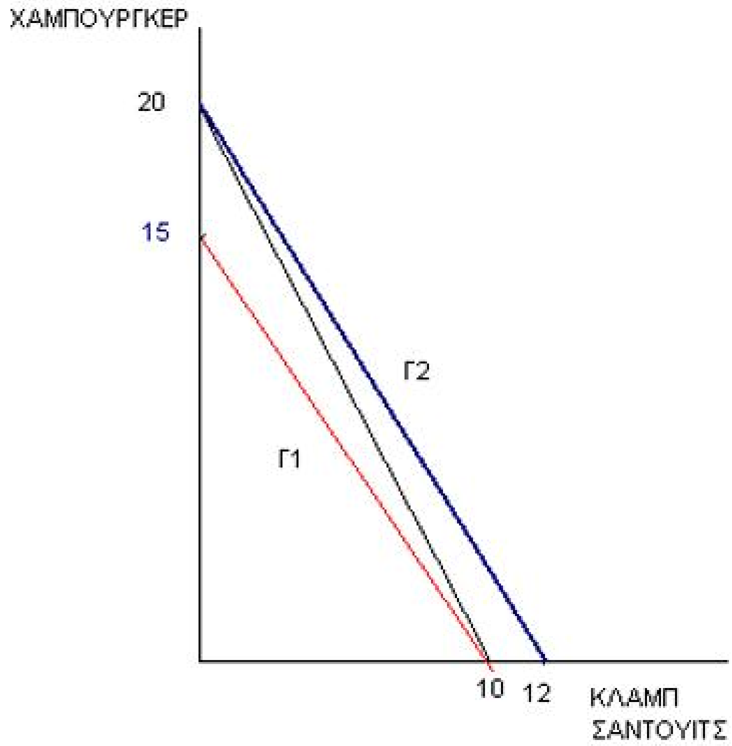
Β) 60=(Χ*3)+(5*6) **à** Χ=10

γ) Γ1. 60=(Χ*4)+(Σ*6). Η κλίση αλλάζει

γ2. 60=(Χ*3)+(Σ*5).

γ3. 40==(Χ*3)+(Σ*6) Η καμπύλη μετατοπίζεται κάτω αριστερά και είναι παράλληλη με την αρχική (δεν απεικονίζεται)

Σχήμα:



Παράδειγμα 2ο

Ένας καταναλωτής έχει εισόδημα Μ=120 για να το ξοδέψει στην αγορά 2 αγαθών, Χ & Υ οι τιμές των οποίων είναι 3 και 5 χ.μ αντίστοιχα.

Να σχεδιαστεί η γραμμή εισοδηματικού περιορισμού που να δείχνει όλους τους συνδυασμούς των 2 αγαθών που μπορούν να αγοραστούν με το δεδομένο εισόδημα. Τι θα συμβεί στην αρχική γραμμή εισοδηματικού περιορισμού αν:

Α) Το εισόδημα μειωθεί κατά 25%

Β) Διπλασιαστεί η τιμή του αγαθού Χ

Γ) Η τιμή του αγαθού Υ μειωθεί στις 4 χ.μ.

Λύση

Η εξίσωση της γραμμής ΕΠ είναι $120 = (X*3)+(Y*5)$. Θέτοντας Χ=0 και λύνοντας ως προς ψ βρίσκουμε $Y = \frac{120}{5} = 24$ που είναι το σημείο της γραμμής ΕΠ Πάνω στον οριζόντιο άξονα και μας δείχνει ότι αν ο καταναλωτής ξοδέψει όλο το εισόδημα του στην αγορά του ψ θα πάρει 24 μονάδες. Στη συνέχεια , θέτουμε Υ=0 και λύνοντας ως προς Χ βρίσκουμε $X = \frac{120}{3} = 40$ που είναι το σημείο τομής της γραμμής ΕΠ στον άξονα Χ και δείχνει τον ρυθμό των μονάδων Χ που αγοράζει ο καταναλωτής αν ξοδέψει όλο του το εισόδημα στο αγαθό Χ.

Α) Αν το εισόδημα του καταναλωτή μειωθεί κατά 25% θα γίνει $120 - (120*25\%) = 120 - 30 = 90$ και η νέα εξίσωση της γραμμής ΕΠ θα είναι $90 = (X*3)+(Y*5)$. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως και πριν βρίσκουμε Χ=18 και Υ=30. Διαγραμματικά έχουμε μετατόπιση παράλληλη με την αρχική προς τα κάτω.

Β) Αν διπλασιαστεί η τιμή του αγαθού Χ θα γίνει Px=6 και ΕΠ: $120 = (X*6)+(Y*5)$ με Ψ=24 (αμετάβλητο) και Χ=20, τα μισά από πριν.

Γ) ΑΝ η τιμή του Υ γίνει Py=4, θα έχουμε $120 = (X*3)+(Y*4)$ και με τον ίδιο τρόπο Υ=300 και Χ=40

Παράδειγμα 3^{o}

Μια έρευνα αγοράς έδωσε τις παρακάτω πληροφορίες σχετικά με την αγορά σοκολάτας: Η ζήτηση εκφράζεται από την σχέση: Qd=1600-300P ενώ η προσφορά εκφράζεται με την εξίσωση Qs=1400+700P.

α) Υπολογίστε την τιμή και ποσότητα ισορροπίας στην αγορά σοκολάτας.

Στη συνέχεια, να εξηγήσετε με τη βοήθεια διαγράμματος τις επιπτώσεις στην τιμή και ποσότητα ισορροπίας στις πιο κάτω περιπτώσεις. (κάθε περίπτωση ξεχωριστά).

β) Μια ασθένεια καταστρέφει σημαντικό αριθμό κακαόδεντρων της λατινικής Αμερικής.

γ) η Κίνα απελευθερώνει τις εισαγωγές σοκολάτας που μέχρι εκείνη τη στιγμή ήταν περιορισμένες σε ποσότητες πολύ κατώτερες της πραγματικής ζήτησης των Κινέζων καταναλωτών.

δ) Η Κίνα επιδοτεί την καλλιέργεια κακαόδεντρων σε μεγάλες εκτάσεις.

Λύση

Α) Για να βρούμε την τιμή και ποσότητα ισορροπίας θέτουμε Qd=Qs =>

1600-300P=1400+700P =>200=1000P => P=0,20 €.

Για να βρούμε την ποσότητα, αντικαθιστούμε το P=0,20 σε μια από τις 2 συναρτήσεις, έτσι Q=1600-300*0,2=1600-60=1540.

Β) Η καταστροφή κακαόδεντρων λόγω ασθένειας επιφέρει μείωση της προσφοράς και αύξηση της τιμής του κακάο, βασικής πρώτης ύλης της σοκολάτας και μετατοπίζει την καμπύλη προσφοράς αριστερά και πάνω: σε κάθε τιμή αντιστοιχεί μικρότερη ποσότητα από πριν. Το αποτέλεσμα είναι αύξηση της τιμής και μείωση της ποσότητας ισορροπίας.

Γ) Η απελευθέρωση των εξαγωγών σοκολάτας στην Κίνα προσθέτει ένα μεγάλο αριθμό νέων καταναλωτών στην μέχρι τότε ζήτηση. Η αύξηση του αριθμού των καταναλωτών μετατοπίζει την καμπύλη ζήτησης πάνω και δεξιά και οδηγεί σε αύξηση της τιμής αλλά και της ποσότητας ισορροπίας.

Δ) Η επιδότηση της καλλιέργειας κακαόδεντρων θα αυξήσει την προσφορά κακάο πράγμα που θα οδηγήσει σε μείωση της τιμής του. Σαν συνέπεια, θα μειωθεί και το κόστος παραγωγής σοκολάτας και επομένως θα αυξηθεί η προσφορά με μετατόπιση της καμπύλης κάτω και δεξιά. Με αμετάβλητη τη ζήτηση, θα έχουμε πτώση της τιμής ισορροπίας και αύξηση της ποσότητας ισορροπίας.

Παράδειγμα 4^{o}

Υποθέστε ότι ένας καταναλωτής δαπανά ένα χρηματικό ποσό τον μήνα για φαγητό (F) και ενδύματα (C). Σχεδιάστε ένα διάγραμμα όπου η ποσότητα του φαγητού, Q_f, μετράτε στον κάθετο άξονα και η ποσότητα των ενδυμάτων, Q_C, μετράτε στον οριζόντιο άξονα.

α) Αν η τιμή του φαγητού είναι $P_f = 5$ ευρώ το κιλό, η τιμή των ενδυμάτων είναι $P_C = 10$ευρώ ανά τεμάχιο και η μηνιαία δαπάνη για ρούχα και ενδύματα είναι E = €500, σχεδιάστε τον εισοδηματικό περιορισμό του καταναλωτή.

β) Στο ίδιο διάγραμμα, σχεδιάστε τον εισοδηματικό περιορισμό για $P_f = 5$€, $P_c = 10$€ και για το νέο επίπεδο δαπάνης E1= €600.

γ) Ποιος θα είναι ο εισοδηματικός περιορισμός του καταναλωτή αν η δαπάνη και η τιμή των ενδυμάτων παραμείνουν E = €500 και C P = €10, αντίστοιχα, αλλά η τιμή του φαγητού αυξηθεί σε $P_{f1} = 10$€; Σχεδιάστε τον νέο εισοδηματικό περιορισμό στο διάγραμμα που έχετε φτιάξει.

δ) Ποιος θα είναι ο εισοδηματικός περιορισμός του καταναλωτή αν η δαπάνη και η τιμή του φαγητού παραμείνουν E = €500 και $P_f = 10$€, αντίστοιχα, αλλά η τιμή των ενδυμάτων αυξηθεί σε $P_{c1} = 20$€; Σχεδιάστε τον νέο εισοδηματικό περιορισμό στο διάγραμμα που έχετε φτιάξει.

Λύση

α) Ο εισοδηματικός περιορισμός (α) δίνεται από την εξίσωση:

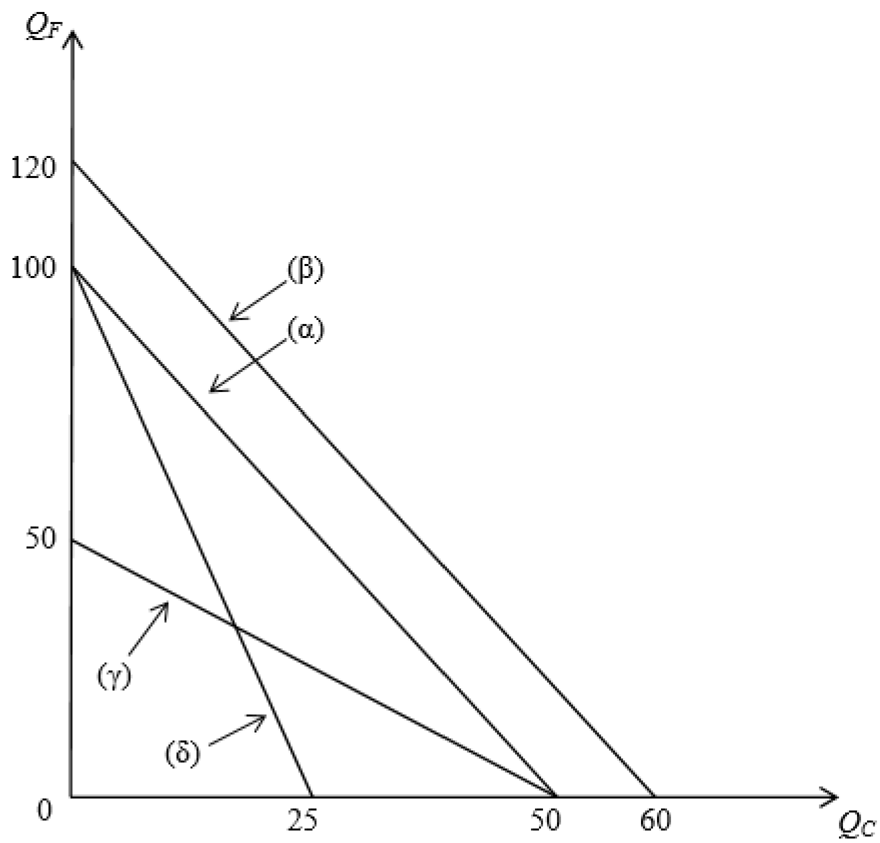
$P_f * Q_f + P_C * Q_C = E \Leftrightarrow 5 * Q_f + 10 * Q_C = 500$

Όταν $Q_C = 0 : Q_f = 500/5 = 100$

Όταν $Q_f = 0 : Q_C = 500/10 = 50$

Άρα, ο εισοδηματικός περιορισμός (α) τέμνει τον κάθετο άξονα στο σημείο $(Q_C, Q_f) = (0,100)$ και τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $(Q_C, Q_f) = (50,0)$.

Σχήμα:



β) Ο εισοδηματικός περιορισμός (γ) δίδεται από την εξίσωση:

$P_{f1} * Q_f * P_C * Q_C = E1 \Leftrightarrow 5 * Q_f * 10 * Q_C = 600$

Όταν $Q_C = 0 : Q_f = 600/5 = 120$

Όταν $Q_f = 0 : Q_C = 600/10 = 60$

Άρα, ο εισοδηματικός περιορισμός (β) τέμνει τον κάθετο άξονα στο σημείο $(Q_C, Q_f) = (0{,}120)$ και τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $(Q_C, Q_f) = (60{,}0)$

γ) Ο εισοδηματικός περιορισμός (γ) δίνεται από την εξίσωση:
$P_{f1} * Q_f + P_C * Q_C = E \; Û \; 10 * Q_f + 10 * Q_C = 500$

Όταν $Q_C = 0 : Q_f = 500/10 = 50$

Όταν $Q_f = 0 : Q_C = 500/10 = 50$

Άρα, ο εισοδηματικός περιορισμός (γ) τέμνει τον κάθετο άξονα στο σημείο $(Q_C, Q_f) = (0{,}50)$ και τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $(Q_C, Q_f) = (50{,}0)$

Δ) Ο εισοδηματικός περιορισμός (δ) δίνεται από την εξίσωση:
$P_f * Q_f + P_{c1} * Q_C = E \; Û \; 5 * Q_f + 20 * Q_C = 500$

Όταν $Q_C = 0 : Q_f = 500/5 = 100$

Όταν $Q_f = 0 : Q_c = 500/20 = 25$

Άρα, ο εισοδηματικός περιορισμός (δ) τέμνει τον κάθετο άξονα στο σημείο $(Q_C, Q_f) = (0{,}100)$ και τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $(Q_C, Q_f) = (25{,}0)$

Παράδειγμα 5ο

Μια επιχείρηση γνωρίζει οτι η ελαστικότητα προσφοράς και η ελαστικότητα ζήτησης του προϊόντος που παράγει είναι 0,7 και -1,85 αντίστοιχα. Εάν γίνει η υπόθεση οτι οι καμπύλες προσφοράς και ζήτησης είναι ευθύγραμμες και με δεδομένο οτι την παρούσα χρονική στιγμή η τιμή του προϊόντος είναι 1 ευρώ και η παραγόμενη και ζητούμενη ποσότητα (ανά μήνα) του προϊόντος είναι 1400 τόνοι, να εκτιμηθούν οι καμπύλες προσφοράς και ζήτησης.

Λύση

Εφόσον η καμπύλη προσφοράς είναι ευθύγραμμη, εάν θεωρήσουμε ότι $P = f(Q^S)$, θα ισχύει: $P = aQ^S + b$

Η ελαστικότητα προσφοράς θα είναι:
$Es = (dQ^S / dP)(P / Q^S) = [1/ dP / dQ^S](P / Q^S) \Rightarrow Es = (1/a)(P / Q^S) \Rightarrow a = (1/ Es)(P / Q^S)$
Επίσης:
$P = aQ^S + b \Rightarrow b = P - aQ^S \Rightarrow b = P - Q^S (1/ Es)(P / Q) \Rightarrow b = P - (P / Es) \Rightarrow b = P(1 - (1/ Es))$
Με βάση τα δεδομένα προκύπτουν: $a = 10{,}2*10^{-4}$, $b = -0{,}4286$

Και η συνάρτηση προσφοράς θα είναι: $P = 10{,}2*10^{-4} Q - 0{,}4286$

Για την καμπύλη ζήτησης, εφόσον είναι ευθύγραμμη, εάν θεωρήσουμε ότι: $P = f(Q^d)$, θα ισχύει: $P = a_1 Q^d + b_1$

Ακολουθώντας την ίδια προσέγγιση προκύπτει ότι $a_1 = (1/ Ed)(P / Q^d)$, $b_1 = P(1 - (1/ Ed))$ και η συνάρτηση ζήτησης θα είναι:
$P = -3{,}861*10^{-4} Q + 1{,}541$

Για την καμπύλη προσφοράς, εάν θεωρήσουμε ότι: $Q^S = f(P)$, θα ισχύει: $Q^S = aP + \mathrm{b}$

Η ελαστικότητα προσφοράς θα είναι:
$Es = (dQ^S / dP)(P / Q^S) \Rightarrow Es = a(P / Q^S) \Rightarrow a = EsQ^S / P$

Επίσης: $Q^S = aP + \mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{b} = Q^S - aP \Rightarrow \mathrm{b} = Q^S - EsQ^S \Rightarrow \mathrm{b} = Q^S (1 - Es)$

Με βάση τα δεδομένα προκύπτει ότι η συνάρτηση προσφοράς θα είναι:
$Q^S = 980P + 420$

Για την καμπύλη ζήτησης, εάν θεωρήσουμε ότι $P = f(Q^S)$, θα ισχύει: $Q^d = a_1 P + \mathrm{b}_1$ Ακολουθώντας την ίδια προσέγγιση προκύπτει ότι: $a_1 = EdQ^d / P$, $\mathrm{b}_1 = Q^d (1 - Ed)$ και η συνάρτηση ζήτησης θα είναι:
$Q^d = -2590P = 3990$

[3]

Παράδειγμα 6ο

Σε μια πλήρως ανταγωνιστική αγορά οι καμπύλες προσφοράς και ζήτησης είναι: Qs = 15000 P, Qd = 90000 – 15000 P Ζητούνται:

Α) Τα μεγέθη ισορροπίας της αγοράς (τιμή ισορροπίας και ποσότητα ισορροπίας).

Β) Το είδος της ισορροπίας της αγοράς.

Γ) Εάν υπάρξει μια αύξηση στο εισόδημα των καταναλωτών και η νέα καμπύλη ζήτησης είναι: $Qd_1 = 120000 - 15000P$ ποια θα είναι τα νέα μεγέθη ισορροπίας της αγοράς;

Δ) Εάν υπάρξει και μια βελτίωση στην τεχνολογία παραγωγής ώστε η νέα καμπύλη προσφοράς να είναι: $Qs_1 = 30000 + 15000P$ ποια θα είναι τα νέα μεγέθη ισορροπίας της αγοράς (σε συνδυασμό με την νέα καμπύλη ζήτησης);

Λύση

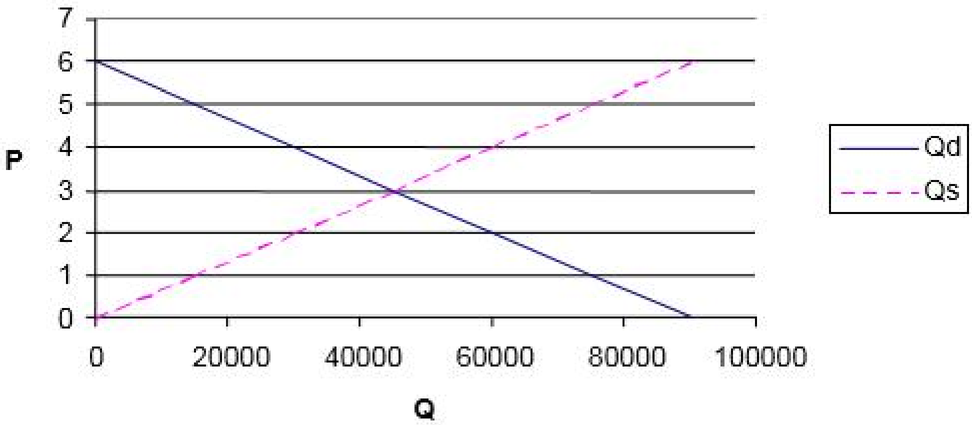
Α) Όταν οι συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης δοθούν με την αλγεβρική τους μορφή τότε τα μεγέθη ισορροπίας (τιμή και ποσότητα ισορροπίας) προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων. Σε περίπτωση μεταβολής μιας ή και των δύο συναρτήσεων επιλύονται εκ νέου τα νέα συστήματα εξισώσεων. α. Τα μεγέθη ισορροπίας της αγοράς είναι:

Pe=3

Qe=45000

όπου Pe = τιμή ισορροπίας και Qe = ποσότητα ισορροπίας.

Σχήμα:



B) Για τη διερεύνηση του είδους της ισορροπίας (ευσταθής ή ασταθής) καταγράφονται οι πιέσεις (αυξητικές ή πτωτικές) στις τιμές για αύξηση και μείωση της τιμής πέραν της τιμής ισορροπίας. Εάν η άσκηση των πιέσεων στις τιμές σε μια θέση μη ισορροπίας απομακρύνει το σύστημα της αγοράς περισσότερο από την αρχική θέση ισορροπίας η ισορροπία στην αγορά είναι ασταθής, ενώ εάν συμβαίνει το αντίθετο, δηλ. η άσκηση των πιέσεων στις τιμές επαναφέρει το σύστημα της αγοράς από μια θέση μη ισορροπίας στην αρχική θέση ισορροπίας, η ισορροπία στην αγορά είναι ευσταθής.

Η αύξηση της τιμής πέραν της τιμής ισορροπίας δημιουργεί υπερβάλλουσα προσφορά (Qs-Qd>0) με αποτέλεσμα την άσκηση πτωτικών πιέσεων στις τιμές και η μείωση της τιμής πέραν της τιμής ισορροπίας δημιουργεί υπερβάλλουσα ζήτηση (QsQd<0) με αποτέλεσμα την άσκηση αυξητικών πιέσεων στις τιμές. Και στις δυο περιπτώσεις η άσκηση των πιέσεων στις τιμές επαναφέρει το σύστημα της αγοράς από μια θέση μη ισορροπίας στην αρχική θέση ισορροπίας και για το λόγο αυτό η ισορροπία στην αγορά είναι ευσταθής

Πίνακας 1:

Qd	P	Qs	Qs-Qd	ΠΙΕΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΙΜΗ
0	6	90000	90000	–
15000	5	75000	60000	–
30000	4	60000	30000	–
45000	3	45000	0	
60000	2	30000	-30000	-

75000	1	15000	-60000	-
90000	0	0	-90000	-

Γ) τα νέα μεγέθη ισορροπίας της αγοράς είναι:

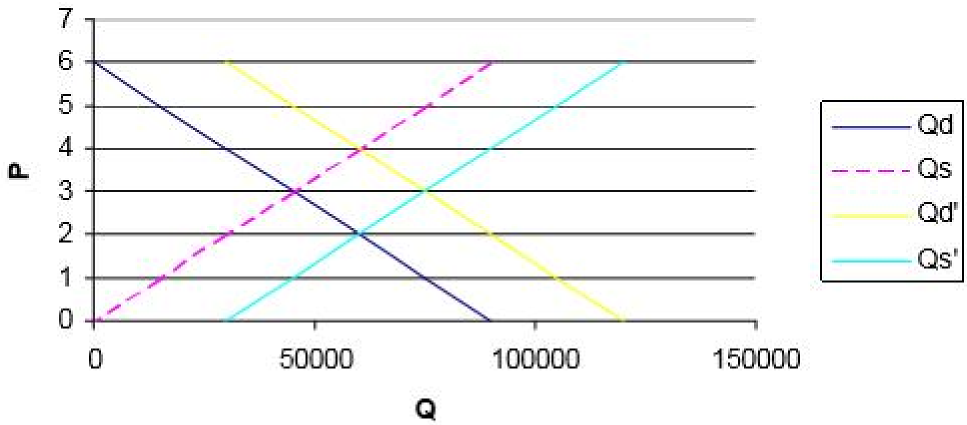
Pe=4, Qe=60000

όπου Pe = τιμή ισορροπίας και Qe = ποσότητα ισορροπίας (βλ. επίσης σχήμα 2)

Δ) Τα νέα μεγέθη ισορροπίας της αγοράς είναι:

Pe = 3 Qe = 75000 όπου Pe = τιμή ισορροπίας και Qe = ποσότητα ισορροπίας

Σχήμα:



[3]

Παράδειγμα 7^{o}

Ένας αντιπροσωπευτικός καταναλωτής δαπανά ένα σταθερό τμήμα του μηνιαίου εισοδήματός του έστω I = 880 ευρώ, αγοράζοντας μη διαρκή καταναλωτικά για τις ανάγκες του και ειδικότερα εγχώρια (έστω X) και εισαγόμενα προϊόντα (έστω Y) με αντίστοιχες τιμές Px = 10 ευρώ και Py = 12 ευρώ. Η συνάρτηση χρησιμότητας του αντιπροσωπευτικού καταναλωτή είναι U(x,y) = xy1,2 . Ζητούνται:

Α) Οι ποσότητες των εγχώριων και εισαγόμενων προϊόντων που αγοράζει ο καταναλωτής έτσι ώστε να μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά του. Β) Με βάση τα παραπάνω να προσδιοριστεί η καμπύλη ζήτησης του αγαθού Χ εάν θεωρηθεί οτι αυτή είναι ευθεία.

Λύση

Για τον προσδιορισμό των ποσοτήτων των καλαθιών αγαθών (προϊόντων) που αγοράζει ο καταναλωτής έτσι ώστε να μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά του απαιτείται η εφαρμογή των συνθηκών ισορροπίας του καταναλωτή και η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2) όπως δίνεται παρακάτω.

ΟΛ $Uxy = Px/Py$, ΟΛ $Uxy = MUx/MUy$ άρα: $MUx/MUy = Px/Py$ (1)

10χ=12y=880 (2)

όπου ΟΛΥxy ο οριακός λόγος υποκατάστασης του Χ από το Υ, MUx,MUy οι οριακές χρησιμότητες, Px,Py οι τιμές και x, y οι ποσότητες των αγαθών Χ και Υ.

Με βάση τη συνάρτηση συνολικής χρησιμότητας ισχύουν:

$MUx = y^{1,2}$, $MUy = 1{,}2 * y^{0,2}$

Και με βάση την (1) προκύπτει x=y. Με βάση την τελευταία σχέση και την (2) προκύπτει τελικά: x=40 και y=40

Εναλλακτικά, για τη μεγιστοποίηση της χρησιμότητας μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής: Επιλύουμε τον εισοδηματικό περιορισμό ως προς μια μεταβλητή, έστω την x: 10x+12y=880, x = 88-1,2y

και αντικαθιστούμε στη συνάρτηση χρησιμότητας: $U = (88 - 1{,}2y) * y^{1,2}$, $U = 88y^{1,2} - 1{,}2y^{2,2}$

Απαιτείται η μεγιστοποίηση της: $U(y) = 88y^{1,2} - 1{,}2y^{2,2}$

Για να μεγιστοποιείται η συνάρτηση U(y) πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

Μεγιστοποίηση U(y)	
Συνθήκη Α’ τάξεως	$\frac{dU}{dy} = 0$
Συνθήκη Β’ τάξεως	$\frac{d^2U}{dy^2 < 0}$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη Α’ τάξεως προκύπτει y=40. Η συνθήκη Β’ τάξεως ισχύει για y=40.

Από τη σχέση 10x+12y=880, για y=40 προκύπτει x=40.

B) Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει ένα σημείο της καμπύλης ζήτησης (Px, Qx) = (10, 40) .

Θεωρώντας ότι έστω οτι Px=20 με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται ένα ακόμη σημείο της καμπύλης: (Px’, Qx’) = (20, 20) και από τα δύο σημεία εξάγεται η καμπύλη ζήτησης.

[3]

Η θεωρία του παραγωγού- το κόστος της επιχείρησης

Βασικές έννοιες:

Κόστος, οικονομικό κέρδος, ισορροπία της επιχείρησης στον τέλειο ανταγωνισμό.

Οικονομικό κόστος =λογιστικό κόστος + κόστη ευκαιρίας συντελεστών της παραγωγής.

Μη ανακτήσιμη δαπάνη: Μία δαπάνη που, από τη στιγμή που έγινε δεν μπορεί να ανακτηθεί. Οι μη ανακτήσιμες δαπάνες δεν λαμβάνονται υπόψη στη λήψη αποφάσεων σχετικά με το ύψος της παραγωγής.

Παράδειγμα 1ο

Η εταιρεία παγωτού «Σπέσιαλ» έχει υπολογίσει ότι στο επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη της εισπράττει €13000 το μήνα από πωλήσεις παγωτού και πληρώνει €6000 σε μισθούς, €1500 σε ενοίκιο, και €4000 για υλικά. Ο ιδιοκτήτης της Σπέσιαλ, Μπάμπης, διαθέτει όλο το χρόνο του στην επιχείρηση. Αν δεν είχε την επιχείρηση, θα έβγαζε €36000 χρόνο σαν Σεφ σε τοπικό εστιατόριο.

Υπολογίστε το οικονομικό κέρδος της Σπέσιαλ. Πρέπει η εταιρεία να συνεχίσει την παραγωγή ή πρέπει να κλείσει;

Λύση

Οικονομικό κέρδος= Συνολικά έσοδα- συνολικά κόστη ή Π=TR-TC

Σε μηνιαία βάση, TR= 13000€

Κόστος ευκαιρίας επιχειρηματία =36000/12=3000€ το μήνα

Οικονομικά κόστη= TC= 6000+1500+4000+3000= 14500

Οικονομικό κέρδος= 13000-14500=-1500 (ζημία)

Συμπέρασμα: Ο Μπάμπης πρέπει να κλείσει την επιχείρηση και να δουλέψει σαν Σεφ.

Παράδειγμα 2ο

Η εταιρεία παγωτού «Σπιτικό» παράγει σε εγκαταστάσεις τις οποίες έχει νοικιάσει με δεσμευτικό συμβόλαιο για ένα ακόμη χρόνο με ετήσιο ενοίκιο €20000. Η διοίκηση υπολογίζει ότι αν η επιχείρηση παράγει στο άριστο επίπεδο παραγωγής (όπου MC=MR) θα είχε έσοδα €150000 και μεταβλητά κόστη €140000 για μισθούς και υλικά. Ποιο είναι το κέρδος/ζημιά; Πρέπει να συνεχίσει να λειτουργεί ή πρέπει να κλείσει η επιχείρηση; Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

Λύση

Λογιστικό/οικονομικό κέρδος= 150000-(140000+20000)=150000-160000=-10000

Συνέχιση λειτουργίας => ζημίες 10000

Διακοπή λειτουργίας=> ζημίες 20000

Συμπέρασμα: μέχρι τη λήξη του συμβολαίου η επιχείρηση πρέπει να συνεχίσει τη λειτουργία της, καλύπτοντας μέρος του σταθερού της κόστους, στη συνέχεια πρέπει να κλείσει.

Παράδειγμα 3ο

Τα στοιχεία απασχολούμενων ωρών εργασίας και ποσότητας σιτηρών που παράγει ένας καλλιεργητής έχουν ως εξής:

Προϊόν (κιλά)	5917	7250	8379	9371
Εργασία (ώρες)	1200	1800	2400	3000

(η σχέση αυτή υποθέτει δεδομένα επίπεδα για τις υπόλοιπες εισροές που χρησιμοποιεί ο καλλιεργητής).

α) Υπολογίστε το μέσο προϊόν της εργασίας όταν απασχολείται κάθε

διαφορετική ποσότητα εργασίας.

β) Υπολογίστε το οριακό προϊόν της εργασίας όταν απασχολούνται ποσότητες εργασίας μεταξύ 1.200 και 1.800 ωρών, όταν απασχολούνται ποσότητες εργασίας μεταξύ 1.800 και 2.400 ωρών και όταν απασχολούνται ποσότητες εργασίας μεταξύ 2.400 και 3.000 ωρών.

γ) Η συνάρτηση παραγωγής αυτή επιδεικνύει φθίνουσες οριακές αποδόσεις;

Λύση

Έστω Q η ποσότητα των σιτηρών και L η ποσότητα της εργασίας. Το μέσο προϊόν της εργασίας δίνεται από τη σχέση: $AP_L = Q/L$

Το μέσο προϊόν της εργασίας, όπως υπολογίστηκε από την παραπάνω σχέση, παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα.

Προϊόν (κιλά)	5917	7250	8379	9371
Εργασία (ώρες)	1200	1800	2400	3000
AP_L (Κιλά)	4,93	4,03	3,49	3,12

β) Ας συμβολίσουμε με Q(L) τη συνάρτηση παραγωγής. Το οριακό προϊόν της εργασίας μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$MP_L = \Delta Q / \Delta L = [Q(L) - Q(L-1)]/[L - (L-1)]$$

Όταν απασχολείται ποσότητα εργασίας μεταξύ 1200 και 1800 ωρών, το προϊόν της εργασίας είναι: $MP_L = (7250 - 5917)/(1800 - 1200) = 2{,}22$ κιλά σιτηρών. Όταν απασχολείται ποσότητα εργασίας μεταξύ 1800 και 2400 ωρών, το οριακό προϊόν της εργασίας είναι:
$MP_L = (8379 - 7250)/(3000 - 2400) = 1{,}65$ κιλά σιτηρών.

Όταν απασχολείται ποσότητα εργασίας μεταξύ 2400 και 3000 ωρών, το οριακό προϊόν της εργασίας είναι: $MP_L = (9371 - 8379)/(3000 - 2400) = 1{,}65$ κιλά σιτηρών.

Γ) Ναι. Το οριακό προϊόν της εργασίας μειώνεται καθώς αυξάνεται η ποσότητα εργασίας που απασχολείται.

Παράδειγμα 4ο

Σε μία εταιρεία, η σχέση ανάμεσα στην ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος, στον αριθμό των ωρών ειδικευμένης (skilled) εργασίας και στον αριθμό των ωρών ανειδίκευτης (unskilled) εργασίας είναι:

$$Q = 300 * S + 100 * U - 0{,}2S^2 - 0{,}3U^2$$

όπου Q είναι η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος, S είναι οι ώρες ειδικευμένης εργασίας και U είναι οι ώρες ανειδίκευτης εργασίας. Το ωρομίσθιο της ειδικευμένης εργασίας είναι Ps = 10€ και το ωρομίσθιο της ανειδίκευτης εργασίας είναι Pu= 5€. Η εταιρεία μπορεί να προσλάβει όση εργασία θέλει σε αυτήν την αναλογία μισθών.

α) Θα συνιστούσατε στην εταιρεία να προσλάβει 400 ώρες ειδικευμένης εργασίας και 100 ώρες ανειδίκευτης εργασίας; Ναι ή όχι και γιατί;

β) Αν η εταιρεία αποφασίσει να δαπανήσει συνολικά €6.000 σε ειδικευμένη και ανειδίκευτη εργασία, πόσες ώρες από κάθε είδος εργασίας πρέπει να προσλάβει;

Λύση

Α) Έστω MPs και MPu τα οριακά προϊόντα της ειδικευμένης και της ανειδίκευτης εργασίας, αντίστοιχα. Αν η εταιρεία έχει ως στόχο να μεγιστοποιήσει το παραγόμενο προϊόν με δεδομένο το επίπεδο του κόστους, θα πρέπει να επιλέξει εκείνον το συνδυασμό των S και U που ικανοποιεί τη συνθήκη: $\frac{MP_s}{P_s} = \frac{MP_u}{P_u}$

Από τη συνάρτηση παραγωγής της εταιρείας έχουμε ότι:

$$MP_s = \frac{QQ}{QS} = 300 - 0{,}4 * S \text{ , } MP_u = \frac{QQ}{QU} = 100 - 0{,}6 * U$$

Συνεπώς, η εταιρεία θα συμπεριφέρεται αριστοποιητικά αν επιλέξει τον συνδυασμό των S και U που ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\frac{MP_s}{MP_u} = \frac{P_s}{P_u} \Leftrightarrow \frac{300 - 0,4S}{100 - 0,6U} = \frac{10}{5} \Leftrightarrow 300 - 0,4S = 200 - 1,2U \Leftrightarrow 0,4S = 100 + 1,2U \Leftrightarrow S = 250 + 3U$$

Είναι εμφανές ότι η παραπάνω συνθήκη δεν ισχύει για τον συνδυασμό εισροών S = 400 και U = 100. Άρα, δεν συνίσταται η επιλογή του.

β) Αν η συνολική δαπάνη της εταιρείας για S και U είναι €6.000, τότε η καμπύλη ίσου κόστους δίνεται από την εξίσωση:

$$6000 = Ps * s + Pu * U \Leftrightarrow 6000 = 10 * (250 + 3U) + 5U \Leftrightarrow 6000 = 2500 + 30U + 5U \Leftrightarrow$$
$$3500 = 35U \Leftrightarrow U = 100.$$

Επομένως, $S = 250 + 3U = 250 + 3 * 100 = 550$. Άρα, για ένα δεδομένο επίπεδο κόστους ίσο με €6.000, ο συνδυασμός εισροών που μεγιστοποιεί το παραγόμενο προϊόν είναι S = 550 ώρες και U = 100 ώρες.

Παράδειγμα 5ο

Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης είναι: Q = f(L, K) = L+2LK

Α) Σχεδιάστε τρεις ισοκαμπύλες παραγωγής για Q=1, Q=2, Q=3

Β) Η συγκεκριμένη συνάρτηση παραγωγής ακολουθεί σταθερές, αύξουσες ή φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας, εάν οι εισροές αυξηθούν κατά a>1;

Λύση

Α) $Q = 2KL \Rightarrow K = (Q - L)/2L$

Για $Q = \overline{Q}$ ισχύει: $K(L) = (\overline{Q} - L)/2L$, $L \leq \overline{Q}$

Ισχύουν επίσης $dK/dL < 0$ και $d^2L/dL^2 > 0$ και η K(L) τέμνει τον άξονα της εργασίας (L) στο σημείο $L = \overline{Q}$.

Για διάφορες τιμές του επιπέδου παραγωγής προκύπτουν οι συναρτήσεις των καμπυλών ισοπαραγωγής.

Π.χ. για $\overline{Q}=1$ ισχύει: $K(L)=(1-L)/2L=1/2L-1/2$

Με βάση τα παραπάνω σχεδιάζονται οι καμπύλες ισοπαραγωγής.

Β) Έστω ότι L,K αυξάνονται σε aL και ak αντίστοιχα α>1.

Τότε υπολογίζονται τα: f(aL, aK) και af(L,K)

Εάν af(L,K) = f(aL, aK) τότε η συγκεκριμένη συνάρτηση παραγωγής ακολουθεί σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

Αν af(L,K) < f(aL, aK) τότε η συγκεκριμένη συνάρτηση παραγωγής ακολουθεί αύξουσες αποδόσεις κλίμακας.

Αν af(L,K) > f(aL, aK) τότε η συγκεκριμένη συνάρτηση παραγωγής ακολουθεί φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας.

Με βάση τα δεδομένα προκύπτει ότι:

$$f(aL,aK)=aL+2a^2LK=aL+2aLK+2aLK(a-1)=af(L,K)+2aLK(a-1)>af(L,K)$$

Επομένως η συγκεκριμένη συνάρτηση παραγωγής ακολουθεί αύξουσες αποδόσεις κλίμακας.

[3]

Παράδειγμα 6ο

Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης είναι: Q = f(L, K) = 2 L0.5 K0.5. Οι τιμές των εισροών είναι w και r για την εργασία (L) και το κεφάλαιο (K) αντίστοιχα. Στη βραχυχρόνια περίοδο παραγωγής που μελετάται η ποσότητα του απασχολούμενου κεφαλαίου είναι σταθερή K=Ko. Ζητούνται:

Α) Η βραχυχρόνια συνάρτηση κόστους της επιχείρησης

Β) Το οριακό κόστος

Γ) Το οριακό προϊόν της εργασίας

Δ) Της είναι οι αποδόσεις κλίμακας που ακολουθεί η επιχείρηση;

Λύση

Α) Η βραχυχρόνια συνάρτηση κόστους της επιχείρησης δίνεται από τη σχέση: $TC = wL + rK = wQ^2 / 4Ko + rKo$

Β) Το οριακό κόστος δίνεται από τη σχέση: $MC = dTC / dQ = 2Qw / 4Ko$

Γ) Το οριακό προϊόν της εργασίας δίνεται από τη σχέση:
$MP_L = dQ / dL = K^{0,5} L^{-0,5}$

Δ) Η συνάρτηση παραγωγής είναι τύπου Cobb-Douglas: $Q = A * K^a * L^b$, α+β=1 αφού α=β=0,5 και ακολουθεί σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

Η γενική περίπτωση μια συνάρτησης παραγωγής Cobb-Douglas:
$Q = A * K^a * L^b \; f(oL, oK) = A * (oK)^a * (oL)^b = A * o^a K^a * o^b L^b = o^{a+b} A * K^a * L^b = o^{a+b} f(L, K)$
Άρα:

εάν α+β=1 => f(oL,oK) = λQ : σταθερές αποδόσεις κλίμακας

εάν α+β<1 => f(oL,oK) < λQ : φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας

εάν α+β>1 => f(oL,oK) > λQ : αύξουσες αποδόσεις κλίμακας

[3]

Η επιχείρηση στον τέλειο ανταγωνισμό

Στον κλάδο υπάρχουν πολλές επιχειρήσεις που προσφέρουν ένα τυποποιημένο, ομοιογενές προϊόν. Κάθε επιχείρηση κατέχει πολύ μικρό μερίδιο της αγοράς και δεν έχει τη δυνατότητα να επηρεάσει την τιμή πώλησης η οποία διαμορφώνεται από την συνολική προσφορά και ζήτηση. Η επιχείρηση θεωρεί την τιμή αυτή δεδομένη και απλά αποφασίζει την ποσότητα που θα προσφέρει στη συγκεκριμένη τιμή με βάση το κόστος της, έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει τη κέρδη της. Υπάρχει ελευθερία εισόδου νέων επιχειρήσεων στον κλάδο. Συνθήκη ισορροπίας της επιχείρησης στον τέλειο ανταγωνισμό: MR=P, MR=MC και το οικονομικό κέρδος μακροχρόνια είναι =0 δηλαδή P=AC.

MC=d(TC)/dq (η πρώτη παράγωγος του συνολικού κόστους)

Παράδειγμα 1°

Ο κλάδος παραγωγής του αγαθού Α είναι τελείως ανταγωνιστικός. Η αγοραία ζήτηση και η προσφορά για το αγαθό Α δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις:

Ζήτηση: QD=200-0,5P

Προσφορά: QS=-40+P

Να βρεθεί η συνάρτηση συνολικού, οριακού και μέσου εσόδου της τυπικής επιχείρησης που δραστηριοποιείται στον κλάδο αυτό.

Λύση

Σ' έναν τελείως ανταγωνιστικό κλάδο, το μέσο έσοδο και το οριακό έσοδο της επιχείρησης είναι ίσα με την τιμή που διαμορφώνεται στην αγορά για το προϊόν του κλάδου. Η τιμή αυτή είναι η τιμή ισορροπίας, δηλαδή εκείνη όπου η προσφερόμενη ποσότητα είναι ίση με τη ζητούμενη όπως προσδιορίζονται από τις αντίστοιχες συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης.

Μαθηματικά: Συνολικά έσοδα= TR=P*q, όπου P σταθερή και δεδομένη για κάθε επιχείρηση του κλάδου. Μέσο έσοδο= AR=(P*q)/q= P και οριακό έσοδο= $MR = dTR / dq = d(P * q) / Dq = p$

Πρέπει λοιπόν να βρούμε την τιμή ισορροπίας P, πράγμα εύκολο αν θέσουμε: $QD = Qs \Rightarrow 200 - 0,5P = -40 + P \Rightarrow 240 = 1,5P \Rightarrow P = 240/1,5 = 160$

Επομένως , η συνάρτηση συνολικών εσόδων γράφεται TR=160*q, και AR=MR=160€

Παράδειγμα 2^{o}

Μια επιχείρηση που λειτουργεί σε συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού έχει συνάρτηση κόστους $TC = q^2 + 10q + 150$. Η τιμή του προϊόντος της στην αγορά είναι 50 χμ.

Α) Να υπολογιστεί το συνολικό και το ανά μονάδα κέρδος της επιχείρησης σε περίπτωση που παράγει 16 μονάδες προϊόντος. Είναι αυτό το μέγιστο κέρδος της επιχείρησης;

Β) Πόση πρέπει να γίνει η τιμή του προϊόντος στην αγορά προκειμένου να μην μπορεί η επιχείρηση να πραγματοποιήσει θετικό κέρδος;

Λύση

Α) Το κέρδος της επιχείρησης δίνεται από τον τύπο Κέδρος =Συνολικά έσοδα-Συνολικό κόστος ή Π=TR-TC

Αλλά TR=P*q (1) και

$TC = q^2 + 10q + 150$ (2) οπότε αντικαθιστούμε στην (1) και (2) P=50 και q=16 και έχουμε: $TR = 50*16 = 800$ και $TC = 16^2 + 10*16 + 150 = 256 + 160 + 150 = 566$ και Π=800-566=234 χ.μ.

Ανά μονάδα κέρδος$= \frac{\text{P}}{q} = \frac{234}{16} = 14{,}63$.

Το ότι η επιχείρηση έχει κέρδος δεν σημαίνει ότι είναι και το μέγιστο. Η επιχείρηση μεγιστοποιεί το κέρδος της στο επίπεδο παραγωγής όπου MC=P με την προϋπόθεση ότι το οριακό κόστος να είναι αύξον.

Το οριακό κόστος δίνεται από τη σχέση $MC = d(TC)/dq = 2q + 10$ (πρώτη παράγωγος της συνάρτησης συνολικού κόστους). Η συνάρτηση αυτή είναι όντος αύξουσα αφού είναι γραμμική και 2>0

Θέτοντας P=MC ή 50=2q+10 και λύνοντας ως προς q βρίσκουμε q=20, αυτό είναι το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη. Αντικαθιστούμε q=20 στις σχέσεις (1) και (2) και βρίσκουμε Π=1000-750=250.

Β) Για να έχει η επιχείρηση μηδενικό κέρδος θα πρέπει η τιμή της αγοράς να είναι ίση με το συνολικό κόστος. Επειδή θα πρέπει ταυτόχρονα η τιμή να είναι ίση και με το οριακό της κόστος, αυτή η ισότητα επιτυγχάνεται στο σημείο όπου το μέσο κόστος είναι ελάχιστο.

Μέσο κόστος $AC = \frac{TC}{q} = \frac{(q^2 + 10q + 150)}{q} = q + 10 + \frac{1}{q} * 150$ Θέτουμε $AC = MC$ ή $q + 10 + \frac{1}{q} * 1500 = 2q + 10$ και λύνουμε ως προς q. Βρίσκουμε q=12,25 και στη συνέχεις θέτοντας MC=P=2q+10 αντικαθιστούμε όπου q=12,25 και βρίσκουμε P=34,50.

Παράδειγμα 3ο

Η συνάρτηση συνολικού κόστους μιας επιχείρησης δίνεται από τη σχέση: $TC = 200 + 4Q + 2Q^2$

όπου TC είναι το συνολικό κόστος (σε €) και Q είναι η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος.

α) Αν η επιχείρηση είναι τέλεια ανταγωνιστική και η τιμή του προϊόντος της είναι P = €24, ποιο είναι το άριστο επίπεδο παραγωγής;

β) Σε αυτό το επίπεδο παραγωγής, ποια είναι τα κέρδη της; Θα πρέπει η επιχείρηση να συνεχίσει τη λειτουργία της παράγοντας αυτό το επίπεδο προϊόντος ή πρέπει να κλείσει;

Λύση

α) Η συνθήκη για τη μεγιστοποίηση των κερδών μιας τέλεια ανταγωνιστικής επιχείρησης είναι P = MC, όπου MC είναι το οριακό κόστος. Από τη συνάρτηση TC της επιχείρησης του προβλήματός μας έχουμε ότι το MC δίνεται από τη σχέση: $MC = \frac{dTC}{dQ} = 4 + 4Q$.

Συνεπώς, για την επιχείρηση του προβλήματός μας, η συνθήκη για τη μεγιστοποίηση των κερδών είναι: $P = MC \Leftrightarrow 24 = 4 + 4Q \Leftrightarrow 4Q = 5$. Άρα, το άριστο επίπεδο παραγωγής είναι Q=5.

β) Έστω TR τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης και π τα κέρδη της. Τα συνολικά έσοδα είναι: TR = PQ= 24Q. Τότε, τα κέρδη της επιχείρησης είναι: $\pi = TR - TC = 24Q - 200 - 4Q - 2Q^2 = -200 + 20Q - 2Q^2$

Στο άριστο επίπεδο παραγωγής τα κέρδη θα είναι τα μέγιστα και θα είναι ίσα με: $\pi = -200 + 20*5 - 2*5^2 = -150$

Άρα, στο άριστο επίπεδο παραγωγής η επιχείρηση έχει ζημίες ύψους 150€. Για να δούμε αν η επιχείρηση πρέπει να συνεχίσει την παραγωγή της ή να κλείσει, πρέπει να συγκρίνουμε την τιμή του προϊόντος, P=24€, με το μέσο μεταβλητό κόστος, AVC, ή να συγκρίνουμε τα κέρδη π=150€ με το συνολικό σταθερό κόστος, TFC. Από τη συνάρτηση TC της επιχείρησης έχουμε ότι: $TFC = 200$, $TVC = 4Q + 2Q^2$

όπου TVC είναι το συνολικό μεταβλητό κόστος. Άρα, το μέσο μεταβλητό κόστος, AVC, δίνεται από τη σχέση: $AVC = \frac{TVC}{Q} = 4 + 2Q$

Στο άριστο επίπεδο προϊόντος έχουμε ότι AVC=4+2*5=14€. Συνεπώς, για P=24€ και άριστο επίπεδο προϊόντος Q=5, ισχύει ότι:
$P > AVC \Leftrightarrow \pi > -TFC$

Επομένως, στο Q=5, η επιχείρηση καλύπτει το TFC και ένα μέρος του TVC και θα συνεχίσει τη λειτουργία της, παρά το γεγονός ότι έχει ζημίες. Λειτουργώντας χάνει 150€, ενώ αν κλείσει θα χάσει 200€ (δηλαδή, θα χάσει το TFC').

Παράδειγμα 4ο

Σε μια πλήρως ανταγωνιστική αγορά οι αγοραίες καμπύλες προσφοράς και ζήτησης συναρτήσει της τιμής (P) ενός συγκεκριμένου προϊόντος είναι: Καμπύλη αγοραίας προσφοράς: Qs = 2000+4P Καμπύλη αγοραίας ζήτησης: Qd = 12000-6P Μια αντιπροσωπευτική επιχείρηση που δραστηριοποιείται στη συγκεκριμένη αγορά έχει συνάρτηση συνολικού κόστους: TC (q) = 10q2 + 20q +1000, όπου q το επίπεδο παραγωγής της επιχείρησης. Ζητούνται:

A) Τα μεγέθη ισορροπίας της αγοράς (τιμή ισορροπίας, ποσότητα ισορροπίας)

B) Το άριστο επίπεδο παραγωγής της επιχείρησης και να απαντηθούν τα ερωτήματα:

Γ) Η επιχείρηση πραγματοποιεί κέρδη ή ζημιές και ποιο το ύψος αυτών;

Δ) Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος η επιχείρηση πρέπει να συνεχίσει ή να διακόψει βραχυχρόνια την παραγωγή του συγκεκριμένου προϊόντος της;

Λύση

A) Τα μεγέθη ισορροπίας της αγοράς (Pe = τιμή ισορροπίας και Qe = ποσότητα ισορροπίας) υπολογίζονται αλγεβρικά επιλύοντας τη σχέση:

$$Q^s = Q^d$$

Τελικά προκύπτει: P=Pe=1000

Και επομένως: $Q^s = Q^d = Qe = 6000$

B) π(q) = TR(q) -TC(q)

TR(q) =Pq = 1000q (αφού στον πλήρη ανταγωνισμό η τιμή καθορίζεται από την αγορά)

$$TC(q) = TC(q) = 10q^2 + 20q + 1000$$

Επομένως:

$$\pi(q) = TR(q) - TC(q) = 1000q - (10q^2 + 20q + 1000) = -10Q^2 + 980q - 1000$$

Για να μεγιστοποιείται η συνάρτηση $\pi(q) = -10q^2 + 980q - 1000$ πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

Μεγιστοποίηση π(q)	
Συνθήκη Α' τάξεως	$\frac{d\pi}{dq} = 0$
Συνθήκη Β' τάξεως	$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω συνθήκες προκύπτει το άριστο επίπεδο παραγωγής της επιχείρησης q* = 49.

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και από τον κανόνα εξίσωσης του οριακού εσόδου με το οριακό κόστος: MR=MC (ισοδύναμη συνθήκη της παραπάνω συνθήκης Α' τάξεως). Η ισοδύναμη της παραπάνω συνθήκης Β' τάξεως : dMC/dq >0 ισχύει.

Γ) Η επιχείρηση πραγματοποιεί κέρδη εάν π(q*)>0 και ζημίες εάν π(q*)<0. Προκύπτει π(q*) =23010. Άρα η επιχείρηση πραγματοποιεί κέρδη.

Δ) Για τη συμπεριφορά της επιχείρησης στη βραχυχρόνια περίοδο τίθεται θέμα διακοπής της λειτουργίας της μόνον όταν πραγματοποιεί ζημίες για το επίπεδο του βαθμού δραστηριότητας που μεγιστοποιεί το οικονομικό αποτέλεσμα. Τότε, ένας από τους τρόπους προσέγγισης του θέματος αυτού είναι να συγκριθεί η τιμή με το μέσο μεταβλητό κόστος και εάν είναι μεγαλύτερη από αυτό τότε η επιχείρηση μπορεί να συνεχίζει να λειτουργεί, διαφορετικά θα πρέπει να διακόψει τη λειτουργία της.

Εφόσον η επιχείρηση πραγματοποιεί κέρδη θα συνεχίσει να λειτουργεί.

[3]

Παράδειγμα 5^{o}

Η συνάρτηση συνολικού κόστους μιας πλήρους ανταγωνιστικής επιχείρησης δίνεται από τη σχέση: TC = q3 – 12q2 + 60q+130, ενώ τα συνολικά της έσοδα είναι TR = 30,75q Ζητούνται:

Α) Το άριστο επίπεδο παραγωγής της επιχείρησης και να απαντηθούν τα ερωτήματα:

Β) Η επιχείρηση πραγματοποιεί κέρδη ή ζημιές και ποιο το ύψος αυτών;

Γ) Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος η επιχείρηση πρέπει να συνεχίσει ή να διακόψει βραχυχρόνια την παραγωγή του συγκεκριμένου προϊόντος της;

Λύση

Το συνολικό κέρδος της επιχείρησης δίδεται από τη σχέση: $\pi(q) = TR(q) - TC(q) = -q^3 + 12q^2 - 29{,}25q - 130$ από τη συνθήκη Α' τάξεως προκύπτει: q1=1,5 & & q2=6,5

Η λύση q2=6,5 ικανοποιεί τη συνθήκη Β' τάξεως. Άρα το άριστο επίπεδο παραγωγής είναι το q*=6,5.

Για να εξετάσουμε αν η επιχείρηση πραγματοποιεί κέρδη ή ζημίες μπορούμε να συγκρίνουμε την τιμή (=οριακό έσοδο) με το συνολικό μέσο κόστος AC.

$AC = TC/q = q^2 - 12q + 60 + 130/q$ για q=6,5, AC=44,25

AC = 44,25 > P = 30,75 άρα το οικονομικό αποτέλεσμα είναι: (P-AC)q = (30,7544,25) x 6,5 = -87,75 και επομένως η επιχείρηση πραγματοποιεί ζημιές. Εφόσον η επιχείρηση πραγματοποιεί ζημιές θα πρέπει να συγκρίνουμε το μέσο μεταβλητό κόστος με την τιμή:

$AVC = VC/q = q^2 - 12q + 60 = 24{,}25$

P=30,75>AVC=24,25 και άρα η επιχείρηση πρέπει να συνεχίσει τη λειτουργία της.

[3]

Παράδειγμα 6ο

Κάθε επιχείρηση από τις απεριορίστου αριθμού επιχειρήσεις που δραστηριοποιούνται στην παραγωγή ενός προϊόντος σε μια πλήρως ανταγωνιστική αγορά έχει, στη βραχυχρόνια περίοδο, μια συνάρτηση συνολικού κόστους (TC): TC = 16 + q2, όπου q = ο βαθμός δραστηριότητας της επιχείρησης. Η αγοραία συνάρτηση ζήτησης είναι: Q d = 24 – P, όπου Q d = η ζητούμενη ποσότητα και P = τιμή.

Να υπολογιστούν τα μεγέθη ισορροπίας της αγοράς, η ποσότητα του προϊόντος που παράγει κάθε επιχείρηση και ο αριθμός των επιχειρήσεων στην αγορά, λαμβανομένου υπόψη οτι μόνον οι επιχειρήσεις που είναι ικανές να παράγουν χωρίς ζημιά παραμένουν στην αγορά

Λύση

Έστω ν ο αριθμός των επιχειρήσεων στην αγορά. Τότε ισχύει ότι η αγοραία προσφορά: $Q^s = q_1^s(p) + q_2^s(P) + ... + q_n^s(P)$

Για την κάθε επιχείρηση ισχύει: $P = MC(q)$, $TC = 16 + q^2$

Επομένως προκύπτει η $q^s(P)$ η οποία είναι $q^s(P) = P/2$

Στο σύνολο της αγοράς θα ισχύει: $Q^s = nq^s(P)$, $Q^d = 24 - P$

Και το σημείο ισορροπίας θα πρέπει: $Q^s = Q^d$

Και προκύπτει η P και κατόπιν η $q^s(P)$. Με βάση τα παραπάνω προκύπτει P=48/(n+2) και q=24/(n+2).

Για να παραμείνει μια επιχείρηση στη αγορά πρέπει: P=AC, P=2q, AC=16/q+q

Και από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ως αποδεκτή λύση η $q=4$
Αφού $q=24/(n+2)$ προκύπτει ότι ο αριθμός των επιχειρήσεων που παραμένουν στην αγορά είναι 4.

[3]

Μονοπωλιακός ανταγωνισμός- Μονοπώλια

Μονοπωλιακός ανταγωνισμός: Στον κλάδο υπάρχουν πολλές επιχειρήσεις, κάθε μια προσφέρει ελαφρώς διαφοροποιημένο προϊόν ή υπηρεσία και η ζήτηση των καταναλωτών για το προϊόν κάθε επιχείρησης έχει αρνητική κλίση. Κάθε επιχείρηση έχει μικρή δυνατότητα εφαρμογής τιμολογιακής πολιτικής, εφαρμόζει τεχνικές διαφήμισης & μάρκετινγκ για ενίσχυση της ζήτησης και μεγιστοποιεί τα κέρδη της στο σημείο όπου MR=MC, αλλά P>MR. Το οικονομικό κέρδος είναι βραχυχρόνια θετικό αλλά υπάρχει ελευθερία εισόδου νέων επιχειρήσεων, έτσι ώστε μακροχρόνια ο ανταγωνισμός μειώνει ως και μηδενίζει τα κέρδη.

Μονοπώλιο: Μία και μόνο επιχείρηση προσφέρει το προϊόν της (που δεν έχει στενά υποκατάστατα) στους καταναλωτές. Υπάρχουν εμπόδια εισόδου άλλων επιχειρήσεων, είτε για αντικειμενικούς λόγους (φυσικό μονοπώλιο, λόγω της φύσης του αγαθού είτε διότι δεν υπάρχει επαρκής ζήτηση για να στηρίξει περισσότερες επιχειρήσεις είτε λόγω νομικών περιορισμών). Η ισορροπία είναι παρόμοια με αυτή που περιγράφεται πιο πάνω για την επιχείρηση που λειτουργεί σε μονοπωλιακό ανταγωνισμό, με βασική διαφορά ότι η βραχυχρόνια ισορροπία ταυτίζεται με τη μακροχρόνια, αφού δεν υπάρχει ελευθερία εισόδου νέων επιχειρήσεων. Το μονοπώλιο πραγματοποιεί οικονομικά κέρδη (υπερκέρδη) μακροχρονίως και επί πλέον έχει τη δυνατότητα να ασκήσει διαφοροποιημένη τιμολογιακή πολιτική σε διαφορετικές ομάδες καταναλωτών ή σε διαφορετικά επίπεδα κατανάλωσης αφαιρώντας έτσι το «πλεόνασμα του καταναλωτή» και μεγιστοποιώντας ακόμη περισσότερο τα κέρδη του.

Παράδειγμα 1ο

Η καμπύλη ζήτησης που αντιμετωπίζει για το προϊόν της μια μονοπωλιακή επιχείρηση εκφράζεται από τη σχέση P=200-0,2q. (1) Η συνάρτηση του συνολικού κόστους της επιχείρησης δίνεται από τη σχέση: TC=50q.

α) Να υπολογίσετε την ποσότητα και την τιμή ισορροπίας καθώς και το κέρδος της επιχείρησης.

β) Να απεικονίσετε διαγραμματικά την ισορροπία της συγκεκριμένης επιχείρησης.

γ) Ποιο θα ήταν το επίπεδο παραγωγής και η τιμή αν η αγορά ήταν πλήρως ανταγωνιστική;

δ) Υπολογίστε την ποσότητα και την τιμή ισορροπίας αν η συνάρτηση κόστους της επιχείρησης είναι: TC=q2 +50

Λύση

Α) Κέρδος=Π=TR-TC=(P*q)-TC =(P*q)-50q

Συνθήκη μεγιστοποίησης κέρδους: MR=MC

MR= dTR/dq= d(P*q)/dq και MC=dTC/dq =d(50q)/dq =50

όπου P αντικαθιστούμε τη συνάρτηση ζήτησης (1) **à**

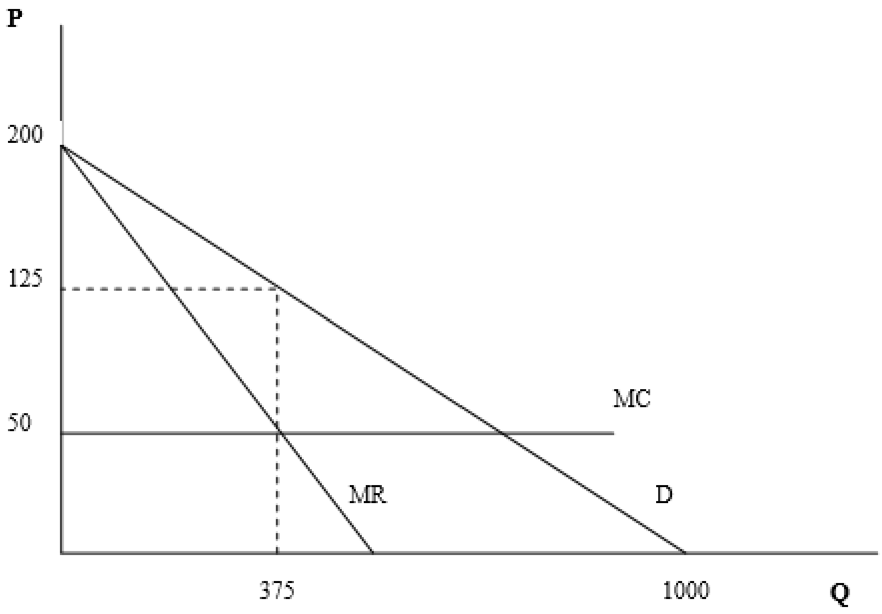
MR=d [(200-0,2q)*q]/dq= d(200q-0,2q2)/dq=200-0,4q

MR=MC **à** 200-0,4q=50 **à** 150=0,4q **à** q=150/0,4=375.

Αντικαθιστώ στην (1) και βρίσκω ότι P=200-0,2*375=125, στη συνέχεια αντικαθιστούμε τα P &q στη συνάρτηση κέρδους και βρίσκουμε: Π=150*375-0,2*(375)2= 56250-28125=28125

Σχήμα:

B)



Εδώ σημειώνουμε ότι η μεν ποσότητα 375 προκύπτει από το σημείο τομής της γραμμής του οριακού κόστους MC με την γραμμή οριακού εσόδου MR η δε τιμή βρίσκεται αν προεκτείνουμε την κάθετο από την ποσότητα (375) μέχρι την καμπύλη ζήτησης D και από εκεί στον άξονα των τιμών.

Γ) Αν η αγορά ήταν πλήρως ανταγωνιστική, καθένας από τους παραγωγούς θα μεγιστοποιούσε τα κέρδη του στο επίπεδο παραγωγής όπου MR=MC αλλά στον τέλειο ανταγωνισμό ισχύει MR=P και επομένως και MC=P, αλλά MC=50 οπότε η τιμή ισορροπίας θα ήταν P=50. Αντικαθιστούμε P=50 στην συνάρτηση ζήτησης (1) και έχουμε: 50=200-0,2q και λύνοντας ως προς Q βρίσκουμε q=750. Παρατηρούμε ότι με την ίδια καμπύλη ζήτησης και κόστους, αλλά διαφορετική οργάνωση αγοράς (πολλοί παραγωγοί αντί για ένας) έχουμε μεγαλύτερη ποσότητα και μικρότερη τιμή, τα δε οικονομικά κέρδη των παραγωγών θα είναι ίσα με το μηδέν.

Δ) Ακολουθούμε την ίδια λογική όπως και στο α) με τη διαφορά ότι τώρα TC=q2+50 και MC=2q. Θέτουμε MR=MC **à** 200-0,4q=2q **à** 200=2,4MR=MC **à** 200-0,4q=2q **à** 200=2,4q **à** q=200/2,4=83,3 η παραγόμενη ποσότητα και P=200-0,2*83,3= 183,4 η τιμή.

Παράδειγμα 2ο

Η καμπύλη ζήτησης μιας μονοπωλιακά ανταγωνιστικής επιχείρησης βραχυχρόνια είναι: q=100-0,5P και η συνάρτηση συνολικού κόστους της είναι $TC = 3q^2 + 20$.

Α) Να βρείτε την τιμή και ποσότητα ισορροπίας που μεγιστοποιεί τα κέρδη της επιχείρησης βραχυχρόνια καθώς και το κέρδος της.

Β) Ποια θα είναι η μακροχρόνια ισορροπία της επιχείρησης και πώς επιτυγχάνεται αν η είσοδος νέων επιχειρήσεων στον κλάδο είναι ελεύθερη;

Λύση

Α) Η επιχείρηση ισορροπεί μεγιστοποιώντας τα κέρδη της βραχυχρόνια στο σημείο όπου το οριακό της κόστος ισούται με το οριακό της έσοδο.

$$MC = \frac{d(TC)}{dq} = \frac{d\left(3q^2 + 20\right)}{dq} = 6q \quad (1)$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τη συνάρτηση οριακού εσόδου MR:

$MR = \frac{d(TR)}{dq}$ και $TR = P * q$.

Λύνομε τη συνάρτησης ζήτησης ως προς P ώστε να το αντικαταστήσουμε στην TR:

$$0{,}5P = 100 - q \Rightarrow P = 200 - 2q$$

Άρα $TR = (200 - 2q) * q = 200q - 2q^2$ και $MR = \frac{d\left(200q - 2q^2\right)}{dq} = 200 - 4q$.

Στη συνέχεια θέτουμε $MC = MR \Rightarrow 6q = 200 - 4q \Rightarrow 10q = 200 \Rightarrow q = 20$

Και $P = 200 - 2 * 20 = 160$. Για να βρούμε τα κέρδη,
$\Pi = TR - TC = (20 * 160) - \left(3 * 20^2 + 20\right) = 3200 - 1220 = 1980$.

Β) Αν η είσοδος επιχειρήσεων στον κλάδο είναι ελεύθερη, η ύπαρξη οικονομικού κέρδους θα οδηγήσει στην δημιουργία νέων επιχειρήσεων και θα μειώσει τη ζήτηση για το προϊόν της επιχείρησης μας, οπότε και η καμπύλη ζήτησης της επιχείρησης θα μετατοπιστεί παράλληλα προς τα αριστερά. Η μετατόπιση θα σταματήσει όταν τα κέρδη θα μηδενιστούν οπότε δεν θα υπάρχει κίνητρο για είσοδο. Τα κέρδη μηδενίζονται στο σημείο που η καμπύλη ζήτησης εφάπτεται στην καμπύλη μέσου κόστους (ATC) και στο σημείο ισορροπίας θα ισχύει MC=MR και P=ATC, αλλά MR<P.

Παράδειγμα 3ο

Μια επιχείρηση έχει το μονοπώλιο κατασκευής και διάθεσης σε δύο διαφορετικές χώρες του παιχνιδιού «Μονόπωλη». Η συνάρτηση ζήτησης στη χώρα Α είναι: QA=50-0,5P και στη χώρα Β δίνεται από τη σχέση QB=80-2P. Η επιχείρηση έχει οριακό κόστος MC=10€ και έχει τη δυνατότητα να χρεώσει διαφορετική τιμή σε κάθε χώρα ώστε να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της. Ποια θα είναι η συνολική παραγόμενη ποσότητα, πώς θα κατανεμηθεί μεταξύ των δύο χωρών και σε τι τιμή θα διατίθεται το παιχνίδι σε κάθε χώρα;

Λύση

Μια επιχείρηση με μονοπωλιακή δύναμη μεγιστοποιεί τα κέρδη της εάν χρεώνει διαφορετική τιμή σε κάθε αγορά, στην προκειμένη περίπτωση στις χώρες Α &Β, έτσι ώστε σε κάθε χώρα να ισχύει MR=MC.

Στην χώρα Α η συνάρτηση ζήτησης είναι QA=50-0,5P. Επειδή το ζητούμενο είναι η τιμή P, αντιστρέφουμε την συνάρτηση ζήτησης λύνοντάς την ως προς P:

0,5P=50- QA PA=100-2 QA. Τα συνολικά έσοδα TR δίνονται από τη σχέση TR= PA * QA =(100-2 QA)*QA= 100QA-2QA2 Η συνάρτηση οριακού εσόδου είναι η α΄ παράγωγος των συνολικών εσόδων, δηλαδή

MR=d(TR)/dQ =d(100QA-2QA2)/dQ= 100-4QA. Θέτουμε MR=MC και έχουμε 100-4QA=10 ή 4QA=90 ή QA= 22,5.

Αντικαθιστούμε την ποσότητα στην συνάρτηση ζήτησης και βρίσκουμε την τιμή στην χώρα Α: PA=100-2*22,5=100-45=55.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε ότι στη χώρα Β η ποσότητα θα είναι QB= 30 και η τιμή PB=25.

Η συνολικά παραγόμενη ποσότητα θα είναι Q= QA+ QB=22,5+30 = 52,5.

Παράδειγμα 4ο

Μία επιχείρηση είναι ο μοναδικός παραγωγός ενός τύπου λέιζερ. Η καμπύλη ζήτησης για το προϊόν της είναι: $Q = 8.300 - 2P$

όπου P είναι η τιμή (σε €) και Q είναι το μηναίο προϊόν. Η συνάρτηση συνολικού κόστους της είναι: $TC = 2200 + 480Q + 20Q^2$

όπου TC είναι το συνολικό κόστος (σε €).

α) Αν η επιχείρηση επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της, ποιο επίπεδοπροϊόντος πρέπει να επιλέξει;

β) Ποια τιμή πρέπει να χρεώσει στο επιλεγμένο επίπεδο προϊόντος;

γ) Ποιο θα είναι το μηνιαίο κέρδος αν παράγει και πωλεί την επιλεγμένη ποσότητα προϊόντος;

Λύση

Α) Προκειμένου να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της, η μονοπωλιακή επιχείρηση πρέπει να επιλέξει το επίπεδο παραγωγής που ικανοποιεί τη συνθήκη MR = MC, όπου MR είναι το οριακό έσοδο και MC είναι το οριακό κόστος της. Από την καμπύλη ζήτησης έχουμε:

$$Q = 8300 - 2P \Leftrightarrow P = (8300 - Q)/2 \Leftrightarrow P = 4150 - 0.5Q$$

Άρα, τα συνολικά έσοδα, TR, είναι:

$$TR = PQ = (4150 - 0.5Q)Q = 4150Q - 0.5Q^2$$

Το οριακό έσοδο και το οριακό κόστος είναι: $MR = \dfrac{dTR}{dQ} = 4150 - Q$, $MC = \dfrac{dTC}{dQ} = 480 + 40Q$

Επομένως, η συνθήκη για τη μεγιστοποίηση των κερδών της μονοπωλιακής επιχείρησης γίνεται:

$$MR = MC \Leftrightarrow 4150 - Q = 480 + 40Q \Leftrightarrow 41Q = 3670 \Leftrightarrow Q = 89{,}5 \Leftrightarrow Q = 90$$

Άρα, για να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της, η επιχείρηση πρέπει να παράγει 90 μονάδες λέιζερ.

Β) Από την καμπύλη ζήτησης βρίσκουμε ότι οι καταναλωτές θα αγοράσουν 90 μονάδες λέιζερ όταν η τιμή είναι ίση με: P=4.150-0,5*90=€4.105 ανά λέιζερ. Αυτή είναι η τιμή που πρέπει να χρεώσει η επιχείρηση.

Γ) Αν η επιχείρηση παράγει και πωλεί 90 μονάδες λέιζερ τον μήνα, το μηνιαίο κέρδος της θα είναι:

$$\pi = TR - TC = P*Q - [2200 + 480Q + 20Q^2] = 4150*90 - [2.200 + 480*90 + 20*(90)^2] = 162050$$

Κεφάλαιο 3ο Παράγωγοι

Λίγα λόγια για τις παραγώγους

Μια βασική έννοια των Ανωτέρων Μαθηματικών είναι η έννοια της παραγώγου. Οι παράγωγοι εμφανίστηκαν με κάποια ασάφεια και όχι μαθηματική αυστηρότητα κατά την αρχή και το μέσο του 17ου αιώνα και υπήρξαν δημιούργημα των Γερμανών Μαθηματικών και φιλοσόφων wton και Leibniz*, που οδηγήθηκαν σ' αυτές, ο μεν πρώτος από προβλήματα κινηματικής (ταχύτητα, επιτάχυνση), ο δε δεύτερος από προβλήματα γεωμετρίας (εφαπτόμενη καμπύλης).

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ’ ενα σημείο c_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αρθμός .

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο c_0 και συμβολίζεται με

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσημη σ’ ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Παράγωγοι μερικών βασικών συναρτήσεων.

- $c' = 0$ όπου c πραγματικός αριθμός
- $x' = 1$, - $(x^n)' = nc^{n-1}$, - $\left(\sqrt{c}\right) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$
- $(hmc)' = sunc$, - $(sunc)' = -hmc$
- $(e^x)' = e^x$, - $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(efc)' = \frac{1}{sun^2 c}$, $(efc)' = -\frac{1}{hm^2 c}$

[4],[2]

Παράδειγμα 1ο

Το κέρδος P σε ευρώ από την πώληση ενός αυτοκινήτου ορισμένου τύπου και ο χρόνος παραγωγής του t σε ώρες σχετίζονται με τον τύπο:

$$p_{(t)} = 20\left(200 - \frac{250}{t} - t^2\right), t > 3$$

Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό κέρδος.

Λύση

Έχουμε P’$_{(t)}$ =20($\frac{250}{t^2} - 2t$).

Επομένος: $p'_{(t)} = 0 \Leftrightarrow \frac{250}{t^2} - 2t = 0 \Leftrightarrow t^3 = 125 \Leftrightarrow t = 5$

Θα εξετάσουμε αν η τιμή t=5 αντιστοιχεί σε μέγιστο κέρδος με τη βοήθεια τηε δεύτερης παραγώγου.

Έχουμε $p''_{(t)} = 20\left(\frac{250}{t^2} - 2t\right)' = 20\left(-\frac{500}{t^3} - 2\right) = -20\left(\frac{500}{t^3} + 2\right) < 0$ αφού t>3

Άρα για t=5 έχουμε το μέγιστο δυνατό κέρδος που είναι ίσο με:

$p_{(5)} = 20(200 - 50 - 25) = 20 * 125 = 2500$ Ευρώ.

[1]

Παράδειγμα 2ο

Η ποσότητα ζήτησης Q ενός αγαθού σαν συνάρτηση της τιμής ζήτησης P δίδεται από τη σχέση $Q(P) = P^2 - 4P + 230$. Να εξετασθεί η ελαστικότητα της τιμής $P = 7$ χ.μ.

Έχουμε ότι η ελαστικότητα ε της τιμής πώλησης P της μονάδας ενός αγαθού εκφράζει την ποσοστιαία αλλαγή $\frac{\Delta Q}{Q}$ της ποσότητας Q σε σχέση με την ποσοστιαία αλλαγή $\frac{\Delta P}{P}$ της τιμής του αγαθού.

Είναι δηλαδή $\varepsilon(P)=\dfrac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}}=\dfrac{\Delta Q}{\Delta P}*\dfrac{P}{Q}$ και για πολύ μικρά ΔP

$$\varepsilon(P)=\left(\lim_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta P}\right)*\frac{Q}{P}=Q'(P)*\frac{P}{Q}(1)$$

Όταν η τιμή $|\varepsilon|>1$ τότε P είναι ελαστική αν $|\varepsilon|<1$ τότε P ανελαστική.

Λύση

Είναι $Q(7)=49-28+230=251$ ακόμη $Q'(P)=2P-4$ κατά συνέπεια $Q'(7)=10$

Κατά συνέπεια η σχέση (1) δίδει $\varepsilon(7)=10*\frac{7}{251}=\frac{70}{251}$

Επομένως η τιμή P=7 χ.μ. είναι ανελαστική.

[2]

Παράδειγμα 3ο

Το κόστος παραγωγής της ποσότητας Q ενός προϊόντος είναι $C(Q)=2Q^2-36Q+25$ και τιμή πώλησης της μονάδας του προϊόντος είναι: $P(Q)=\frac{1}{2}Q-15$. Σε ποιες ποσότητες προϊόντος:

A) Το κόστος παραγωγής γίνεται ελάχιστο.

B) Το συνολικό έσοδο από την πώληση του προϊόντος γίνεται ελάχιστο.

Γ) Το κέρδος από την πώληση του προϊόντος είναι μέγιστο.

Λύση

Α) $C^{'}(Q)=4(Q)-36=0 \Leftrightarrow Q=9$

Επειδή $C^{''}(Q)=4>0$, το κόστος παραγωγής γίνεται ελάχιστο για παραγωγή 9 μ.μ. προϊόντος.

Β) $R(Q)=P(Q)*Q=\frac{1}{2}*Q^2-15Q$, ενώ $R^{'}(Q)=Q-15=0 \Leftrightarrow Q=15$

Επειδή $R^{''}(Q)=1>0$, το συνολικό έσοδο από την πώληση του προϊόντος γίνεται ελάχιστο για πώληση 15 μ.μ. του προϊόντος.

Γ) το κέρδος από την πώληση του προϊόντος είναι

$K(Q)=E(Q)-C(Q)=-\frac{3}{2}Q^2+21Q-25$

$K^{'}(Q)=-3Q+21=0 \Leftrightarrow Q=7$. Όμως $K^{''}(Q)=-3<0$ και κατά συνέπεια το κέρδος γίνεται μέγιστο από την παραγωγή όταν οι προκύπτουσες τιμές των μεταβλητών είναι θετικές.

[1]

Παράδειγμα 4^{ο}

Το κόστος παραγωγής ενός προϊόντος Π δίδεται από τη σχέση: $C(Q)+Q^2+3Q+2$, ενώ η τιμή πώλησης της μονάδας του Π είναι: $P(Q)=30-2Q$, όπου Q η ποσότητα του Π.

Να υπολογισθούν το οριακό κόστος παραγωγής, καθώς και το οριακό έσοδο για τη μονάδα του προϊόντος. Ποια η γεωμετρική τους σημασία;

Λύση

Θα είναι $MC(Q) = \left(Q^2 + 3Q + 2\right)' = 2Q + 3$ και κατά συνέπεια MC(1)=5 χ.μ.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται (κατά προσέγγιση) η γραφική παράσταση της C=C(Q). Η καμπύλη του κόστους παραγωγής περιορίζεται μόνο στο α’ τεταρτημόριο, όπου C, $Q \geq 0$

Η εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο Α(1,6), όπου C(1)=6,

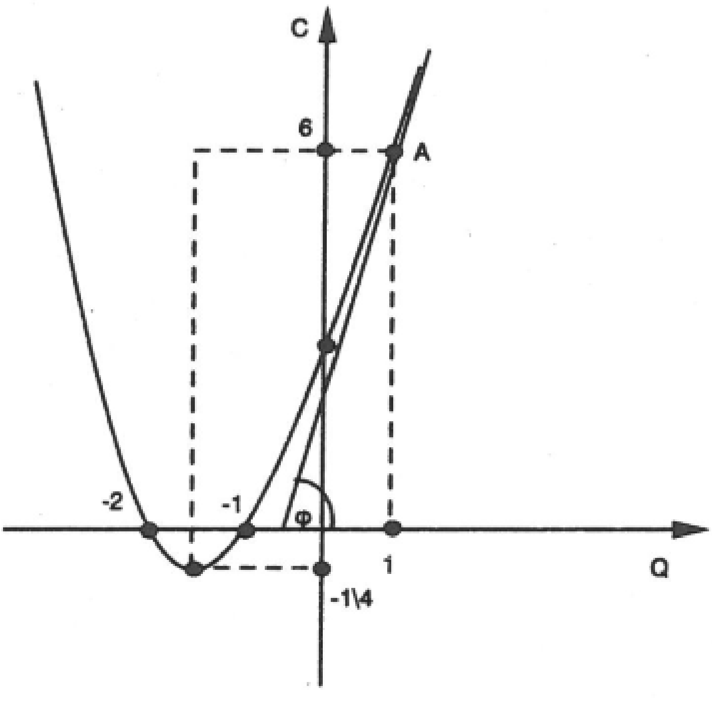
Σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα των Q γωνία φ. τότε $MC(1) = \varepsilon\varphi(\varphi)$

Η συνάρτηση του συνολικού εσόδου είναι: $R(Q) = P(Q) * Q = 30Q - 2Q^2$ και κατά συνέπεια $MR(Q) = \left(30Q - 2Q^2\right)' = 30 - 4Q$

Έτσι MR(1)=28 χ.μ.

Άρα το συμπέρασμα είναι ότι το MR(!) είναι ίσο με την εφαπτομένη της γωνίας, που σχηματίζει η εφαπτομένη της καμπύλης του συνολικού

Σχήμα:



[1]

Παράδειγμα 5°

Δίνεται η συνάρτηση προσφοράς P=a+bQs όπου $a \geq 0$a και $b \geq 0$. Πως θα διαμορφωθεί η συνάρτηση προσφοράς αν η κυβέρνηση επιβάλλει ένα φόρο ύψους Τα σε κάθε μονάδα που παράγεται;

Λύση

Εάν επιβληθεί φόρος σε κάθε παραγόμενη μονάδα, αυτός αυξάνει το μεταβλητό κόστος των επιχειρήσεων και αυτό μπορούμε να το δούμε με 2 τρόπους.

Α) Αυξάνεται κατά Τα η τιμή που ζητούν οι παραγωγοί για να προσφέρουν την ίδια με πριν ποσότητα προϊόντος.

Β) Σε κάθε τιμή προσφέρεται μικρότερη ποσότητα προϊόντος.

Έχουμε συνεπώς μετατόπιση της καμπύλης προσφοράς πάνω και αριστερά. Η νέα συνάρτηση προσφοράς θα είναι: $P^{'} = P + T$, αντικαθιστώντας όπου $P = a + bQs$ και έχουμε:
$P^{'} = (a + bQs) + T = (a + T) + bQs$ το (a+T) είναι ο νέος όρος ενώ η κλίση β παραμένει η ίδια. Η νέα καμπύλη προσφοράς τέμνει τον άξονα όπου P=a+T.

[1]

Παράδειγμα 9°

Η ζήτηση Q ενός προϊόντος σαν συνάρτηση της τιμής πώλησης P της μονάδας του προϊόντος εκφράζεται από τη σχέση $Q = Q(P) = P^2 - 4P + 3$.

Να κατασκευασθεί η καμπύλη ζήτησης του προϊόντος.

Λύση

Θα κατσκευαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης:
$Q(P) = P^2 - 4P + 3$ και στη συνέχεια θα αφαιρεθούν τα τμήματα της γραφικής παράστασης για τα οποία Q<0 ή P<0.

Α) $D(Q) = IR$. Από τη σχέση $Q = P^2 - 4P + 3$ προκύπτει $P^2 - 4P + (3 - Q) = 0$

Και για να είναι το P πραγματικός αριθμός θα πρέπει
$16 - 4(3 - Q) \geq 0 \Leftrightarrow Q \geq -1$. Άρα $R(Q) = [-1 + \infty)$.

Β) Η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το IR.

Γ) Για το P=0 είναι Q=3, ενώ για Q=0 η εξίσωση $P^2 - 4P + 3 = 0$ έχει ρίζες τα 1 και 3.

Δ) Η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή. Επίσης δεν είναι περιοδική. Q(0)=3 και για να είναι Q(P)=3 θα πρέπει
$P^2 - 4P = P(P - 4) = 0$ δηλ. P=0 ή P=4.

Δηλαδή ο Τα=4 είναι ο μόνος θετικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $Q(0) = Q(4) = 3$.

Όμως $Q(T - 1) + Q(5) = 8$, ενώ Q(1)=0, δηλαδή $Q(T + 1) \neq Q(1)$.

Ε) $Q'(P) = 2P - 4 > 0 \Rightarrow P > 2$, δηλαδή η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο $(-\infty, 2)$ και αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

Ζ) Για P=2 έχουμε ολικό ελάχιστο, P(2)=-1.

Η) $Q''(P) = 2 > 0$, άρα η συνάρτηση είναι κυρτή σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της και δεν έχει σημεία καμπής.

Θ) $\lim Q(P) = Q(P_0) \in IR, \forall P_0 \in IR$. Επίσης $\lim\limits_{P \to \infty} Q'(P) = \lim\limits_{P \to \infty}(2P - 4) = \infty . P \to P_0$

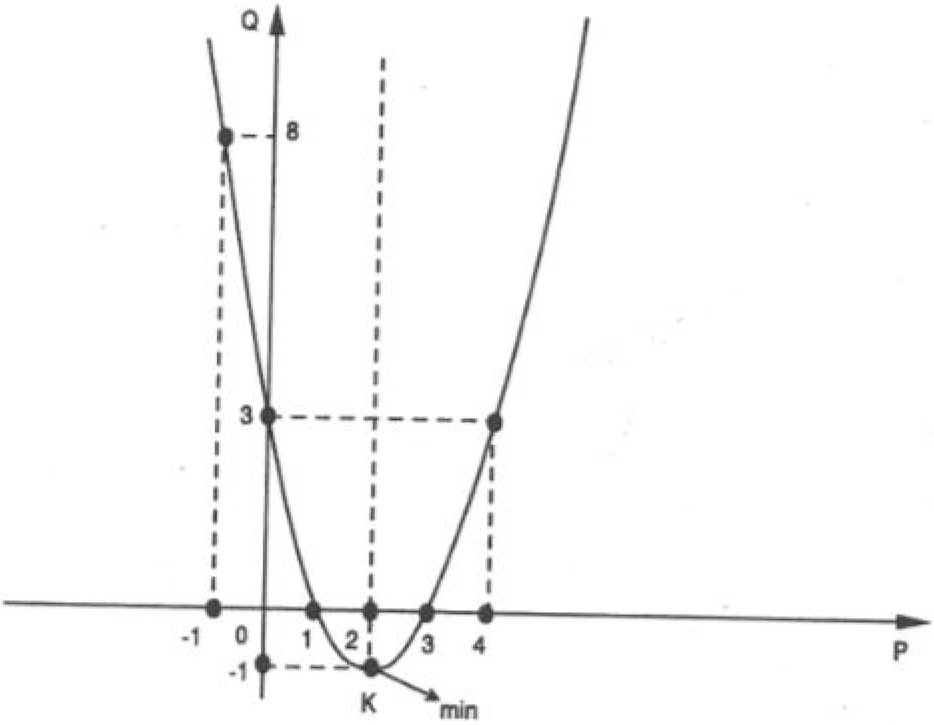
Άρα η C_Q δεν έχει ασύμπτωτες.

Ι) Ο Πίνακας τιμών:

P	-1	0	1	2	3	4
Q	8	3	0	-1	0	3

min

Κ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι σχεδιασμένη (κατά προσέγγιση)



Για τον προσδιορισμό της καμπύλης ζήτησης πρέπει να αφαιρεθούν τα τμήματα της γραφικής παράστασης, που βρίσκονται στο 2^{o} και 4^{o} τεταρτημόριο, γιατί αντιστοιχούν σε αρνητικές τιμές των P και Q αντίστοιχα.

Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης της μορφής $f(c) = ac^2 + bc + g$, με a ¹ 0 είναι μια καμπύλη, που έχει σαν άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία, που διέρχεται από το σημείο Κ, όπου παρουσιάζονται ακραίες τιμές και ονομάζεται παραβολή. [1]

Παράδειγμα 12^{o}

Η τιμή πώλησης P ενός αγαθού σαν συνάρτηση της ποσότητας του αγαθού δίδεται από τη σχέση: $P(Q) = 2Q - \dfrac{22}{Q} - 7$

Να κατασκευαστεί η καμπύλη η καμπύλη μέσου εσόδου από την πώληση της μονάδας του αγαθού.

Λύση

Θα έχουμε $R(Q) = QP(Q) = 2Q - 7Q - 22$

Κατά συνέπεια $AR(Q) = \dfrac{R(Q)}{Q} = \dfrac{2Q^2 - 7Q - 22}{Q}$

Για την κατασκευή της καμπύλης του μέσου εσόδου θα σχεδιάσουμε καταρχήν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ=AR(Q) και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα τμήματα της εκείνα, για τα οποία Q<0 ή AR<0.

Για την κατασκευή της γραφικής παράστασης θα ακολουθήσουμε τα γνωστά βήματα.

1) Είναι $D(AR) = IR - \{0\}$

Για τον προσδιορισμό του πεδίου των τιμών, θέτοντας $\psi = \dfrac{2Q^2 - 7Q - 22}{Q}$

θα πρέπει να προσδιορίσουμε εκείνα τα ψ, για τα οποία η εξίσωση $2Q^2 - (7+\psi)Q - 22 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες ως προς Q.

2) Η συνάρτηση ψ=AR(Q) είναι ρητή και κατά συνέπεια συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της

3) Για Q=0 δεν προκύπτει πραγματική τιμή για το ψ.

$\psi = 0 \Leftrightarrow 2Q^2 - 7Q - 22 = 0$, $Q \neq 0$. Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι -2 και $\dfrac{11}{2}$.

4) Η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή. Επειδή $O \notin D(AR)$ δεν μπορούμε να ελέγξουμε την περιοδικότητα με τη γνωστή μέθοδο. Αποδεικνύεται πάντως ότι η συνάρτηση δεν είναι περιοδική.

5) $y' = \frac{\left(2Q^2 - 7Q - 22\right)'Q - \left(2Q^2 - 7Q - 22\right)Q'}{Q^2} = \frac{2Q^2 + 22}{Q^2} > 0$

6) Επειδή δεν αλλάζει ο τύπος μονοτονίας της συνάρτησης, δεν υπάρχουν ακρότατα.

7) $y'' = \left(\frac{2Q^2 + 22}{Q^2}\right)' = -\frac{44}{Q^2} > 0 \Leftrightarrow Q^3 < 0 \Leftrightarrow Q < 0$.

Δηλαδή η ψ=AR(Q) είναι κυρτή στο $(-\infty, 0)$ και κοίλη στο $(0, +\infty)$. Σημείο καμπής δεν υπάρχει, αφού $O \notin D(AR)$.

8) $\lim_{Q \to 0} \frac{2Q^2 - 7Q - 22}{Q} = \infty$ και κατά συνέπεια η ευθεία με εξίσωση Q=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης.

Επίσης $\lim_{Q \to \infty} AR'(Q) = \lim_{Q \to \infty} \frac{(2Q^2 + 22)'}{Q^2} = \frac{4Q}{2Q} = 2Q = a$ και από τη σχέση

$\lim_{Q \to \infty} \left[AR(Q) - \left(2Q + \beta\right)\right] = 0$ προκύπτει

$\beta = \lim_{Q \to \infty} \left[AR(Q) - 2Q\right] = -\lim_{Q \to \infty} \frac{(7Q + 22)}{Q} = -\lim_{Q \to \infty} \frac{(7Q + 22)'}{Q'} = -7$. Κατά συνέπεια η ευθεία με εξίσωση ψ=2Q-7 είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης.

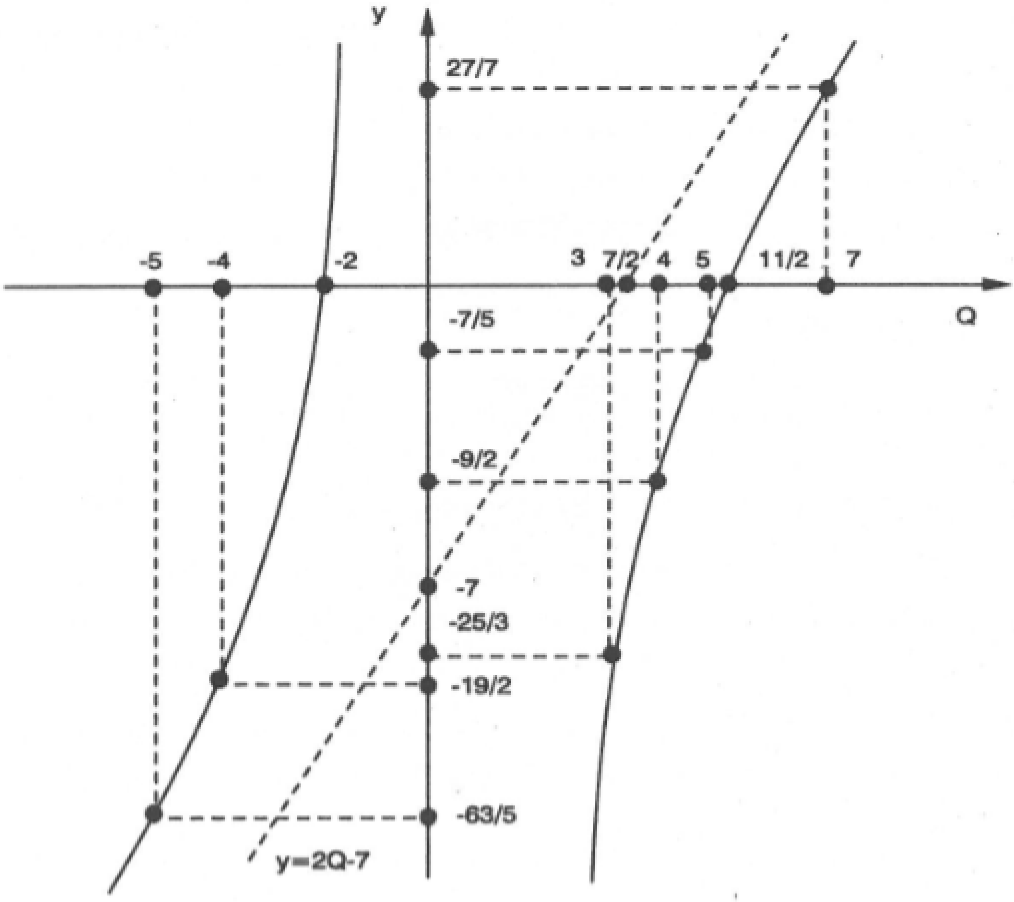
9) Πίνακας τιμών:

Q	-5	-4	-2	3	4	5	11/2	7
AR(Q)	-63/2	-19/2	0	-25/3	-9/2	-7/5	0	27/7

Θα είναι αύξουσα σε αυτό το παιδίο τιμών

10) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης Ψ=AR(Q) είναι σχεδιασμένη (κατά προσέγγιση)

Σχήμα:



Για τον προσδιορισμό της καμπύλης του μέσου εσόδου πρέπει να ληφθεί υπόψη μόνο το τμήμα της γραφικής παράστασης που βρίσκεται στο α’ τεταρτημόριο, όπου τα Q και AR(Q) είναι συνεχώς θετικά.

[1]

Κεφάλαιο 4ο :Ολοκληρώματα

Λίγα λόγια για τα ολοκληρώματα

Ξέρουμε ότι παραγώγιση (ή διαφόριση) μιας συναρτήσεως Φ(x) λέγεται η εύρεση της παραγώγου της $\Phi'(x) = f(x)$ (ή του διαφορικού της $d\Phi(x) = f(x)dx$) .

Η αντίστροφη πράξη της παραγωγίσεως (ή διαφορίσεως) λέγεται ολοκλήρωση (integration). Δηλ. ολοκλήρωση είναι η εύρεση της συναρτήσεως Φ(x) όταν γνωρίζουμε την παράγωγο f(x) (ή το διαφορικό f(x) dx) αυτής. Η σταθερά c λέγεται σταθερά ολοκλήρωσης.

Υπάρχουν δυο είδη ολοκληρώματα, το αόριστο και το ορισμένο.

Ορισμός του αόριστου ολοκληρώματος:

Μία συνάρτηση $\Phi(x) | x\in\Delta\subseteq R$, ονομάζεται παράγουσα (deriving) ή αντι παράγωγος (antiderivative) ή αόριστο ολοκλήρωμα (indefinite integral) μιας άλλης συναρτήσεως f(x), στο διάστημα Δ, όταν:

$\Phi'(x) = f(x) \ \forall x\in \Delta$

Π.χ. η $\Phi(x) = \frac{x^2}{2}, x\in R$, είναι μία παράγουσα (ή ένα αόριστο ολοκλήρωμα) της f(x)=x γιατί $\Phi'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x = f(x) \ \forall x\in R$

Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει :
$\int f'(x)dx = f(x) + c, \ c\in \mathbb{R}$

Ισχύουν

Πίνακας αόριστων ολοκληρωμάτων			
1	$\int 0dx = c$	6	$\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$
2	$\int 1dx = x + c$	7	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \varepsilon\varphi x + c$
3	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + c$	8	$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx = -\sigma\varphi x + c$
4	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$,	9	$\int e^x dx = e^x + c$

	$a \neq 1$		
5	$\int \sigma\upsilon\nu x\,dx = \eta\mu x + c$	10	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

Υπάρχουν δύο τρόποι ολοκλήρωσης, με παράγοντες και με αντικατάσταση.

Η μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες εκφράζεται με τον τύπο: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ που είναι συνέπεια του κανόνα παραγώγισης του γινομένου δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f,g σε ένα διάστημα Δ για κάθε $x \in \Delta$.

Ο τρόπος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση υπολογίζει ολοκληρώματα που μπορούν να πάρουν τη μορφή $\int f(g(x))g'(x)dx$. Εκφράζεται με τον ακόλουθο τύπο: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$, όπου $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$
Ο παραπάνω τύπος μπορεί να εφαρμοσθεί μόνον όταν το $\int f(u)du$ του δεύτερου μέλους υπολογίζεται ευκολότερα.

Ορισμός αόριστου ολοκληρώματος: Το όριο του αθροίσματος $S\nu$, δηλαδή το $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων x_k. Το όριο (1) ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β.
δηλαδή: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\right)$

Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται σύμβολο ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί α και β ονομάζονται όρια της ολοκλήρωσης. Η έννοια όρια δεν είναι ίδια με την καθιερωμένη έννοια των ορίων. Στην έκφραση $\int_a^b f(x)dx$ το γράμμα χ είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι για παράδειγμα οι εκφράσεις $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός σε αντίθεση με το $\int f(x)dx$ που είναι σύνολο συναρτήσεων.

[4],[2]

Παράδειγμα $1^{ο}$

Αν $P = f(Q) = 25 - Q^2$ είναι η συνάρτηση ζήτησης και $P = g(Q) = (2Q+1)$ είναι η συνάρτηση προσφοράς για ένα προϊόν π, να υπολογισθούν τα ΩΚ και ΩΠ.

Λύση

Οικονομική ισορροπία έχουμε όταν:

$f(Q) = g(Q) \Leftrightarrow 25 - Q^2 = 2Q + 1 \Leftrightarrow Q^2 + 2Q - 24 = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες (4) και (-6), εκ των οποίων η αρνητική απορρίπτεται.

Για $Q = 4 \Rightarrow P = f(4) = g(4) = 9$

Έτσι

$$\Omega K = \int_0^4 \left(25 - Q^2\right) * d*Q - 4*9 = \left[25Q - \frac{Q^3}{3}\right]_0^4 - 36 = 25*4 - \frac{4^3}{3} - 36 = 100 - \frac{64}{3} - 36 = 42*\frac{1}{3}$$

Ακόμη, $\Omega \rho = 4*9 - \int_0^4 (2Q+1) * d*Q = 36 - \left[Q^2 + Q\right]_0^4 = 36 - 4^2 - 4 = 16$

[1]

Παράδειγμα $2^{ο}$

Ποια η πιθανότητα αναμονής στην ουρά;

Α) για λιγότερο από ένα λεπτό

Β) μεταξύ τριών και τεσσάρων λεπτών;

Λύση

A) $P(0<x<1)=\int_0^1 \frac{3x^2}{64}*dx=\left[\frac{x^3}{64}\right]_0^1=\frac{1}{64}\approx 0{,}016$, δηλαδή περίπου 1,6%

B) $P(3<x<4)=\int_3^4 \frac{3x^2}{64}*dx=\left[\frac{x^3}{64}\right]_3^4=1-\frac{27}{64}=\frac{37}{64}\approx 0{,}578$ δηλαδή περίπου 57,8%

[1]

Παράδειγμα 3^{o}

Αν η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού είναι $p=D(q)=40-2q-3q^2$, να υπολογιστεί το πλεόνασμα του καταναλωτή όταν

A) q(0)=3

B) p(0)=24

Λύση

A) Επειδή, όταν q(0)=3 το $p(0)=D(q0)=40-6-27=7$, θα έχουμε από

$$CS=\int_0^{q0} D(q)dq-p0q0 \Rightarrow CS=\int_0^3 \left(40-2q-3q^3\right)dq-7*3=\left[40q-q^2-q^3\right]_0^3-21=120-9-27-21=$$

B) Επειδή από την P(0)=D(q0), για P(0)=24 βρίσκουμε:

$24=40-2q-3q^2 \Leftrightarrow 3q^2+2q-16=0 \Leftrightarrow q(0)=2$ θα έχουμε:

$$CS=\int_0^2 \left(40-2q-3q^2\right)dq-24*2=\left[40-q^2-q^3\right]_0^2-48=80-4-8-48=20$$

[2]

Παράδειγμα 4ο

Αν η συνάρτηση προσφοράς ενός αγαθού είναι $p = S(q) = 4q^2 + 12q + 9$ και η τιμή p1=49, τότε να υπολογιστεί με δύο τρόπους το πλεόνασμα του παραγωγού.

Λύση

Έχουμε ότι $PS = p1q1 - \int_0^{q1} S(q)dq$ (1) και $PS = \int_0^{p1} f(p)dp$ (2)

Επειδή

$$p1 = 4q_1^2 + 12q1 + 9 \Leftrightarrow 49 + 4q_1^2 + 12q1 + 9 \Leftrightarrow 4q_1^2 + 12q - 40 = 0 \Leftrightarrow q_1^2 + 3q1 - 10 = 0 \Leftrightarrow q1 = 2$$

Από τον (1) θα έχουμε

$$PS = 49*2 - \int_0^2 \left(4q^2 + 12q + 9\right)dq = 98 - \left[4\frac{q^3}{3} + 6q^2 - 9q\right]_0^2 = 98 - \frac{32}{3} - 24 - 18 = \frac{136}{3} = 45\frac{1}{3}$$

Για να το υπολογίσουμε τώρα με βάση την (2) θε έχουμε:

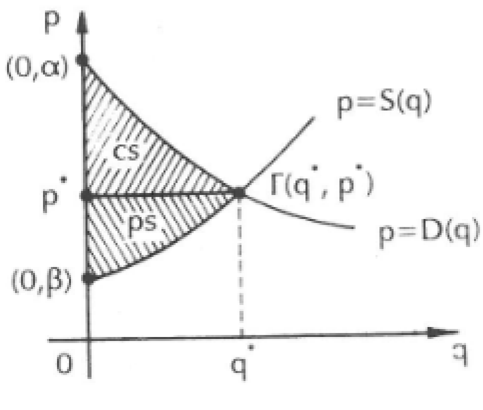
Επειδή β=S(0)=9 και από την $p = 4q^2 + 12q + 9$ βρίσκουμε:

$$4q^2 + 12q + 9 - p = 0 \Leftrightarrow q = f(p) = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(9 - p)}}{4} \Leftrightarrow q = \frac{-6 + \sqrt{4p}}{4} \Leftrightarrow q = \frac{\sqrt{p}}{2} - \frac{3}{2}$$

Θα έχουμε βάση της (2):

$$PS = \int_q^4 \left(\frac{\sqrt{p}}{2} - \frac{3}{2}\right)dp = \left[\frac{1}{3}p\sqrt{p} - \frac{3}{2}p\right]_q^{4q} = \frac{1}{3}(49*7 - 9*3) - \frac{3}{2}(49 - 9) = \frac{316}{3} - 60 = \frac{316}{3} - \frac{180}{3} = \frac{136}{3} = 45$$

Σχήμα:



[2]

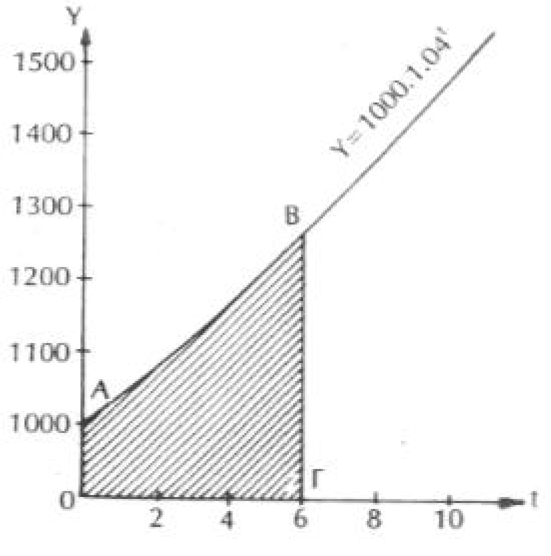
Παράδειγμα 5ο

Αν το αρχικά επενδυόμενο κεφάλαιο είναι 1000 χρ. Μονάδες και ανατοκίζεται με επιτόκιο 4% το έτος, τότε ποιο θα είναι το ύψος της επένδυσης σε 6 έτη.

Λύση

$I(6) = \frac{1000}{\ln 1{,}04}\left(1{,}04^{6} - 1\right) \approx 6768$ χρημ. Μονάδες και αντιστοιχεί στο εμβαδόν της επιφάνειας του παρακάτω σχήματος (ΟΑΒΓ)

Σχήμα:



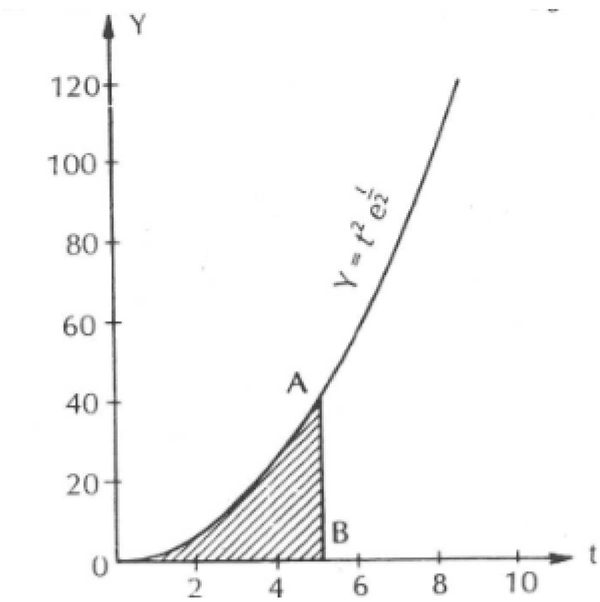
[2]

Παράδειγμα 6ο

Αν ο ρυθμός απόσβεσης της αξίας κεφαλαιουχικού αγαθού, π.χ. ενός μηχανήματος, είναι $y(t) = t^2 e^{\frac{t}{2}}$, τότε η ποια η αξία της συνολικής αποσβέσεως (αυτού) του μηχανήματος σε 5 έτη;

Λύση

Σχήμα:



Έχουμε $A(5) = \int_0^t t^2 e^{\frac{t}{2}} dt$ (1)

Προκειμένου τώρα να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του (1) παίρνουμε το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα και με εφαρμογή της παραγοντικής ολοκληρώσεως θα έχουμε:

$$\int t^2 e^{\frac{t}{2}} dt = 2\int t^2 de^{\frac{t}{2}} = 2\left[t^2 e^{\frac{t}{2}} - \int e^{\frac{t}{2}} d(t^2)\right] = 2t^2 e^{\frac{t}{2}} - 4\int te^{\frac{t}{2}} dt = 2t^2 e^{\frac{t}{2}} - 8\int t de^{\frac{t}{2}} = 2t^2 e^{\frac{t}{2}} - 8\left[te^{\frac{t}{2}} - \int e^{\frac{t}{2}} dt\right]$$

$$2t^2 e^{\frac{t}{2}} - 8te^{\frac{t}{2}} + 16\int de^{\frac{t}{2}} = 2t^2 e^{\frac{t}{2}} - 8te^{\frac{t}{2}} + 16e^{\frac{t}{2}} = 2e^{\frac{t}{2}}\left(t^2 - 4t + 8\right) \quad (2)$$

Η

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} A(5) = \left[2e^{\frac{t}{2}}\left(t^2 - 4t + 8\right)\right]_0^5 = 2 * 2{,}718^{\frac{5}{8}} * \left(25 - 20 + 8\right) - 2*1*8 = 26 * 2{,}718^{2,5} - 16 \approx 301$$

χρημ. Μονάδες και αντιστοιχεί στο εμβαδόν του παραπάνω σχήματος (ΟΒΑ). [2]

Βιβλιογραφία

[1] Μαθηματικά για τον τομέα διοίκησης και οικονομίας" , Μ. Βόσκογλου Μακεδονικές εκδόσεις.

[2] Γενικά μαθηματικά με εφαρμοσμένα παραδείγματα για τους σπουδαστές των σχολών διοίκησης & οικονομίας (Σπύρος Κ. Σασσαλος)

[3] Chacholiades, M. Μικροοικονομική I, μετάφραση Α.Σ. Κορκοτσίδης, Εκδόσεις Κριτική, 1990

Chacholiades, M. Μικροοικονομική II, μετάφραση Α.Σ. Κορκοτσίδης, Εκδόσεις Κριτική, 1990

Ευθύμογλου, Π. Γ., Μπένος, Θ. Ε. και Σολδάτος, Γ. Θ. Σύγχρονη μικροοικονομική, Εκδόσεις Ευγ. Μπένου, τόμος Α', 1997

Κώττης, Γ. Χ. και Πετράκη-Κώττη, Α. Εισαγωγή στη σύγχρονη μικροοικονομική, Το Οικονομικό, 1996

Κώττης, Γ. Χ. και Πετράκη-Κώττη, Α. Σύγχρονη μικροοικονομική, Εκδόσεις Ευγ. Μπένου , 2000.

Nicholson, W. Μικροοικονομική θεωρία : βασικές αρχές και προεκτάσεις, Μετάφραση Γ. Κορρές, Θ. Ταγκαλάκης, Χ. Γκενάκος, Επιστημονική επιμέλεια: Θ. Μινόγλου. Εκδόσεις Κριτική, 1998

Σταμάτης, Γ. Νεοκλασική μικροοικονομική θεωρία : παρουσίαση και κριτική, Εκδόσεις Κριτική, 1991

Varian H. R. Μικροοικονομική : μία σύγχρονη προσέγγιση, Μετάφραση: Χ. Βαλλιανός, Επιστημονική επιμέλεια: Θ. Μινόγλου.Εκδόσεις Κριτική, τόμος Α, 1992

Varian H. R. Μικροοικονομική : μία σύγχρονη προσέγγιση, Μετάφραση: Χ. Βαλλιανός, Επιστημονική επιμέλεια: Θ. Μινόγλου.Εκδόσεις Κριτική, τόμος Β, 1992

[4] Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ’ τάξης γεκινκού λυκείου (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο)