

ΤΕΙ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΣΤΕ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ

**ΜΕΛΕΤΗ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ ΚΑΙ
ΦΟΡΤΙΣΕΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.**



Σπουδαστές: Νικόλαος Κανάρης και Αντώνιος Ανδρίτσος

Εισηγητής : Π.Κακαβάς, Αναπλ. Καθηγητής

ΠΑΤΡΑ 2015

Περίληψη

Στο πρώτο κεφάλαιο της πτυχιακής εργασίας αναφέρουμε αρχικά τους τρόπους παραγωγής του ρευστοπαγούς χάλυβα (μέθοδοι Bessemer - Thomas, Siemens - Martin και τέλος στην μέθοδο ηλεκτρικού καμινιού). Στην συνέχεια δίνουμε έμφαση στις ιδιότητες αλλά και στην αντοχή του χάλυβα σε θερμότητα και διάβρωση.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύουμε τον δομικό χάλυβα και τον χυτοσίδηρο ως προς τα επιμέρους στοιχεία που τους αποτελούν, τις μεθόδους παραγωγής, αλλά και τα χαρακτηριστικά που παρουσιάζουν. Επίσης γίνεται αναφορά στα είδη κατεργασιών του χάλυβα (θερμικών και επιφανειακών), στα είδη του χάλυβα και τους ειδικούς χάλυβες και τέλος στις σταθερές αντοχής και ελαστικές σταθερές όπου μέσα από διάφορες εργαστηριακές δοκιμές θα κατανοήσουμε την αντοχή του χάλυβα ως προς την θραύση αλλά και τον υπολογισμό της σκληρότητας του.

Στο τρίτο κεφάλαιο τονίζουμε τον ρόλο του μηχανικού στο σχεδιασμό των χαλύβδινων κατασκευών αλλά και τον τρόπο σκέψης για την επιτυχή σχεδίαση μιας κατασκευής. Επιπλέον δίνεται αναφορά στις απαιτήσεις του ιδιοκτήτη της κατασκευής η οποία πρέπει να διαμορφωθεί βάση με τα δικά του <θέλω>, αλλά και το κόστος που μπορεί να επιφέρει η ίδια η εργασία αλλά και η συντήρησή της. Θα μελετήσουμε επίσης πως και γιατί τα προκατασκευασμένα κομμάτια χάλυβα και η εγκατάστασή τους στην κατασκευή, καθιστούν ευκολότερη στην ολοκλήρωση της και θα αναπτύξουμε την έννοια της ασφάλειας στις κατασκευές αυτές που είναι ένας από τους σημαντικότερους, αν όχι ο σημαντικότερος παράγοντας για να μπορέσουμε να πούμε ότι η κατασκευή ήταν επιτυχής. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την μέθοδο του γεωμετρικού χώρου η οποία χρησιμοποιεί την μέθοδο επιτρεπόμενων τάσεων για να ελέγχει έναν αριθμό διαφορετικών συνδυασμών φορτίσεων σε μια δοκό και τέλος θα κατηγοριοποιήσουμε τις δράσεις δηλαδή τα εξωτερικά φορτία ανάλογα με την φύση τους.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα αναλύσουμε τα πεπερασμένα στοιχεία και θα κατανοήσουμε την λειτουργία τους, αρχικά κάνοντας μια ιστορική αναδρομή

καταγράφοντας την πορεία τους από το 1909 όπου και... <γεννήθηκαν> μέχρι και σήμερα. Έπειτα, θα αναφερθούμε στην ολική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος όπου και θα γίνει κατανοητή από τα προβλήματα τα οποία θα επιλύσουμε και στην συνέχεια θα αναλύσουμε διάφορες μεθόδους όπως η μέθοδος των Rayleigh-Ritz και Galerkin. Τέλος θα μελετήσουμε δικτυωτούς και επιφανειακούς φορείς όπου μέσα από ασκήσεις και συμπεράσματα θα κατανοήσουμε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο θα επιλύσουμε εφαρμογές διαφόρων διατομών μέσα από το πρόγραμμα ANSYS δίνοντας μας αποτελέσματα για τις εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις κάμψεως για την κάθε διατομή χάλυβα.

Ευχαριστούμε τον καθηγητή κ. Παναγιώτη Κακαβά για την καθοδήγηση και τις πληροφορίες που μας παρείχε καθ' όλη την διάρκεια της εγγραφής αυτής της πτυχιακής εργασίας.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 ^ο Ιδιότητες και παραγωγή χάλυβα.....	8
1.1 Παραγωγή Χάλυβα:	8
Κεφάλαιο 2 Επεξεργασία και αντοχή χάλυβα	13
2.1 Δομικός Χάλυβας:	13
2.2 Κράματα σιδήρου-άνθρακα:	14
2.3 Θερμικές και επιφανειακές κατεργασίες χάλυβα:.....	16
2.4 Είδη χάλυβα και ειδικοί χάλυβες:	17
2.5 Οι σταθερές αντοχής και ελαστικές σταθερές του χάλυβα :	19
Κεφάλαιο 3 Σχεδιασμό χαλύβδινων κατασκευών με βάση τον Ευρωκώδικα #3	25
3.1 Ο ρόλος του μηχανικού στο σχεδιασμό χαλύβδινων κατασκευών:	25
3.2 Απαιτήσεις εκ μέρους ιδιοκτήτη / εντολέα:.....	27
3.3 Προϋπολογισμός εργασιών και κόστους συντήρησης:	31
3.4 Η προκατασκευή ως θεμελιώδες χαρακτηριστικό των κατασκευών χάλυβα:.....	32
3.5 Μέθοδος του γεωμετρικού χώρου:.....	33
3.6 Αρχές διαστασιολόγησης:.....	35
3.7 Η έννοια της ασφαλείας στις χαλύβδινες κατασκευές:	37
3.8 Οι κατηγορίες δράσεων και οι επιμέρους συντελεστές ασφαλείας:.....	37
Κεφάλαιο 4 ^ο Εφαρμογές των Πεπερασμένων Στοιχείων σε Μεταλλικές Κατασκευές ..	43
4.1 Γενικές πληροφορίες για τα πεπερασμένα στοιχεία	43

4.2 Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	46
4.3 Η ΟΛΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.	47
4.5 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ RAYLEIGH-RITZ	63
4.4 Μέθοδος Galerkin.....	72
4.5 ΔΙΚΤΥΩΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ-ΡΑΒΔΟΣ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ	74
4.6 ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ-ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ	85
4.7 Παραμορφώσεις και τάσεις του στοιχείου	89
4.8 Υπολογισμός του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου	90
4.9 Παρατηρήσεις σχετικά με το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου	93
4.10 ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΤΕΛΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ	96
4.11 Σχηματισμός του ολικού μητρώου ακαμψίας με τη μέθοδο	96
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΤΟ ANSYS	100
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1	100
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	121
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	137

Εικόνες

Εικόνα 1: Επεξεργασία χυτοσιδήρου	3
Εικόνα 2: Τυπικές διατομές χάλυβα	4
Εικόνα 3: Υπερθέρμανση του χάλυβα για επεξεργασία	5
Εικόνα 4: Διάγραμμα ορίου θραύσης του χάλυβα	5
Εικόνα 5: Σκωριά	6
Εικόνα 6: Παραγωγή χαλύβδινων προϊόντων	7

Εικόνα 7 : Χάλυβας τύπου <διπλό ταύ>	7
Εικόνα 8: Σωληνωτοί χάλυβες	8
Εικόνα 9: Παρασκευή χυτοσιδήρου	9
Εικόνα 10: Θερμική κατεργασία χαλύβδινων μηχανολογικών εξαρτημάτων.....	10
Εικόνα 11: Μετακίνηση επεξεργασμένων τμημάτων χάλυβα.....	11
Εικόνα 12: Χαλύβδινες ράβδοι, κοινώς <μπετόβεργες>	11
Εικόνα 13: Φερριτικού (πάνω) και ωστενιτικού (κάτω) τύπου χάλυβα.....	12
Εικόνα 14: Πρέσα εφελκυστικών δοκιμών.....	13
Εικόνα 15: Δοκιμή λυγισμού του χάλυβα	14
Εικόνα 16: Δοκιμή αντοχής σε θραύση του χάλυβα	14
Εικόνα 17: Τυπικές μεταλλικές σφαίρες, απαραίτητες για την δοκιμή της σκληρότητας..	15
Εικόνα 18: Δοκιμή της σκληρότητας του χάλυβα	15
Εικόνα 19: 3D άποψη διατομής χάλυβα δυπλού ταύ	16
Εικόνα 20: Διαδικασία μετατροπής πρώτων υλών σε προϊόντα	17
Εικόνα 21: Χαλύβδινη κατασκευή	18
Εικόνα 22: Χαλύβδινη κατασκευή	18
Εικόνα 23: Burj Khalifa. Το μεγαλύτερο σε ύψος χαλύβδινο κτήριο στον κόσμο	19
Εικόνα 24: Αναπαράσταση του χαλύβδινου σκελετού μιας κατοικίας.....	20
Εικόνα 25: Χαλύβδινη κατασκευή	23
Εικόνα 26: Πολλαπλές ενώσεις χαλύβδινων δοκών τύπου <διπλό ταύ>.....	24
Εικόνα 27: Προπαρασκευασμένα κομμάτια από χάλυβα για την κατασκευή οροφής γηπέδου	24
Εικόνα 28: Προπαρασκευασμένο κομμάτι από χάλυβα	24
Εικόνα 29: Παραμόρφωση δοκού ύστερα από επιβολή φορτίων.....	25

Εικόνα 30: Χαλύβδινα δοκίμια παραμορφωμένα ύστερα απο δοκιμή σε εφελκυσμό	26
Εικόνα 31: Αστοχία χαλύβδινων βεργών και συνεπώς, του σκυροδέματος	27
Εικόνα 32: Τοποθέτηση χάλυβα σε κατασκευή.....	29
Εικόνα 33: Αστοχία χάλυβα	31

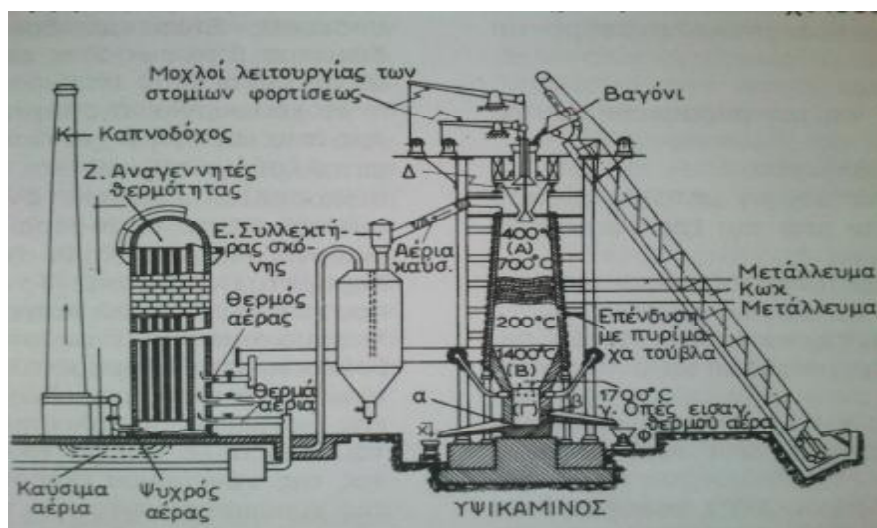
Κεφάλαιο 1^ο Ιδιότητες και παραγωγή χάλυβα

1.1 Παραγωγή Χάλυβα:

Για την παραγωγή του ρευστοπαγούς χάλυβα εφαρμόζονται βασικά τρεις μέθοδοι που χαρακτηρίζονται από το τύπο του καμινιού ή της συσκευής που χρησιμοποιείται:

-**Μέθοδος Bessemer και Thomas.** Λιωμένος χυτοσίδηρος μεταφέρεται σε ειδικά δοχεία και καλούνται μετατροπείς, σχήματος αχλαδιού.

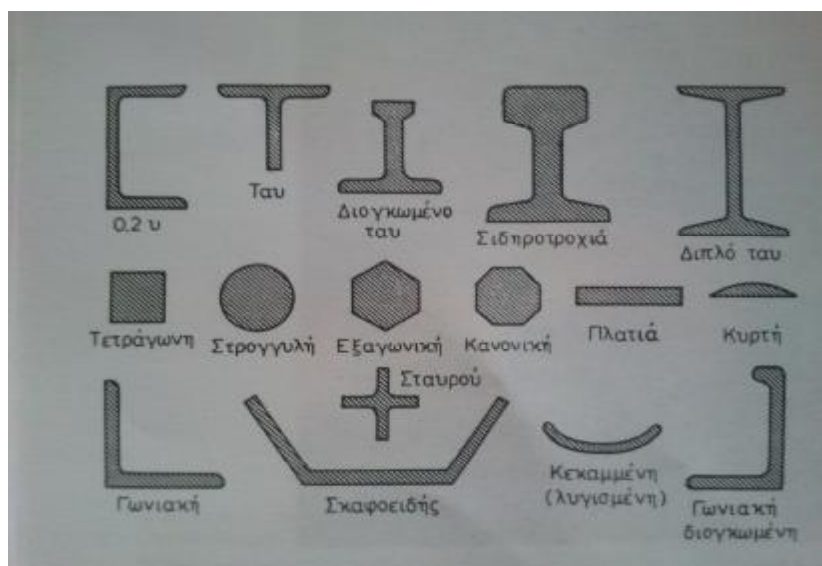
Οι μετατροπείς αυτοί είναι μεταλλικοί και έχουν εσωτερική πυρίμαχη επένδυση από χαλαζιακό αργιλόλιθο (στο μετατροπέα του Bessemer) ή βασικό δολομίτη (στο μετατροπέα του Thomas). Στους μετατροπείς εισάγεται κρύος αέρας και καίγονται ο άνθρακας και οι άλλες προσμίξεις. Σε ειδικές περιπτώσεις εισάγεται οξυγόνο.



Εικόνα 1: Επεξεργασία χυτοσιδήρου

-Μέθοδος Siemens-Martin. Κατά τη μέθοδο αυτή, που διαφέρει τελείως από την προηγούμενη, δεν χρησιμοποιείται ο λιωμένος χυτοσίδηρος της υψικαμίνου, αλλά μίγμα χυτοσίδηρου γνωστής περιεκτικότητας σε άνθρακα και τεμάχια παλαιού χάλυβα. Στο καμίνι αυτό εισάγεται θερμός αέρας που μπορεί να αναπτύξει πολύ υψηλές θερμοκρασίες.

-Μέθοδος ηλεκτρικού καμινιού. Χρησιμοποιείται ως πρώτη υλη χάλυβας που παρασκευάστηκε με την μέθοδο Bessemer ή Thomas από τον οποίο έχει αφαιρεθεί τελείως ο άνθρακας. Στο καμίνι αυτό προστίθεται καθαρός άνθρακας συγκεκριμένης ποσότητας καθώς και άλλα μέταλλα. Έτσι αποκτάται χάλυβας με απολύτως καθορισμένες αναλογίες των διαφόρων συστατικών του. Με τη μέθοδο αυτή παράγονται χάλυβες εξαιρετικής ποιότητας.



Εικόνα 2: Τυπικές διατομές χάλυβα

Με τις αναφερθείσες μεθόδους παράγεται μεγάλο πλήθος χαλύβων με σημαντικές διαφορές στις βασικές ιδιότητες τους. Αυτό επιτυγχάνεται κατά διάφορες αναλογίες. Περαιτέρω βελτίωση ορισμένων ιδιοτήτων γίνεται με ψυχρή κατεργασία διαφόρων χαλύβων όπως π.χ. έλξη, στρέψη, τάνυση κλπ. Επίσης γίνεται η λεγόμενη βαφή για την επιφανειακή σκληρότητα.

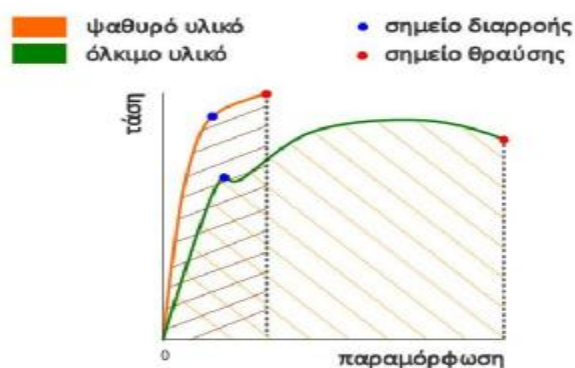
1.2 Ιδιότητες Χάλυβα:

Η σημαντικότερη ιδιότητα των χαλύβων είναι η **αντοχή τους σε εφελκυσμό και θλίψη**. Η ιδιότητα αυτή συντέλεσε περισσότερο από κάθε άλλη στην τεράστια χρήση και εξάπλωσή τους όχι μόνο στα τεχνικά έργα αλλά και σε άλλες επιτεύξεις της τεχνολογίας εν γένει. Αποτελεί συγχρόνως και κριτήριο προσδιορισμού της ποιότητάς τους. Η αντοχή αυτή επιρεάζεται από 2 κυρίως παράγοντες: Από την χημική σύστασή τους και από την κατεργασία που υφίστανται μετά την παραλαβή τους από τα καμίνια.



Εικόνα 3: Υπερθέρμανση του χάλυβα για επεξεργασία

Οι αναλογίες του άνθρακα καθώς και των διαφόρων μετάλλων και κυρίως του μαγγανίου, χρωμίου και μολυβδαινίου αυξάνουν σημαντικά την αντοχή τους επιτυγχάνεται όταν βρίσκεται σε ψυχρή ή σε θερμή κατάσταση ή σε συνδιασμό και με τις δύο καταστάσεις. Οι αντοχές των χαλύβων κυμαίνονται μεταξύ των ορίων 3400 kp/cm² και 18000 kp/cm².



Εικόνα 4: Διάγραμμα ορίου θραύσης του χάλυβα

Οι τεχνολογικές ιδιότητες των χαλύβων εξαρτώνται από την χημική σύστασή τους, δηλαδή από την περιεκτικότητά τους σε άνθρακα και σε άλλα μέταλλα και προσμίξεις.

Αντοχή σε θερμότητα. Οι χάλυβες γενικά σε θερμοκρασία άνω των 450 βαθμών Κελσίου χάνουν μεγάλο μέρος της αντοχής τους και υφίστανται μεγάλες επιμηκύνσεις. Στα δύο αυτά αίτια οφείλεται η μειωμένη αντοχή των σιδηρών κατασκευών κατά την διάρκεια των πυρκαγιών.

Αντοχή στη διάβρωση. Διάβρωση γενικά καλλείται η αλλοίωση της επιφάνειας ενός δομικού στοιχείου λόγω της επιδράσεως διαφόρων εξωτερικών παραγόντων. Οι κυριότεροι από αυτούς είναι ο ατμοσφαιρικός αέρας, η ατμοσφαιρική ρύπανση, το νερό, τα αέρια, το έδαφος, οι χημικές ουσίες κ.α. Η ευπάθεια των μετάλλων στη διάβρωση αποτελεί το σοβαρότερο μειονέκτημά τους. Η σκουριά προχωράει σε βάθος και σε ορισμένο χρόνο προκαλεί πλήρη αποσύνθεση του μεταλλικού στοιχείου. Συγχρόνως λόγω της διογκώσεως της σκουριάς προκλούνται καταστροφές και σε άλλα υλικά με τα οποία είναι ενσωματωμένο το στοιχείο αυτό όπως το ξύλο, τα σκυροδέματα, τα επιχρίσματα κ.λ.π



Εικόνα 5: Σκουριά

Η αντιδιαβρωτική προστασία των μεταλλικών κατασκευών και ιδιαίτερος των σιδηρών, είναι απολύτως αναγκαία. Η προστασία αυτή επιτυγχάνεται με διάφορες μεθόδους. Χρησιμοποιούνται μέθοδοι ενεργητικής και παθητικής προστασίας. Στην πρώτη περίπτωση λαμβάνεται πρόνοια εκπονήσεως μιας κατάλληλης μελέτης του έργου και επιλογής των υλικών με σύγχρονη απομάκρυνση αν είναι δυνατόν ή εξουδετερώσεως των διαβρωτικών ουσιών. Ισχυρότερη προστασία έναντι της

διαβρώσεως παρέχουν οι ανοξείδωτοι χάλυβες οι οποίοι όμως σπανιώς χρησιμοποιούνται σε δομικά έργα λόγω της μεγάλης τιμής τους.

Στην δεύτερη περίπτωση (παθητικής προστασίας) χρησιμοποιούνται διάφοροι τρόποι επιμεταλλώσεως. Οι συχνότερα χρησιμοποιούμενοι είναι:

- Ø Ανόργανες επιμεταλλώσεις με πύρωση, φωσφατική στρώση βαρέων μετάλλων κ.α.
- Ø Μεταλλικές επιμεταλλώσεις, όπως εμβάπτηση σε λιωμένο μέταλλο, γαλβανισμός, επικονίαση, χρωμίου και επιμεταλλώσεις με ευγενή μέταλλα όπως χαλκός, άργυρος, ψευδάργυρος, αλουμίνιο.
- Ø Μη μεταλλικές ανόργανες επιμεταλλώσεις με πυριτικά άλατα με τσιμέντο.
- Ø Μη μεταλλικές οργανικές επιχρίσεις με ασφαλτικά υλικά, με πλαστικές επενδύσεις και ρητινικές επιχρίσεις, χρώματα κ.α.



Εικόνα 6: Παραγωγή χαλύβδινων προϊόντων

Κεφάλαιο 2 Επεξεργασία και αντοχή χάλυβα

2.1 Δομικός Χάλυβας:

Με τον όρο χάλυβας εννοούμε ένα κράμα από σίδηρο και άνθρακα¹.

Στα περισσότερα είδη χάλυβατα οποία χρησιμοποιούνται στα δομικά έργα, το ποσοστό του άνθρακα δεν υπερβαίνει συνήθως το 1,2 %, ενώ γενικά στους χάλυβες το ποσοστό του άνθρακα δεν υπερβαίνει το 2 %.

Υπάρχουν επίσης και προσμίξεις άλλων μετάλλων όπως νικελίου, μαγγανίου, χρωμίου κ.α. ή και αμετάλλων όπως πυριτίου κ.α. Τα ποσοστά των διαφόρων συστατικών του κράματος επηρεάζουν σημαντικά τις μηχανικές, φυσικές και χημικές ιδιότητες του χάλυβα. Παραδείγματος χάριν, ο άνθρακας οδηγεί σε αύξηση της αντοχής και της σκληρότητας του κράματος χάλυβα, αλλά ταυτόχρονα μειώνει την πλαστικότητα η οποία εξαρτάται και από την περιεκτικότητα σε φωσφόρο και θείο.



Εικόνα 7 : Χάλυβας τύπου <διπλό ταύ>

Το όριο μεταξύ ελατού σιδήρου (χάλυβα) και ακατέργαστου σιδήρου δεν είναι σαφές διότι η ολκιμότητα αυξάνεται όσο ελαττώνεται η περιεκτικότητα σε άνθρακα, ενώ εξαρτάται και από διάφορες άλλες προσμίξεις και τον τρόπο καμίνωσης. Η μετατροπή του ακατέργαστου σιδήρου σε ελατό σίδηρο ή χάλυβα, γίνεται σε 2

1

συνεχείς φάσεις. Η πρώτη φάση είναι η φάση της οξείδωσης του άνθρακα και των τυχόν προσμίξεων, δηλαδή του φωσφόρου, του θείου, του πυριτίου κτλ.

Τα οξείδια αυτά λαμβάνονται ως σκωρίες ή ως αέρια. Το τελικό προϊόν της φάσης αυτής ονομάζεται ακατέργαστος χάλυβας. Η δεύτερη φάση αφαίρεσης του πλεονάζοντος οξυγόνου διότι όταν αυτό είναι αυξημένο σε ποσοστό το οποίο μπορεί να φθάσει και το 0,03 % του βάρους του, τότε αυξάνεται σε βαθμό ανεπίτρεπτο η ψαθυρότητα του υλικού. Το προϊόν αυτής της δεύτερης φάσης είναι ο χάλυβας.



Εικόνα 8: Σωληνωτοί χάλυβες

Σήμερα στη χαλυβουργία χρησιμοποιούνται οι εξής μέθοδοι:

- Η μέθοδος έμφυσης
 - Η μέθοδος Thomas
 - Η μέθοδος Bessemer
 - Η μέθοδος έμφυσης οξυγόνου
- Η μέθοδος καμίνων
 - Η μέθοδος Siemens – Martin
 - Η μέθοδος των ηλεκτρικών καμίνων (ηλεκτροχάλυβας)

2.2 Κράματα σιδήρου-άνθρακα:

Ο **χυτοσίδηρος** είναι κράμα σιδήρου με άνθρακα σε περιεκτικότητα μεγαλύτερη από 2,1% κατά βάρος. Στην πραγματικότητα με τον όρο «χυτοσίδηρος» εννοείται μία οικογένεια κραμάτων τα οποία εκτός από άνθρακα, μπορεί να περιέχουν και άλλα στοιχεία όπως πυρίτιο, κ.λπ. Οι χυτοσίδηροι είναι εύθραυστοι σε σύγκριση με τον χάλυβα, αλλά παρουσιάζουν πιο καλή αντίσταση στην τριβή και την διάβρωση.

Η περιεκτικότητα του χυτοσιδήρου σε άνθρακα μπορεί να φτάσει και το 6,67% (σημείο δημιουργίας καθαρού σεμεντίτη: Fe_3C), αλλά σπανίως ξεπερνά το 4,3% (ευτηκτικό σημείο του διαγράμματος φάσεων Fe-C). Εκτός από άνθρακα, οι κοινοί χυτοσίδηροι περιέχουν πυρίτιο (1–3%) και μαγγάνιο (~0,5%), ενώ υπάρχουν και ισχυρά κραματωμένοι χυτοσίδηροι με υψηλή περιεκτικότητα σε νικέλιο (4–20%) και χρώμιο (~3%).

Γενικά, οι χυτοσίδηροι παρουσιάζουν τα εξής χαρακτηριστικά:

- χαμηλό κόστος παραγωγής,
- χαμηλό σημείο τήξης (1140–1200°C),
- ευκολία χύτευσης σε συγκεκριμένες διαστάσεις,
- ευκολία μηχανουργικής κατεργασίας,
- σχετικά καλή αντίσταση στην μηχανική φθορά και την διάβρωση,
- υψηλή ικανότητα απορρόφησης κραδασμών, και
- σχετικά καλή μηχανική αντοχή (108–340 MPa).



2.3 Θερμικές και επιφανειακές κατεργασίες χάλυβα:

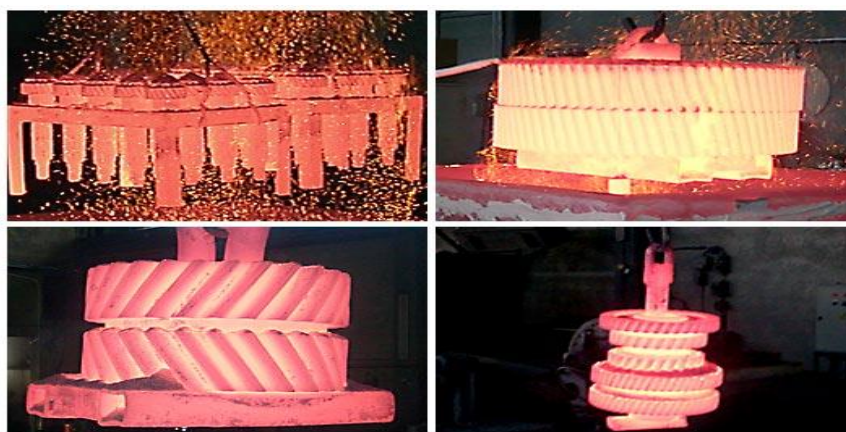
Υπάρχουν ορισμένα κρίσιμα σημεία κατά την μεταβολή της θερμοκρασίας συνήθως χαλύβων, τα οποία αντιστοιχούν στην μετατροπή του μεταλλογραφικού ιστού, εφόσον η θερμοκρασία μεταβάλλεται με ορισμένη ταχύτητα. Με την θέρμανση του κράματος μέχρι ορισμένου σημείου και εν συνεχεία με την κατάλληλη επιτάγχνση ή επιβράδυνση της ψύξης είναι δυνατόν να σχηματιστούν και να διατηρηθούν ή να εξαφανιστούν ορισμένες επιθυμητές ή ανεπιθύμητες ιδιότητες.

Οι κυριότερες θερμικές κατεργασίες είναι:

Η βαφή : Συνίσταται στην ανύψωση της θερμοκρασίας και στην απότομη ψύξη ώστε να προκύψει μαρντεσίτης.

Η ανόπτηση : Συνίσταται στην αύξηση της θερμοκρασίας του χάλυβα μέχρι τους 500-600 βαθμούς Κελσίου και ακολούθως, στη βραδεία ψύξη του.

Η επαναφορά : Εφαρμόζεται σε χάλυβες οι οποίοι έχουν υποστεί την διαδικασία της βαφής και σκοπό έχει την εξάλειψη των εσωτερικών τάσεων οι οποίες δημιουργούνται κατά την διάρκεια της βαφής.



Εικόνα 10: Θερμική κατεργασία χαλύβδινων μηχανολογικών εξαρτημάτων

Οι επιφανειακές κατεργασίες του χάλυβα σκοπό έχουν να προσδώσουν ορισμένες ιδιότητες στο υλικό ώστε να επαυξηθεί η χρησιμότητά του και χωρίζονται σε 2 μεγάλες κατηγορίες : στις επιμεταλλώσεις και στις χημικές κατεργασίες. Στις επιμεταλλώσεις δημιουργείται ένα επιφανειακό κράμα με κατάλληλα μέταλλα (ψευδάργυρο, νικέλιο, χρώμιο, κάδμιο, χαλκό κ.α.), ενώ στις χημικές αλλοιώνεται με την δημιουργία χημικής ένωσης η επιφανειακή σύσταση του χάλυβα.

Η επιμετάλλωση : έχει ως στόχο την προστασία του χάλυβα από την οξείδωση και συνίσταται στην δημιουργία ανθεκτικού κράματος στην επιφάνεια.

Η ενανθράκωση : εφαρμόζεται επιφανειακά σε πτωχούς σε άνθρακα συνήθεις χάλυβες ή σε αντίστοιχους ειδικούς χάλυβες με σκοπό την αύξηση της σκληρότητας της επιφάνειάς τους.

Η τοπική επιφανειακή : κατά την οποία θερμαίνεται μόνον ένα τμήμα της επιφάνειας του χάλυβα όπου απαιτείται τοπικά αύξηση της σκληρότητας.



Εικόνα 11: Μετακίνηση επεξεργασμένων τμημάτων χάλυβα

2.4 Είδη χάλυβα και ειδικοί χάλυβες:

Οι χάλυβες χωρίζονται ανάλογα με τον τρόπο παραγωγής τους και ανάλογα με την χημική τους σύσταση σε συνήθεις ή ανθρακούχους και σε ειδικούς χάλυβες.

Οι **συνήθεις ή ανθρακούχοι χάλυβες** με ποσοστό άνθρακα μέχρι 1,20 % χαρακτηρίζονται ως δομικοί χάλυβες, ενώ για ποσοστό άνω του 1,20 % ονομάζονται

χάλυβες εργαλείων λόγω της αυξημένης σκληρότητάς τους.Ως συνήθεις χάλυβες θεωρούνται εκείνοι οι οποίοι είναι κράματα κυρίως άνθρακα και σιδήρου με μικρές μόνο ποσότητες άλλων προσμίξεων (χρωμίου, νικελίου, μαγγανίου, θείου κ.α.).Τέλος από πλευράς εφαρμογής, οι χάλυβες διακρίνονται σε χάλυβες δομικούς, εργαλείων και σε χάλυβες ειδικών χρήσεων.



Εικόνα 12: Χαλύβδινες ράβδοι, κοινώς <μπετόβεργες>

Σχετική με τις προσμίξεις είναι και η διαδικασία κατεύνασης του χάλυβα.Η ποιότητα του χάλυβα εξαρτάται απότο είδος της κατεύνασής του ιδιαίτερα όταν πρόκειται για συνήθεις χάλυβες. Ο κατευνασμένος χάλυβας μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ηλωτές ή κοχλιωτές κατασκευές, ενώ για συγκολλητές κατασκευές είναι καλύτερα να χρησιμοποιούνται ειδικά κατευνασμένοι χάλυβες οι οποίοι εμφανίζουν ιδιαίτερα καλή συμπεριφορά σε συγκολλήσεις και έχουν πολύ καλή συμπεριφορά στην περιοχή των τάσεων πλησίον του σημείου διαρροής. Για τους λόγους αυτούς οι ειδικά κατευνασμένοι χάλυβες είναι κατάλληλοι για την εν ψυχρώ διαμόρφωση διατομών και για διατομές με μεγάλα πάχη όπου αναπτύσσονται ιδιαίτερα υψηλές εσωτερικές τάσεις κατά την διαδικασία της συγκόλλησης.

Όπως είναι γνωστό, καθώς αυξάνεται η περιεκτικότητα του χάλυβα σε άνθρακα αυξάνεται η αντοχή του, αλλά μειώνεται η πλαστιμότητά του και η ικανότητα συγκόλλησής του.Υψηλή αντοχή και ταυτόχρονα ικανοποιητική ελαστικότητα μπορεί να διασφαλιστεί με κατάλληλα προσθέματα στο κράμα Fe – Cαπ όπου προκείπουν οι ειδικοί χάλυβες ή κραματοχάλυβες. Τα κυριότερα προσθέματα στο κράμα Fe – Cείναι τα εξής :

- Ø **Φερριτικά** προσθέματα δίδουν ειδικούς χάλυβες φερριτικού τύπου οι οποίοι διαθέτουν υψηλότερη αντοχή σε διάβρωση, είναι αυξημένης αντοχής και σκληρότητας και έχουν μειωμένη πλαστιμότητα.
- Ø **Ωστενιτικά** προσθέματα δίδουν χάλυβες ωστενιτικού τύπου οι οποίοι έχουν αυξημένη πλαστιμότητα και είναι μη μαγνητικοί.



Εικόνα 13: Φερριτικού (πάνω) και ωστενιτικού (κάτω) τύπου χάλυβα

2.5 Οι σταθερές αντοχής και ελαστικές σταθερές του χάλυβα :

Οι μηχανικές ιδιότητες του χάλυβα καθορίζονται επακριβώς με την εκτέλεση τυποποιημένων εργαστηριακών δοκιμών σε τυποποιημένα δοκίμια τα οποία εξετάζονται εργαστηριακά σε μονοτονική ή κυκλική φόρτιση. Η πρώτη περίπτωση φόρτισης δοκιμών χάλυβα αφορά, παραδείγματος χάριν, σε πειράματα καθορισμού εφελκιστικής αντοχής, θλιπτικής αντοχής, ερπυσμού κ.ο.κ., ενώ η δεύτερη σε πειράματα κόπωσης κ.ο.κ.



Εικόνα 14: Πρέσα εφελκυστηκών δοκιμών

Για τον καθορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων του χάλυβα, υπάρχουν 2 απλές θεμελιώδης εντατικές καταστάσεις :

- Ø Ο εφελκισμός ή η θλίψη οι οποίες παράγονται από μονοαξονική φόρτιση και
- Ø Η διάτμηση η οποία παράγεται από στρεπτική φόρτιση.

Όταν λοιπόν , στον χάλυβα αναπτύσσονται τάσεις, το υλικό παραμορφώνεται αρχικά ελαστικά και στην συνέχεια πλαστικά. Οι ελαστικές παραμορφώσεις είναι αναστρέψιμες όταν το δοκίμιο αποφορτιστεί, ενώ οι πλαστικές παραμορφώσεις είναι εξ ορισμού παραμένουσες. Επιπλέον πρέπει να σημειωθεί ότι ο χάλυβας είναι πιθανόν να συμπεριφέρεται ανελαστικά.



Εικόνα 15: Δοκιμή λυγισμού του χάλυβα

Αντοχή σε θραύση:

Με την δοκιμή αυτή επιτυγχάνεται η μέτρηση της ενέργειας η οποία απορροφάται από τυποποιημένο χαλύβδινο δοκίμιο με εγκοπή σχήματος V όταν αυτό θραυσθεί από χτύπημα αιωρούμενης σφαίρας. Η πιο γνωστή τυποποιημένη δοκιμή είναι η δοκιμή Charpy.



Εικόνα 16: Δοκιμή αντοχής σε θραύση του χάλυβα

Δοκιμή Σκληρότητας:

Η σκληρότητα ενός χάλυβα υπολογίζεται με κάποια διαδικασία δοκιμής σκληρότητας (Brinell, Rockwell, Vickers κ.α). Συγκεκριμένα, κατά την δοκιμή Brinell η οποία είναι και η συνηθέστερη δοκιμή καθορισμού σκληρότητας, προσδιορίζεται η πλαστική παραμόρφωση του δοκιμίου την οποία προκαλεί η διείσδυση χαλύβδινης σφαίρας διαμέτρου D φορτιζόμενη από φορτίο F εντός του δοκιμίου.



Εικόνα 17: Τυπικές μεταλλικές σφαίρες, απαραίτητες για την δοκιμή της σκληρότητας



Εικόνα 18: Δοκιμή της σκληρότητας του χάλυβα

Ελατές και συγκολλητικές διατομές. Οι πρότυπες σειρές των ελατών διατομών :

Οι διάφορες **διατομές χάλυβα** οι οποίες χρησιμοποιούνται στα δομικά στοιχεία των χαλυβδινών κατασκευών διακρίνονται με κριτήριο τον τρόπο παραγωγής τους σε 2 βασικές κατηγορίες: τις **ελαστικές διατομές**, και τις **συγκολλητές διατομές**. Οι πρώτες παράγονται απευθείας από την βιομηχανία μέσω διαδικασίας έλασης εν θερμώ, ενώ οι δεύτερες δημιουργούνται με συγκόλληση ελασμάτων χάλυβα.

Οι συνηθέστερες ελατές διατομές είναι τα **διπλά ταυ**. Αυτά, κατατάσσονται σε 2 βασικές ομάδες: στα διπλά ταυ στα οποία η ροπή αδράνειας I_z είναι μικρή σε σχέση με την ροπή αδράνειας I_y και για αυτό χρησιμοποιούνται κυρίως σε καμπτόμενα δομικά υλικά και στα **διπλά ταυ** με ροπή αδράνειας I_z αυξημένη τα οποία χρησιμοποιούνται σαν υποστηλώματα ή δοκοί όταν για αρχιτεκτονικούς λόγους πρέπει να έχουν ελαχιστοποιημένο ύψος ή σε στοιχεία με σημαντικές τιμές καμπτικής ροπής και τους 2 άξονές τους.



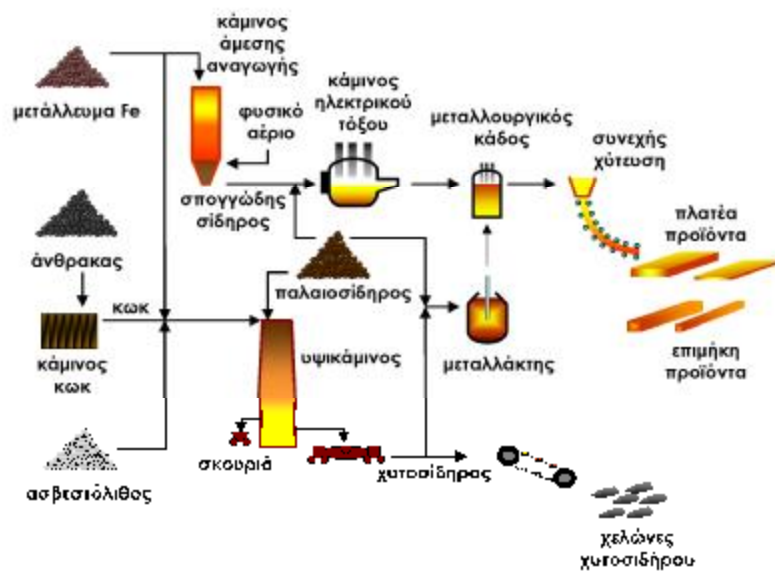
Εικόνα 19: 3D άποψη διατομής χάλυβα διπλού ταυ

Τα χαρακτηριστικά αντοχής του χάλυβα στον Ευρωκώδικα 3:

Ο Ευρωκώδικας 3 παραπέμπει σε συγκεκριμένες Ευρωπαϊκές Προδιαγραφές όπου δίδονται με ακρίβεια τα χαρακτηριστικά αντοχής κάθε τύπου χάλυβα. Για την ανάλυση κατασκευών μπορεί να εφαρμοσθεί η πλαστική ανάλυση συνολικά ή για επιμέρους δομικά τους στοιχεία υπό την προϋπόθεση ότι ο δομικός χάλυβας υπόκειται σε κάποιους συγκεκριμένους προσδιορισμούς :

- Ø Ο λόγος της καθορισμένης ελάχιστης εφελκυστικής αντοχής αστοχίας από καθορισμένη ελάχιστη αντοχή διαρροής ικανοποιεί την σχέση $f_u/f_y \geq 1.2$
- Ø Η επιμήκυνση κατά την αστοχία ενός δοκιμίου μήκους $5.65 A_0^{1/2}$ δεν είναι μικρότερη του 15% του αρχικού μήκους του.
- Ø Το διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων δείχνει ότι η οριακή ανηγμένη παραμόρφωση αστοχίας ϵ_u η οποία αντιστοιχεί στην οριακή αντοχή αστοχίας f_u είναι τουλάχιστον 20πλάσια της ανηγμένης παραμόρφωσης διαρροής ϵ_y η οποία αντιστοιχεί στην αντοχή διαρροής f_y .

Σχετικά με την αντοχή του χάλυβα σε θραύση, έχει παρατηρηθεί σε εργαστηριακές δοκιμές εφελκυσμού ότι τα δοκίμια χάλυβα στην περίπτωση κατά την οποία φορτίζονται με αργό ρυθμό έχουν ικανοποιητική εφελκυστική συμπεριφορά, ενώ όταν φορτίζονται με γρήγορο ρυθμό, αστοχούν στον ψαθυρό τρόπο. Επίσης, έχει παρατηρηθεί ότι η συμπεριφορά αυτή είναι συναρτημένη με την μεταβολή της θερμοκρασίας. Για τον λόγο αυτό, ο Κανονισμός προβλέπει ότι ο χάλυβας ο οποίος χρησιμοποιείται στις κατασκευές πρέπει να έχει επαρκή αντοχή σε θραύση ώστε να αποφεύγεται ψαθυρή θραύση στην χαμηλότερη θερμοκρασία λειτουργίας η οποία αναμένεται να συμβεί κατά την διάρκεια της προσδοκώμενης ζωής της κατασκευής.



Εικόνα 20: Διαδικασία μετατροπής πρώτων υλών σε προϊόντα

Κεφάλαιο 3 Σχεδιασμός χαλύβδινων κατασκευών με βάση τον Ευρωκώδικα #3

3.1 Ο ρόλος του μηχανικού στο σχεδιασμό χαλύβδινων κατασκευών:

Ο σχεδιασμός μιας κατασκευής χάλυβα αρχίζει από τον καθορισμό των στόχων της κατασκευής ο οποίος οδηγεί στην επιλογή της μορφής και καταλήγει στον ακριβή υπολογισμό και τα σχέδια των κατασκευαστικών λεπτομερειών του κτιρίου. Έχει δε ως αντικείμενο την υλοποίηση μιας κατασκευής η οποία ικανοποιεί τα επιλεγέντα κριτήρια ασφάλειας, λειτουργικότητας και οικονομίας ή και άλλα δευτερεύοντα. Η μελέτη ξεκινά από τον καθορισμό των απαιτήσεων του εντολέα ο οποίος παρέχει συνήθως στον μελετητή τα απαραίτητα στοιχεία σχετικά με τον σκοπό του έργου και τα όρια του προϋπολογισμού.

Σκέψεις και ιδέες του τελικού χρήστη είναι συχνά στην προκαταρκτική αυτή φάση ιδιαίτερα χρήσιμες για τον μελετητή διότι του επιτρέπουν να κατευθύνει την εργασία του έτσι ώστε το τελικό αποτέλεσμα να ταυτίζεται κατα το δυνατόν με τις επιθυμίες του πελάτη. Τα προηγούμενα στοιχεία αποτελούν την αρχική πηγή πληροφοριών τις οποίες ο μηχανικός καλείται να λάβει υπ' όψιν, να τις επεξεργαστεί στα πλαίσια της επιστήμης της τέχνης, των κανονισμών και της πρακτικής της αγοράς βελτιώνοντάς τες ώστε το τελικό αποτέλεσμα να είναι σωστό από πλευράς σχεδιασμού χαλύβδινου κτίριο.



Εικόνα 21: Χαλύβδινη κατασκευή



Εικόνα 22: Χαλύβδινη κατασκευή

Το πρωταρχικό αυτό στάδιο σχεδιασμού διαμορφώνεται συνήθως από την συνεργασία του πολιτικού μηχανικού με τον αρχιτέκτονα του έργου ο οποίος προτίνει λύσεις λαμβάνοντας υπ' όψιν τα όσα εισηγείται ο πρώτος από δομοστατικής άποψης, ενώ ταυτόχρονα έχει και την ευθύνη για την γενικότερη αισθητική του έργου, τη λειτουργία των επιμέρους χώρων και τις λεπτομέρειες οικοδομικής φύσης. Φυσικά, σε χαλύβδινα κτίρια όπου ο ηλεκτρομηχανολογικός εξοπλισμός αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για την σωστή λειτουργία του κτιρίου και επιρεάζει αποφασιστικά την μορφή των χαλύβδινων φορέων, καθόλη την διάρκεια της κατασκευής απαιτείται συνεχής αλληλοενημέρωση και ανταλλαγή απόψεων, ώστε να προκύψει εν τέλει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.



Εικόνα 23: Burj Khalifa. Το μεγαλύτερο σε ύψος χαλύβδινο κτήριο στον κόσμο

3.2 Απαιτήσεις εκ μέρους ιδιοκτήτη / εντολέα:

Οι απαιτήσεις ενός ιδιοκτήτη ποικίλουν για αυτο χωρίζονται σε 2 κατηγορίες :

Γενικές απαιτήσεις: Το χαλύβδινο κτίριο το οποίο σχεδιάζεται πρέπει να είναι οικονομικό ως προς το κόστος κατασκευής του, ποιοτικά καλό από πλευράς υλικών και εργασιών κατασκευής, εύκολα και οικονομικά συντηρούμενο και καθαριζόμενο, υψηλής αισθητικής και ασφαλές σε όλες τις φάσεις κατασκευής, αλλά και λειτουργίας του.

Ειδικές απαιτήσεις: Πρέπει να λαμβάνεται μέριμνα έτσι ώστε το κτίριο από χάλυβα να ικανοποιεί και ένα πλήθος ειδικών απαιτήσεων όπως:

- ✓ Η στεγάνωση των εσωτερικών χώρων να είναι απόλυτη.
- ✓ Ο φυσικός φωτισμός να είναι σωστός.
- ✓ Ο φυσικός ή τεχνητός αερισμός του κτιρίου να είναι ο καλύτερος δυνατός.
- ✓ Ο κλιματισμός του κτιρίου να είναι σωστά υπολογισμένος ώστε να καλύπτει τις ανάγκες θέρμανσης και ψύξης.
- ✓ Να υπάρχει πρόβλεψη τοποθέτησης και δυνατότητας κίνησης γερανογεφυρών και κινητών φορτίων μονής τροχιάς, καθώς επίσης και ανελκυστήρων.
- ✓ Να υπάρχει πρόβλεψη και τοποθέτηση αγωγών.
- ✓ Η διατάραξη των φέροντων στοιχείων χάλυβα να είναι τέτοια ώστε να επιτρέπει την κίνηση μηχανιμάτων και την μεταφορά ογκόδων φορτίων.
- ✓ Να υπάρχει πρόβλεψη για μελλοντικές επεκτάσεις του χαλύβδινου κτιρίου και πιθανή αλλαγή χρήσης του.

Καταγραφή των απαιτήσεων: Στην περίπτωση που ο χρήστης του κτηρίου είναι γνωστός από την αρχή, παρόμοιες με τις παραπάνω απαιτήσεις καταγράφονται εγκαίρως και εφόσον είναι δυνατόν, ικανοποιούνται. Όταν όμως ο χρήστης είναι άγνωστος τότε η κατασκευή είναι πιθανό να χρησιμοποιηθεί τελικά για χρήσεις για

τις οποίες δεν έχει μελετηθεί. Επομένως είναι απαραίτητο όλες οι λειτουργίες του κτιρίου να είναι καταγεγραμμένες σε αντίστοιχα σχέδια, ώστε σε περίπτωση τροποποίησης χρήσης του κτηρίου να αποφευχθούν βλάβες και να διευκολυνθεί πιθανή τροποποίηση της λειτουργίας του.



Εικόνα 24: Αναπαράσταση του χαλύβδινου σκελετού μιας κατοικίας

Απαιτήσεις μελέτης:

Οι απαιτήσεις της μελέτης ποικίλουν όπως είδαμε και πιο πάνω με τις απαιτήσεις του ιδιοκτήτη:

Χωροθέτηση του χαλύβδινου κτηρίου

- ✓ Να υπάρχει οδική πρόσβαση στο σημείο κατασκευής του έργου.
- ✓ Να είναι εξασφαλισμένη η επαφή του χώρου δόμησης με τα δίκτυα ύδρευσης, αποχέτευσης και ηλεκτρικού ρεύματος. Ακόμη και σε πυκνοδομημένες περιοχές, υπάρχει η πιθανότητα η παροχή αυτών των υπηρεσιών να είναι αδύνατη ή ιδιαίτερα δαπανηρή.
- ✓ Να έχουν διερευνηθεί οι ιδιότητες του εδάφους θεμελίωσης.
- ✓ Θα πρέπει να υπάρχει πρόβλεψη για το μέγιστο ύψος υδάτων σε περίπτωση έντονης βροχόπτωσης, ιδιαίτερα σε περιοχές υπό ανάπτυξη, όπου τέτοια στοιχεία είναι δύσκολο να ευρεθούν.
- ✓ Θα πρέπει να μελετάται η γενικότερη τοπογραφία της περιοχής ώστε να είναι δυνατός αφενός ο ακριβής καθορισμός των φορτίσεων ανέμουσε συνάστηση

με τον ισχύονται κανονισμό ανεμοφόρτισης και αφετέρου η τοποθέτηση των ανοιγμάτων του κτιρίου για τον καλύτερο <<έλεγχο>> των καιρικών συνθηκών.

- ✓ Η απόσταση του κτιρίου από τα υφιστάμενα ή μελλοντικά κτίρια των όμορων οικοπέδων.

Χρήση του μεταλλικού κτιρίου

- 1 Κτήριο αποθήκευσης.
- 2 Κτήριο συναρμολόγησης βιομηχανικών προϊόντων
- 3 Κτήριο παραγωγής βιομηχανικών προϊόντων.

1. ΚΤΗΡΙΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ

- ✓ Η τάξη μεγέθους των φορτίων των δαπέδων η οποία συνήθως είναι ιδιαίτερα υψηλή
- ✓ Οι διαστάσεις και η φόρτιση των διαδρομών κίνησης οχημάτων μεταφοράς των αποθηκευμένων προϊόντων.
- ✓ Η επαρκής αντοχή των επιφανειών όπου υπάρχει κίνδυνος καταστροφών από την κίνηση, την τοποθέτηση ή και πτώση παλετών, κιβωτίων κ.α.
- ✓ Μελέτη του τελικού ελεύθερου ύψους του κτιρίου έτσι ώστε να μην παρεμποδίζει την μετακίνηση των εμπορευμάτων.
- ✓ Η κάλυψη του συνολικού ή μέρους του αποθηκευτικού χώρου με χαλύβδινο μεσοπάτωμα.
- ✓ Ο έλεγχος της συμπύκνωσης των υδρατμών έτσι ώστε να μην υπάρξει πρόβλημα με την συντήρηση και αποθήκευση των προϊόντων.

- ✓ Ο καλός φυσικός φωτισμός και αερισμός του κτιρίου, που εξασφαλίζεται από τον σωστό προσανατολισμό του κτιρίου.

2. ΚΤΗΡΙΟ ΣΥΝΑΡΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΡΟΙΟΝΤΩΝ

- ✓ Μικρότερα φορτία δαπέδου.
- ✓ Απλούστερες απαιτήσεις ελεύθερου ύψους για την κίνηση των προϊόντων.
- ✓ Καλύτερες συνθήκες φωτισμού και εξαερισμού του κτιρίου.
- ✓ Τοποθέτηση του συστήματος αγωγών και καλωδιώσεων στο επίπεδο ακριβώς πάνω από το κάτω πέλμα της χαλύβδινης στέγης.

3. ΚΤΗΡΙΟ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΡΟΙΟΝΤΩΝ

- ✓ Συνδιασμός καλού φωτισμού και άνετης κίνησης κατά μήκος της γραμμής παραγωγής.
- ✓ Άνεση κίνησης γερανογεφυρών οι οποίες είναι απαραίτητες για την μετακίνηση και ανύψωση των παραγόμενων προϊόντων.

Επιλογή στατικού συστήματος

- ✓ Τα μεταλλικά κτίρια αποθήκευσης όπου μια από τις κύριες φορτίσεις αντιστοιχεί στα φορτία του δαπέδου τους.
- ✓ Τα κτήρια παραγωγής βιομηχανικών προϊόντων όπου τα φορτία της γερανογέφυρας αποτελούν μια από τις κύριες φορτίσεις του κτιρίου.

- ▼ Οι ελαφρές χαλύβδινες στέγες όπου τα φορτία βαρύτητας σε συνδιασμό με την φόρτιση ανέμου αποτελούν την πλέον κρίσιμη φόρτιση.

Επίσης άλλα είδη απαιτήσεων της μελέτης είναι:

- Η επιλογή των φορτίσεων
- Διερεύνηση διατομών χαλύβδινων μελών διαθέσιμων στο εμπόριο.
- Έλεγχος ποιότητας κατασκευής και εκτίμηση συνθηκών εργοταξίου.



Εικόνα 25: Χαλύβδινη κατασκευή

3.3 Προϋπολογισμός εργασιών και κόστους συντήρησης:

Ολοκληρωμένος σχεδιασμός ενός χαλύβδινου κτιρίου πρέπει να περιλαμβάνει και τον υπολογισμό του ακριβούς κόστους ανέγερσης, αλλά και η πρόβλεψη του κόστους συντήρησής του. Ως παράδειγμα αναφέρονται οι λύσεις με συγκολλητές διατομές και πολύπλοκες συνδέσεις οι οποίες αντιστοιχούν σε υψηλό κόστος εργατικών, ενώ αντίθετα χρήση εν θερμό εξηλασμένων διατομών οι οποίες κυκλοφορούν στην αγορά σε συνδιασμό με απλές συνδέσεις, οδηγούν σε πιο οικονομική κατασκευή.

Επίσης λαμβάνεται μέριμνα έτσι ώστε να προβλέπεται εύκολη συντήρηση της χαλύβδινης κατασκευής. Οι κατασκευές από χάλυβα αν δεν συντηρηθούν εγκαίρως και με σωστό τρόπο έχουν πρόβλημα διάβρωσης και συνακόλουθα ασφάλειας λόγω μείωσης της αντοχής, απαιτείται εξ αρχής να υπάρχει σχετική μέριμνα και να έχει διερευνηθεί το κόστος συντήρησης.



Εικόνα 26: Πολλαπλές ενώσεις χαλύβδινων δοκών τύπου <διπλό ταύ>

3.4 Η προκατασκευή ως θεμελιώδες χαρακτηριστικό των κατασκευών χάλυβα:

Οι χαλύβδινες κατασκευές συντίθεται από επιμέρους χαλύβδινα υποστηλώματα ή στην γενικότερη περίπτωση, από χαλύβδινα δομικά στοιχεία. Αμφότερα τα χαλύβδινα υποσυστήματα και μέλη αποτελούν προϊόντα τα οποία παράγονται στο εργοστάσιο και ακολούθως μεταφέρονται στο εργοτάξιο όπου συναρμολογούνται κατάλληλα προκειμένου να παραχθεί το τελικό αποτέλεσμα, το χαλύβδινο κτίριο.

Ολη η διαδικασία δόμησης εμπεριέχει ένα μεγάλο ποσοστό προκατασκευής καθώς επιμέρους τμήματα του κτιρίου προετοιμάζονται πλήρως στο εργοστάσιο και ενσωματώνονται με κατάλληλες συνδέσεις στο υπό κατασκευή κτίριο.



Εικόνα 27: Προπαρασκευασμένα κομμάτια από χάλυβα για την κατασκευή οροφής γηπέδου.



Εικόνα 28: Προπαρασκευασμένο κομμάτι από χάλυβα

3.5 Μέθοδος του γεωμετρικού χώρου:

Ως παράδειγμα της μεθόδους αυτής αναφέρεται ο σχεδιασμός ενός απλού τοίχου όπου ο λόγος του ύψους προς το πλάτος του πρέπει να ευρίσκεται κάτω από ορισμένη τιμή ώστε το αποτέλεσμα του σχεδιασμού να είναι επιτυχές και ασφαλές. Η διαδικασία σχεδιασμού συμπληρωνόταν από μια **διαδικασία δοκιμής κατά λάθος (trial and error procedure)**, δηλαδή οι τυχόν αστοχίες κατά την διαδικασία της δόμησης απεδείκνυαν τα λάθη σχεδιασμού και οδηγούσαν σε διόρθωση του σχεδιασμού.

Η μέθοδος των επιτρεπόμενων τάσεων:

Όλοι σχεδόν οι κανονισμοί από της αρχές του εικοστού αιώνα μέχρι και την δεκαετία του '60 είχαν ως βάση υπολογισμού τη **μέθοδο των επιτρεπόμενων τάσεων** (allow able stress method). Βασιζόταν δηλαδή στην αρχή ότι οι τάσεις οι οποίες αναπτύσσονται από τα ονομαστικά ή χαρακτηριστικά φόρτια σχεδιασμού δεν πρέπει να ξεπερνούν την τιμή μιας επιτρεπόμενης τάσης η οποία αντιστοιχεί στην

τάση αστοχίας (failure stress) διαιρεμένη με έναν **συντελεστή ασφάλειας** (safety factor) μέσω του οποίου καλύπτονται σε ικανοποιητικό βαθμό προς την πλευρά της ασφάλειας τυχόν αβεβαιότητες φορτίσεων, ποιότητας υλικών, ανεπιθύμητων αποκλίσεων κατά την ανέγερση κ.ο.κ.

Με την μέθοδο αυτή, κάθε μέλος ελέγχεται για έναν αριθμό διαφορετικών **συνδυασμών φορτίσεων** (loading combinations) διότι κάποιες από αυτές μεταβάλλονται ως προς τον χρόνο, οπότε θα ήταν υπερβολικά αντικοινωνικό και συντηρητικό να ληφθούν υπο΄ ψιν ταυτόχρονα όλες οι φορτίσεις να δρουν με τις μέγιστες τιμές τους και ταυτόχρονα να διατηρείται ο ίδιος συντελεστής ασφάλειας.



Εικόνα 29: Παραμόρφωση δοκού ύστερα από επιβολή φορτίων

Η μέθοδος των επιτρεπόμενων τάσεων έχει στην εφαρμογή της σοβαρούς περιορισμούς. Σε μια σειρά σύνθετων εντατικών καταστάσεων (π.χ. στις συνδέσεις), η κατανομή των ελαστικών τάσεων μπορεί να υπολογιστεί μόνον με τη χρήση προηγμένου λογισμικού Η.Υ. Επιπλέον, όπου υπάρχει εμφάνιση φαινομένων λογισμού, παρόλο που το υλικό πιθανόν συμπεριφέρεται ελαστικά, το δομικό στοιχείο συμπεριφέρεται μη γραμμικά. Επίσης, στα μέλη χάλυβα μπορούν να αναπτυχθούν υψηλές ελαστικές τάσεις μέσω πλαστικοποίησης τοπικά σε κάποια σημεία τους οπότε είναι πιθανόν να προκληθεί ανακατανομή της έντασης. Λόγω των παραπάνω, η αντοχή χαλύβδινων στοιχείων μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της μεθόδου επιτρεπόμενων τάσεων μόνο υπό την προϋπόθεση ότι αυτή έχει τροποποιηθεί κατάλληλα.



Εικόνα 30: Χαλύβδινα δοκίμια παραμορφωμένα ύστερα απο δοκιμή σε εφελκυσμό

Η μέθοδος σχεδιασμού οριακών καταστάσεων:

Οριακές καταστάσεις (limit states) αποτελούν εκείνες οι συνθήκες πέραν των οποίων μια κατασκευή θεωρείται ότι παύει να πλήρη τους στόχους για τους οποίους έχει κατασκευαστεί. Οι τυπικές περιπτώσεις στον πίνακα κατατάσσονται σε δυο γενικές κατηγορίες: τις **Οριακές Καταστάσεις Αστοχίας** και τις **Οριακές Καταστάσεις Λειτουργικότητας**. Οι πρώτες, λόγω του ότι είναι καταστροφικές καταστάσεις απαιτούν τη χρήση πιο συντηρητικού συντελεστή ασφαλείας ώστε ο κίνδυνος να εμφανίσεις τους να ελαχιστοποιηθεί, ενώ οι δεύτερες αντιστοιχούν στα όρια αποδέκτης απόκρισης της κατασκευής σε κανονικές συνθήκες λειτουργίας.

Οριακές Καταστάσεις Αστοχίας (Ο.Κ.Α.)	Οριακές Καταστάσεις Λειτουργικότητας (Ο.Κ.Λ.)
Αντοχή (σε διαρροή υλικού, λογισμό, κατάρρευση)	Παραμόρφωση μέλους
Ευστάθεια σε ανατροπή και πλευρικές μετατοπίσεις	Ταλάντωση
Θράση λόγω κόπωσης	Βλάβες λόγω κόπωσης
Ψαθυρή θραύση	Διάβρωση

3.6 Αρχές διαστασιολόγησης:

Ο μηχανικός κατά τον σχεδιασμό μιας κατασκευής οφείλει να λαμβάνει υπ' όψιν ως κύρια κριτήρια σχεδιασμού, την ασφάλεια, τη λειτουργικότητα και την οικονομία. Είναι όμως ιδιαίτερα δύσκολο, αν όχι αδύνατον, να καθοριστεί κανείς με ακρίβεια πόσο οικονομικός ή πόσο ασφαλής είναι ο προτεινόμενος σχεδιασμός μιας κατασκευής. Τούτο οφείλεται σε διάφορους παράγοντες οι οποίοι δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστούν με ακρίβεια και επηρεάζουν τόσο τη ασφάλεια και τη λειτουργικότητα, όσο και τον οικονομικό σχεδιασμό της κατασκευής.

Σύμφωνα με τις επιταγές του Ευρωκώδικα 3, κατά τον σχεδιασμό μιας χαλύβδινης κατασκευής, αυτή πρέπει να ελέγχεται για την οριακή κατάσταση αστοχίας (ή αντοχής) της και για την οριακή κατάσταση λειτουργικότητας της.

Οριακή κατάσταση αστοχίας (ή αντοχής) είναι εκείνη η οριακή κατάσταση πέραν της οποίας συμβαίνει κατάρρευση ή αστοχία δομικών στοιχείων της κατασκευής.

- Ø είτε λόγω απώλειας της ισορροπίας,
- Ø είτε λόγω θραύσης, υπερβολικά μεγάλων παραμορφώσεων και απώλειας ευστάθειας λόγω φαινομένων 2^{ης} τάξης.

Οριακή κατάσταση λειτουργικότητας είναι εκείνη η οριακή κατάσταση πέραν της οποίας δεν ικανοποιούνται κριτήρια λειτουργικότητας της κατασκευής, όπως είναι

- i. η αδυναμία λειτουργίας της κατασκευής ή ο περιορισμός της χρήσης της λόγω υπερβολικά μεγάλων παραμορφώσεων, ταλαντώσεων ή ρηγματώσεων,
- ii. τα αισθητικά προβλήματα στην κατασκευή λόγω μεγάλων παραμορφώσεων,
- iii. η άνεση των χρηστών του κτιρίου κτλ

Για τον επιτυχή σχεδιασμό μιας κατασκευής από χάλυβα πρέπει να διασφαλίζεται ότι καμία οριακή κατάσταση δεν ξεπερνιέται κατά την διάρκεια λειτουργίας της κατασκευής. Ταυτόχρονα πρέπει επίσης να διασφαλίζονται όλοι εκείνοι οι παράγοντες οι οποίοι εγγυώνται τόσο την **ανθεκτικότητα στον χρόνο** (durability) της κατασκευής καθ' όλη την διάρκεια της ζωής της, όσο και την ασφαλή απόκριση της σε περίπτωση πυρκαγιάς.



Εικόνα 31: Αστοχία χαλύβδινων βεργών και συνεπώς, του σκυροδέματος

3.7 Η έννοια της ασφαλείας στις χαλύβδινες κατασκευές:

Ο σχεδιασμός, αλλά και η ανέγερση μιας χαλύβδινης κατασκευής πρέπει να γίνεται πάντοτε με τέτοιο τρόπο ώστε το έργο να παραμείνει κατάλληλο για χρήση σε όλη την διάρκεια της μεθόδου λειτουργίας του, να είναι ικανό να φέρει τα φορτία τα οποία θα εμφανιστούν κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του αλλά και κατά την φάση ανέγερσής του, να είναι οικονομικό ως κατασκευή και να έχει προληφθεί ο περιορισμός της έκτασης βλαβών από τυχηματικά φορτία και τυχηματικούς καταναγκασμούς.

3.8 Οι κατηγορίες δράσεων και οι επιμέρους συντελεστές ασφαλείας:

Στον Ερωκωδικα 1, ως **δράσεις** (actions) F θεωρούνται τα εξωτερικά φορτία ή οι καταναγκασμοί (π.χ. η θερμοκρασιακή μεταβολή) οι οποίοι επιβάλλονται στην κατασκευή και αποτελούν το αίτιο ανάπτυξης των εσωτερικών δυνάμεων σ' αυτήν. Οι χαρακτηριστικές τιμές των δράσεων καθορίζονται στον Ερωκωδικα 1. Στη μελέτη όμως μιας κατασκευής από χάλυβα επιτρέπεται η υιοθέτηση από τον μηχανικό σε συνεργασία με τον κύριο του έργου και υψηλότερων τιμών, αρκεί αυτές να είναι μεγαλύτερες των ελαχίστων οι οποίες επιβάλλονται από τον Ερωκωδικα 1 ή από ειδικές διατάξεις των Αρχών του κράτους. Αυτές οι χαρακτηριστικές τιμές των

δράσεων προκειμένου να χρησιμοποιηθούν σωστά στην ανάλυση των κατασκευών χάλυβα (για να ληφθεί δηλαδή υπόψη ο στοχαστικός χαρακτήρας τους) πολλαπλασιάζονται με τους αντίστοιχους επιμέρους συντελεστές ασφαλείας των οποίων η τιμή εξαρτάται από:

- τη συγκεκριμένη οριακή κατάσταση η οποία ελέγχεται,
- τη μεταβλητή στην οποία εφαρμόζονται, και
- από το εάν μια δράση είναι επιβαρυντική ή ελαφρυντική.

Οι δράσεις χωρίζονται στις εξής βασικές κατηγορίες:

- i. τις μεταβλητές ως προς το χρόνο,
- ii. τις μεταβλητές ως προς το χώρο και
- iii. ανάλογα με την φύση τους.

1) Ανάλογα με τη μεταβολή τους ως προς τον χρόνο, οι δράσεις διακρίνονται σε:

- μόνιμες δράσεις G (π.χ. ίδιον βάρος φορέα αμετάβλητο χρονικά),
- μεταβλητές δράσεις Q (π.χ. άνεμος, χιόνι, ωφέλιμο φορτίο χρήσης), και
- τυχηματικές δράσεις A (π.χ. σεισμικά φορτία, φορτία πρόσκρουσης οχήματος, φορτία από έκρηξη).

2) Ανάλογα με την μεταβολή τους ως προς το χώρο, οι δράσεις διακρίνονται σε:

- αμετακίνητες δράσεις ή δράσεις σταθερής θέσης (π.χ. ίδιον βάρος) και
- κινητές δράσεις ή δράσεις μεταβλητής θέσης (π.χ. κινητά φορτία, φορτία από γερανογέφυρες, άνεμος, χιόνι).

3) Ανάλογα με τη φύση τους, οι δράσεις διακρίνονται σε:

- στατικές και
- δυναμικές.



Εικόνα 32: Τοποθέτηση χάλυβα σε κατασκευή

Συνδυασμοί των δράσεων για τις οριακές καταστάσεις:

Για κάθε περίπτωση φόρτισης, η ολική συνιστάμενη των δράσεων σχεδιασμού προκύπτει από τους κατάλληλους συνδυασμούς των επιμέρους τιμών δράσεων σχεδιασμού.

Συνδυασμοί των δράσεων για οριακές καταστάσεις αστοχίας:

Για οριακές καταστάσεις αστοχίας, η γενική μορφή συνδυασμού των δράσεων δίνεται από τη σχέση:

$$\sum_j \gamma_{G,j} G_{k,j} + \gamma_{Q,1} Q_{k,1} + \sum_{i>1} \gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i}$$

Όπου $G_{k,j}$ οι χαρακτηριστικές τιμές των μόνιμων δράσεων, $Q_{k,1}$ η χαρακτηριστική τιμή μιας των μεταβλητών δράσεων, $Q_{k,i}$ οι χαρακτηριστικές τιμές των υπόλοιπων μεταβλητών δράσεων, $\gamma_{G,j}$ είναι ο επιμέρους συντελεστής ασφαλείας για τη μόνιμη δράση $G_{k,j}$, $\gamma_{Q,i}$ ο επιμέρους συντελεστής ασφαλείας για τη μεταβλητή δράση $Q_{k,i}$ και $\psi_{0,i}$ ο συντελεστής συνδυασμού ψ για την μεταβλητή δράση $Q_{k,i}$ ο Type equation here.ο οποίος καθορίζεται από τον Ευρωκώδικα 1, άλλους κανονισμούς ή τον κύριο του έργου.

Για οριακές καταστάσεις αστοχίας, οι επιμέρους συντελεστές ασφαλείας για τις δράσεις σε κτήρια λαμβάνουν τις εξής τιμές:

- για μόνιμες δράσεις $\gamma_{G,inf} = 1.0$ (για ανακουφιστική δράση)

$$\gamma_{G,sup} = 1.35 \text{ (για επιβαρυντική δράση)}$$

- για μεταβλητές δράσεις $\gamma_{Q,inf} = 0$ (για ανακουφιστική δράση)

$$\gamma_{Q,sup} = 1.5 \text{ (για επιβαρυντική δράση)}$$

Για τον σχεδιασμό κτιρίων, η προηγούμενη γενική σχέση οδηγεί στις ακόλουθες δυο απλοποιημένες μορφές συνδυασμού δράσεων:

- Λαμβάνοντας υπόψη μόνον τη δυσμενέστερη επιβαρυντική μεταβλητή δράση:

$$\sum_j \gamma_{G,j} G_{k,j} + \gamma_{Q,1} Q_{k,1}$$

- Λαμβάνοντας υπόψη όλες τις επιβαρυντικές μεταβλητές δράσεις:

$$\sum_j \gamma_{G,j} G_{k,j} + 0.9 \sum_{i \geq 1} \gamma_{Q,i} Q_{k,i}$$

Από τους δυο παραπάνω συνδυασμούς δράσεων χρησιμοποιείται αυτός ο οποίος δίνει τη μεγαλύτερη συνισταμένη δράση, δηλαδή $\max\{\alpha, \beta\}$.

Για τη θεώρηση των **τυχατικών δράσεων** (accidental actions) σχεδιασμού σε οριακή κατάσταση αστοχίας χρησιμοποιείται ο γενικός τύπος:

$$\sum_j \gamma_{GA,j} G_{k,j} + A_d + \Psi_{1,1} Q_{k,1} + \sum_{i \geq 1} \Psi_{2,i} Q_{k,i}$$

όπου A_d η τιμή σχεδιασμού της τυχατικής δράσης και $\gamma_{GA,j}$ ο επιμέρους συντελεστής ασφαλείας για τις μόνιμες δράσεις όταν υπάρχει και τυχατική δράση. Εκτός από την περίπτωση σεισμού, ο επιμέρους συντελεστής ασφαλείας $\gamma_{GA,j}$ επιτρέπεται στις λοιπές περιπτώσεις να λαμβάνεται για λόγους απλοποίησης ίσος με μονάδα.



Εικόνα 33: Αστοχία χάλυβα

Συνδυασμοί των δράσεων για οριακές καταστάσεις λειτουργικότητας:

Για οριακές καταστάσεις λειτουργικότητας, η γενική μορφή συνδυασμού των δράσεων δίνεται από τη σχέση:

$$\sum_j G_{k,j} + Q_{k,1} + \sum_{i>1} \Psi_{0,k} Q_{k,i}$$

για το σπάνιο συνδυασμό δράσεων,

$$\sum_j G_{k,j} + \Psi_{1,1} Q_{k,1} + \sum_{i>1} \Psi_{2,k} Q_{k,i}$$

για συχνό συνδυασμό δράσεων και

$$\sum_j G_{k,j} + \sum_{i>1} \Psi_{2,k} Q_{k,i}$$

για ημιμόνιμο συνδυασμό δράσεων.

Για λόγους απλοποίησης κατά τον σχεδιασμό κτιρίων επιτρέπεται αντί των προηγούμενων γενικών σχέσεων να υπολογίζονται οι εξής συνδυασμοί δράσεων:

γ) Λαμβάνοντας υπ' όψιν μόνον την επιβαρυντική μεταβλητή δράση:

$$\sum_j G_{k,j} + Q_{k,1}$$

δ) Λαμβάνοντας υπ' όψιν όλες τις επιβαρυντικές μεταβλητές δράσεις:

$$\sum_j G_{k,j} + 0.9 \sum_{i>1} Q_{k,i}$$

Από τους δυο προηγούμενους συνδυασμούς δράσεων χρησιμοποιείται αυτός ο οποίος δίνει τη μεγαλύτερη συνισταμένη δράση, δηλαδή $\max\{(N), (D)\}H$.

Εκτός ειδικών περιπτώσεων, οι τιμές των επιμέρους συντελεστών ασφαλείας γ_M λαμβάνονται ίσες προς 1.0 για όλες τις καταστάσεις λειτουργικότητας.

Κεφάλαιο 4^ο Εφαρμογές των Πεπερασμένων Στοιχείων σε Μεταλλικές Κατασκευές

4.1 Γενικές πληροφορίες για τα πεπερασμένα στοιχεία

Υπάρχουν διαφορετικοί μέθοδοι (ή διαφορετικές φιλοσοφίες) για την ανάπτυξη της θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων.

Στο παρόν βιβλίο αναπτύσσονται οι παρακάτω δύο μέθοδοι:

◆ Η ενεργειακή μέθοδος, βασίζεται στην ολική δυναμική ενέργεια του σώματος (ή της κατασκευής) (total potential energy), μαζί με την μέθοδο των μετατοπίσεων, την οποία θα αναπτύξουμε στα επόμενα κεφάλαια. Η μέθοδος είναι απλή και δεν απαιτεί την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων και χρησιμοποιείται σε όλα τα κεφάλαια.

Επίσης στα προβλήματα της μεταφοράς θερμότητας χρησιμοποιείται η ενεργειακή μέθοδος, όταν υπάρχει η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας, η οποία μετονομάζεται και λέγεται συναρτησιακή ενέργεια (functional) Η ενεργειακή μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί, όταν υπάρχει η δυνατότητα να εκφρασθεί η ολική δυναμική ενέργεια του προβλήματος στα στερεά ή η functional στα προβλήματα της μεταφοράς θερμότητας. Αν δεν γνωρίζουμε την ολική δυναμική ενέργεια, τότε χρησιμοποιούνται άλλοι μέθοδοι, όπως η μέθοδος του Galerkin.

◆ Η μέθοδος του Galerkin ανήκει στην γενική κατηγορία των Σταθμικών Υπολοίπων (methods of Weighted Residuals). Η μέθοδος Galerkin είναι γενική, δυνατή και εφαρμόζεται απ' ευθείας στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων. Στο κεφάλαιο 11 χρησιμοποιείται η μέθοδος του Galerkin για τον υπολογισμό των προβλημάτων της θερμότητας καθώς και του προβλήματος της στρέψης ράβδου με τυχαία διατομή.

Ο τρόπος επίλυσης προβλημάτων με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων είναι σχεδόν ο ίδιος σε όλες τις περιοχές που εφαρμόζεται. Για παράδειγμα για την επίλυση μιας κατασκευής σχεδιάζουμε πρώτα την κατασκευή κατόπιν την χωρίζουμε σε μικρά γεωμετρικά σχήματα π.χ. τρίγωνα ή τετράπλευρα, τα οποία λέγονται

πεπερασμένα στοιχεία. Οι ιδιότητες του υλικού και οι εξισώσεις που χαρακτηρίζουν το υλικό εξετάζονται στα πεπερασμένα στοιχεία σαν συνάρτηση των αγνώστων μετατοπίσεων στις κορυφές του πεπερασμένου στοιχείου (μέθοδος των μετατοπίσεων). Λαμβάνουμε υπ' όψιν τις οριακές συνθήκες καθώς και τα φορτία (μηχανικά και θερμικά) και καταλήγουμε στις εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής.

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων ως προς τους αγνώστους, οι οποίοι είναι οι κομβικές μετατοπίσεις είναι η ζητούμενη προσεγγιστική λύση. Γνωστών των κομβικών μετατοπίσεων υπολογίζονται στα διάφορα σημεία της κατασκευής οι τάσεις (σ), οι παραμορφώσεις (ϵ) και οι αντιδράσεις (R) των στηρίξεων.

Λόγοι ανάπτυξης της μεθόδου

Προβλήματα που δεν μπορούσαν να τα αγγίξουν οι επιστήμονες έως τώρα και τα θεωρούσαν άλυτα, με την χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή (H/Y) και των υπολογιστικών μεθόδων όπως των πεπερασμένων στοιχείων τα λύνουν σε μικρό χρόνο.

Στις Ηνωμένες πολιτείες της Αμερικής, στην Ευρώπη, και στις ανεπτυγμένες χώρες, η βιομηχανία, ο στρατός και το κράτος χρηματοδοτούν τα ανώτατα ιδρύματα, τα ερευνητικά κέντρα και τις ερευνητικές εταιρείες, με σκοπό την ανάπτυξη προγραμμάτων.

Η ανάγκη της βιομηχανίας και των προβλημάτων της πράξης, οδήγησε την ανάπτυξη γραφικών προγραμμάτων, τα οποία συνοδεύουν την ανάλυση-υπολογισμό που παρέχουν τα πεπερασμένα στοιχεία. Ο συνδυασμός των γραφικών με την ανάλυση-υπολογισμό των πεπερασμένων στοιχείων υψώνουν την επιστήμη, την απλοποιούν, την κάνουν προσιτή και δημιουργική (state of the art).

Προϊόν της συστηματικής εργασίας των ερευνητών είναι η ανάπτυξη των εμπορικών προγραμμάτων για τον H/Y. Τα εμπορικά προγράμματα αποτελούνται από δύο μεγάλα προγράμματα: Τα γραφικά και την ανάλυση.

α) Γραφικά προγράμματα

Τα γραφικά προγράμματα χρησιμοποιούνται πρίν από την ανάλυση και μετά την ανάλυση

- Pre-proccesing. Με την χρήση του γραφικού προγράμματος το σώμα ή η κατασκευή σχεδιάζεται και κατόπιν διακριτοποιείται στα πεπερασμένα στοιχεία.
- Post-proccesing. Μετά την ανάλυση γίνονται γραφικές παραστάσεις των αποτελεσμάτων όπως είναι η παραμόρφωση του σώματος, η διανομή των τάσεων εντός του σώματος και άλλων.

β) Πρόγραμμα για την ανάλυση-υπολογισμό

Το πρόγραμμα της ανάλυσης χρησιμοποιείται για την μελέτη ποικίλων προβλημάτων που μπορεί να αφορούν την μηχανική των στερεών ή των κατασκευών, στα ρευστά, στην θερμότητα, στην ακουστική, στην κατεργασία των μετάλλων, στον ηλεκτρισμό και ηλεκτρομαγνητισμό και σε πολλές άλλες περιοχές.

Όλα τα ανώτατα ιδρύματα, τα ερευνητικά κέντρα, η βιομηχανία, οι τεχνικές εταιρείες, οι μηχανικοί της πράξης, οι προ-πτυχιακοί και οι μεταπτυχιακοί φοιτητές, χρησιμοποιούν εμπορικά προγράμματα για τον Η/Υ όπως για παράδειγμα είναι τα παρακάτω:

ANSYS, ABAQUS, NASTRAN,

MARC, ADINA, SAP90 COSMOS

Για την μοντελοποίηση (ή προσομοίωση) προβλημάτων. Τα προγράμματα παρέχουν υπορουτίνες (subroutines), ώστε ο χρήστης να μπορεί να προσθέσει το δικό του πρόγραμμα συνήθως σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN Ή C για να προσθέσει πληροφορίες που δεν υπάρχουν στο εμπορικό πρόγραμμα, όπως για

παράδειγμα να τροποποιήσει, να βελτιώσει ή να προσθέσει νέες καταστατικές εξισώσεις (constitutive equations).

Υπάρχουν επίσης ειδικά προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων, όπως για παράδειγμα είναι τα παρακάτω:

HITCAN (Metal matrix composites analyzer) και

CODSTRAN (polymer composites analyzer)

τα οποία έχουν αναπτυχθεί στο ερευνητικό κέντρο NASA Glenn (Lewis) Research Center, Cleveland, Ohio, USA υπό την επίβλεψη και δημιουργού αυτών Dr. Christos C. Chamis. Τα προγράμματα αυτά, χρησιμοποιούν τα πεπερασμένα στοιχεία και την μηχανική των συνθέτων υλικών.

Γιατί πρέπει να γνωρίζουμε τα πεπερασμένα στοιχεία;

Η θεωρητική γνώση των πεπερασμένων στοιχείων βοηθά να αναπτύξει ο φοιτητής, ο ερευνητής ή ο μηχανικός της πράξης την αυτοπεποίθηση και την ικανότητα να λύνει, να λειτουργεί και να ερμηνεύει σωστά τα αποτελέσματα που λαμβάνει από ένα πρόγραμμα, και αν χρειασθεί να γράψει το δικό του πρόγραμμα.

4.2 Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Το 1909 ο Γερμανός μαθηματικός Ritz ανέπτυξε τις αρχές της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Το 1915 ο Ρώσος μαθηματικός Galerkin ανέπτυξε σε βάθος την θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων. Η απουσία του ηλεκτρονικού υπολογιστή καθυστέρησε την διάδοση και περαιτέρω ανάπτυξη της μεθόδου και παρέμεινε στάσιμη μέχρι της ανακάλυψης του υπολογιστή. Με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή η μέθοδος έγινε γνωστή και διαδόθηκε στους ερευνητές. Η ιδέα της ανάπτυξης της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων γεννήθηκε στην αεροναυπηγική από την ανάγκη της εύρεσης λύσης στα δύσκολα προβλήματα που

αντιμετώπιζαν στην κατασκευή των αεροσκαφών. Το 1941 ο Hrenikoff εισήγαγε την καλούμενη framework method (μέθοδο του πλαισίου) με την οποία ένα επίπεδο ελαστικό μέσο μπορούσε να αντικατασταθεί με ένα ισοδύναμο σύστημα ράβδων και δοκών. Το 1943 ο Γερμανός μαθηματικός Courant έλυσε το πρόβλημα της στρέψης χρησιμοποιώντας τριγωνικά στοιχεία με την αρχή της ελαχίστης δυναμικής ενέργειας (minimum potential energy) και την ονόμασε Rayleigh-Ritz μέθοδο. Επειδή τότε δεν υπήρχε ο ηλεκτρονικός υπολογιστής, η θεωρία του Courant δεν μπορούσε να εφαρμοσθεί και ξεχάστηκε μέχρι που ανακαλύφθηκε ο υπολογιστής και οι επιστήμονες ξανά θεμελίωσαν την μέθοδο. Το 1955 ο Έλληνας Ι. Αργύρης έγραψε ένα βιβλίο με θέμα 'Ενεργειακά θεωρήματα και η μέθοδος των μητρώων' και εισήγαγε τις αρχές των πεπερασμένων στοιχείων.

Το 1956 οι Αμερικανοί Turner, Clough, Martin και Top υπολόγισαν το μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου και άλλων στοιχείων. Το 1960 ο Ι. Αργύρης και ο Kelsey δημοσίευσαν την εργασία τους η οποία βασιζόταν στις αρχές των πεπερασμένων στοιχείων.

Από τότε ένας μεγάλος αριθμός δημοσιεύσεων και βιβλίων ακολούθησε με αντικείμενο την εφαρμογή των πεπερασμένων στοιχείων στην μηχανική, στα ρευστά, τη θερμότητα, την ακουστική, την κατεργασία των μετάλλων, τον ηλεκτρισμό και ηλεκτρομαγνητισμό και σε πολλές άλλες επιστήμες.

4.3 Η ΟΛΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.

α) Σύστημα ελατηρίων

Η δυναμική ενέργεια Π ενός συστήματος είναι:

$$\Pi = U - W \quad (1.4.1)$$

όπου : U = η ενέργεια παραμόρφωσης

W = το εξωτερικό μηχανικό έργο

Για παράδειγμα ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου K , στηρίζεται στο ένα άκρο και στο άλλο άκρο ασκείται δύναμη P . Λόγω του φορτίου το ελατήριο επιμηκύνεται κατά x , και έχουμε

$$U = \frac{1}{2}(Kx)x = \frac{Kx^2}{2},$$

$$W = Px$$

$$\text{και } \Pi = \frac{Kx^2}{2} - Px.$$

Συντηρητικό λέγεται ένα σύστημα όταν το μηχανικό έργο που παράγεται είναι ανεξάρτητο από τον δρόμο που απαιτείται να πάει από την αρχική θέση A, στην τελική θέση B.

Η αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας είναι: Σε ένα συντηρητικό σύστημα, από το πλήθος των επιτρεπτών μετατοπίσεων, εκείνες που αντιστοιχούν στην ισορροπία του συστήματος ελαχιστοποιούν την ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος.

Έστω x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι οι μετατοπίσεις ενός συστήματος οι οποίες εκφράζουν και τους βαθμούς ελευθερίας. Το σύστημα λέμε ότι είναι σε ισορροπία όταν η ολική ενέργεια του συστήματος $\Pi(x)$ γίνει ελάχιστη. Το $\Pi(x)$ γίνεται ελάχιστο όταν είναι:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{εξισώσεις ισορροπίας} \quad (1.4.2)$$

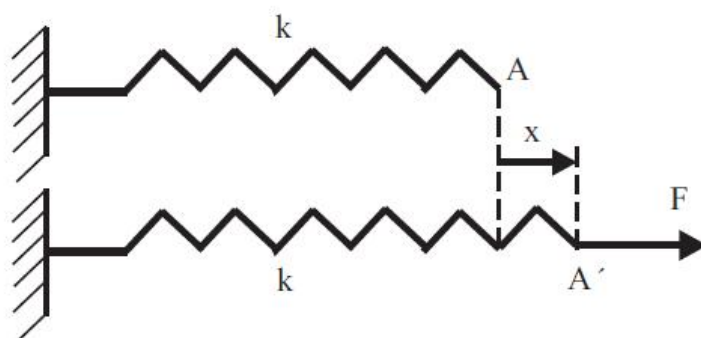
Οι n εξισώσεις της (1.4.2) αποτελούν τις εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος, οι οποίες υπό μορφή μητρώου είναι:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{εξισώσεις ισορροπίας} \quad (1.4.3)$$

Παράδειγμα 1.1: Ένα ελατήριο με σταθερά δύναμη F

Δίδεται ένα ελατήριο με σταθερά k , και εφαρμόζεται μια δύναμη F στο

ελεύθερο άκρο του, σχήμα Π1.1 Να ευρεθεί η εξίσωση ισορροπίας του συστήματος.



Σχήμα Π1.1 Ελατήριο με σταθερή δύναμη F

Λύση

Το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας, την μετατόπιση x του ελατηρίου. Η δυναμική ενέργεια Π του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned}\Pi &= U - W \\ &= \frac{1}{2}kx^2 - xF\end{aligned}$$

Η δυναμική ενέργεια Π γίνεται ελάχιστη όταν ελαχιστοποιήσουμε την Π ως προς το x και είναι

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0 \tag{\alpha}$$

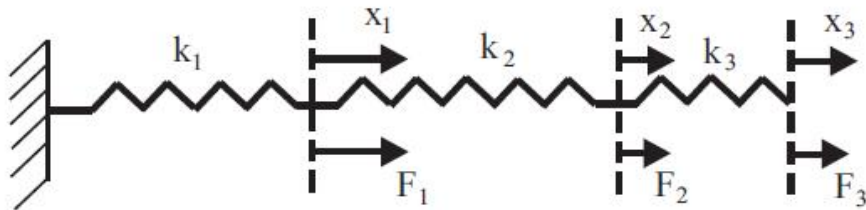
Η εξίσωση ισορροπίας προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση (α) και είναι:

$$kx - F = 0 \quad \text{ή} \quad kx = F$$

είναι η εξίσωση ισορροπίας του συστήματος.

Παράδειγμα 1.2: Τρία ελατήρια στη σειρά

Να υπολογισθούν οι εξισώσεις ισορροπίας και οι μετατοπίσεις x_1 , x_2 και x_3 , του συστήματος των ελατηρίων σχήμα Π1.2. Δίνονται οι σταθερές των ελατηρίων k_i από $i = 1, 2, 3$ και τα συγκεντρωμένα φορτία F_1 , F_2 και F_3 .



Σχήμα Π1.2 Τρία ελατήρια στην σειρά

Λύση

Το σύστημα έχει 3 βαθμούς ελευθερίας, τις μετατοπίσεις x_1 , x_2 και x_3 .
Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$\Pi = U - W$$

$$\begin{aligned} \text{ή } \Pi &= \frac{1}{2}k_1x_1^2 - x_1F_1 && \text{(το ελατήριο } k_1, \text{ έχει ολική επιμήκυνση } x_1) \\ &+ \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 - x_2F_2 && \text{(το ελατήριο } k_2, \text{ έχει ολική επιμήκυνση } x_2 - x_1) \\ &+ \frac{1}{2}k_3(x_3 - x_2)^2 - x_3F_3 && \text{(το ελατήριο } k_3, \text{ έχει ολική επιμήκυνση } x_3 - x_2) \end{aligned}$$

Η δυναμική ενέργεια Π γίνεται ελάχιστη όταν ελαχιστοποιήσουμε την Π ως προς τους 3 βαθμούς ελευθερίας x_1 , x_2 και x_3 και είναι:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας προκύπτουν από το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων και είναι:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = k_1 - k_2(x_2 - x_1) - F_1 = (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 - F_1 = 0$$

$$\text{ή } (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1 \quad (\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} &= k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_3 - x_2) - F_2 = \\ &= -k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 - F_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ή } -k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 = F_2 \quad (\beta)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_3} = k_3(x_3 - x_2) - F_3 = 0$$

$$-k_3x_2 + k_3x_3 = F_3 \quad (\gamma)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας (α), (β) και (γ) υπό μορφή μητρώων είναι

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{ή } \mathbf{K D} = \mathbf{F} \quad (\delta)$$

όπου: $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$, το μητρώο δυσκαμψίας του συστήματος

Το \mathbf{K} είναι συμμετρικό μητρώο και είναι διαστάσεων 3×3 (όπου 3 είναι οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος).

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \text{ το διάνυσμα των αγνώστων μετατοπίσεων}$$

και $\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$, το διάνυσμα του εξωτερικού φορτίου,

Για να υπολογίσουμε το διάνυσμα των αγνώστων μετατοπίσεων \mathbf{D} , από το σύστημα (δ) έχουμε:

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}$$

όπου \mathbf{K}^{-1} = ο αντίστροφος πίνακας του \mathbf{K} .

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις υπολογίζονται οι μετατοπίσεις x_1 , x_2 και x_3 .

Γενική παρατήρηση

Όσον αφορά την δυναμική ενέργεια ενός συστήματος μπορεί να γραφεί υπό γενική μορφή:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{K} \mathbf{D} - \mathbf{D}^T \mathbf{F} \quad (1.4.4)$$

όπου: \mathbf{K} είναι το μητρώον δυσκαμψίας,

\mathbf{D} είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων και

\mathbf{F} είναι το διάνυσμα των εξωτερικών φορτίων της κατασκευής.

Από την μερική παραγωγήιση

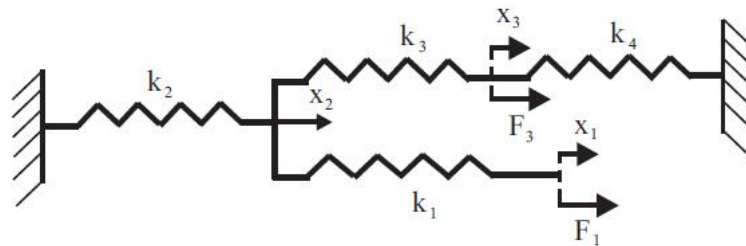
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}} = 0 \quad (1.4.5)$$

καταλήγουμε στις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\mathbf{K} \mathbf{D} = \mathbf{F} \quad (1.4.6)$$

Παράδειγμα 1.3: Σύστημα ελατηρίων

Να υπολογισθούν οι εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής σχήμα Π1.3. Δίνονται οι σταθερές των ελατηρίων k_i από $i = 1, 2, 4$ και τα συγκεντρωμένα φορτία F_1 και F_3 .



Σχήμα Π1.3 Σύστημα ελατηρίων

Λύση

Το σύστημα έχει 3 βαθμούς ελευθερίας, τις μετατοπίσεις x_1 , x_2 και x_3 . Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$\Pi = U - W$$

Η ενέργεια παραμόρφωσης του συστήματος U είναι το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των τεσσάρων ελατηρίων

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

όπου $U_1 = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_2)^2$ (το ελατήριο k_1 , έχει ολική επιμήκυνση $x_1 - x_2$)

$$U_2 = \frac{1}{2} k_2 x_2^2 \quad (\text{το ελατήριο } k_2, \text{ έχει ολική επιμήκυνση } x_2)$$

$$U_3 = \frac{1}{2} k_3 (x_3 - x_2)^2 \quad (\text{το ελατήριο } k_3, \text{ έχει ολική επιμήκυνση } x_3 - x_2)$$

$$U_4 = \frac{1}{2} k_4 x_3^2 \quad (\text{το ελατήριο } k_4, \text{ έχει ολική επιμήκυνση } x_3)$$

Το έξωτερο έργο είναι

$$W = x_1 F_1 + x_3 F_3$$

Η δυναμική ενέργεια Π γίνεται

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k_3(x_3 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_4x_3^2}_{U} - \underbrace{x_1F_1 - x_3F_3}_W$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος υπολογίζονται από τις μερικές παράγωγους της Π ως προς τους 3 βαθμούς ελευθερίας x_1 , x_2 και x_3 και είναι:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Έχουμε:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = k_1(x_1 - x_2) - F_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -k_1(x_1 - x_2) + k_2x_2 - k_3(x_3 - x_2) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_3} = k_3(x_3 - x_2) + k_4x_3 - F_3 = 0$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας υπό μορφή μητρώων είναι:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K} \ 3 \times 3} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{D} \ 3 \times 1} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F} \ 3 \times 1} \quad (\alpha)$$

Οι άγνωστες μετατοπίσεις x_1 , x_2 και x_3 υπολογίζονται από την λύση του συστήματος (α).

Παρατηρούμε ότι το μητρώο \mathbf{K} του συστήματος είναι συμμετρικό της τάξεως 3×3 , όπου 3 είναι οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος.

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} - [E] \{\varepsilon_0\} + \{\sigma_0\} \quad (1.4.7)$$

όπου $\{\sigma\} = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]^T$ οι τάσεις

$[E]$ = το μητρώο ελαστικότητας ή το μητρώο του υλικού είναι συμμετρικό μητρώο, διαστάσεων 6×6

$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}]^T$ οι παραμορφώσεις $\{\varepsilon_0\}$ οι αρχικές παραμορφώσεις και

β) Ελαστικό σώμα

Σε ένα σώμα όταν ασκούνται φορτία, αναπτύσσονται τάσεις και παραμορφώσεις. Θεωρούμε ότι το σώμα έχει συμπεριφορά ελαστική και γραμμική και αποτελείται από ισότροπο υλικό. Η σχέση της τάσης-παραμόρφωσης (σ - ε), σε ένα σημείο εντός του σώματος (Κεφάλαιο 2) είναι:

$\{\sigma_0\}$ οι αρχικές τάσεις (residual stresses) π.χ. λόγω θερμικής καταργασίας μετάλλου

Η ολική ενέργεια παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου είναι

$$U_0 = \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} \left(\frac{\text{έργο}}{\text{όγκο}} \quad \text{ή} \quad \frac{F \cdot L}{L^3} \right) \quad (1.4.8)$$

και εκφράζει το έργο των εσωτερικών τάσεων και αποταμιεύεται σαν ενέργεια σε ένα ελαστικό σώμα.

Η μεταβολή της dU_0 είναι:

$$dU_0 = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon\} = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} d\gamma_{zx}$$

Παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση και έχουμε:

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x, \quad \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y, \quad \dots, \quad \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{zx}} = \tau_{zx}$$

Υπό μορφή μητρώων είναι:

$$\left\{ \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon} \right\} = \{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} - [E] \{\varepsilon_0\} + \{\sigma_0\}$$

Ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση ως προς την μεταβλητή $\{\varepsilon\}$ και έχουμε:

$$U_o = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_o\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_o\} \quad (1.4.9)$$

Η ολική ενέργεια παραμόρφωσης του σώματος όγκου V είναι

$$\begin{aligned} U &= \int_V U_o dV \\ &= \int_V \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_o\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_o\} \right) dV \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Το εξωτερικό έργο W δημιουργείται από τα εξωτερικά φορτία που ασκούνται επί του σώματος όγκου V και είναι

$$W = \int_V \{u\}^T \{F\} dV + \int_S \{u\}^T \{T\} dS + \{D\}^T \{P\} \quad (1.4.11)$$

Όπως για παράδειγμα οι δυνάμεις της βαρύτητας και οι φυγοκεντρικές

δυνάμεις:

όπου $\{u\}^T = [u \ v \ w]$ οι μετατοπίσεις ενός σημείου ως προς τους άξονες X, Y και Z και είναι $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ και $w = w(x, y, z)$

$\{F\} = [F_x \ F_y \ F_z]^T$ οι δυνάμεις πεδίου (δύναμη ανά όγκο, $\frac{F}{L^3}$),

Όπως για παράδειγμα οι δυνάμεις της βαρύτητας και οι φυγοκεντρικές δυνάμεις:

$\{T\} = [T_x \ T_y \ T_z]^T$ οι δυνάμεις επιφανείας (δύναμη ανά επιφάνεια, $\frac{F}{L^2}$)

S = εμβαδόν επιφανείας σώματος

$\{P\}$ = συγκεντρωμένο φορτίο στους κόμβους (μονάδα δύναμη, F)

$\{D\}$ οι κομβικές μετατοπίσεις (μονάδα μήκος, L)

Η ολική δυναμική ενέργεια Π δίνεται από την εξίσωση (1.4.1) είναι:

$$\Pi = U - W$$

$$\text{ή} \quad \Pi = \int_V U_o dV - W$$

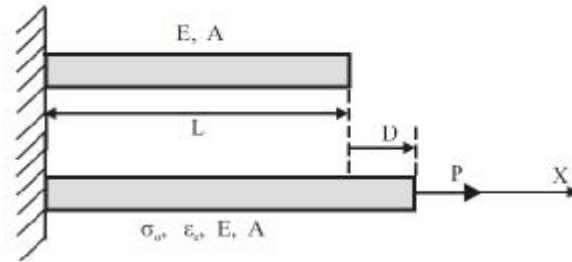
$$= \int_V \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_o\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_o\} \right) dV -$$

$$- \int_V \{u\}^T \{F\} dV - \int_S \{u\}^T \{T\} dS - \{D\}^T \{P\} \quad (1.4.12)$$

Η εξίσωση (1.4.12) είναι γενική και θα την χρησιμοποιήσουμε στα περισσότερα κεφάλαια του βιβλίου. Ακολουθούν παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.4: Ράβδος με αξονικό φορτίο και με προϋπάρχουσες σ_o και ε_o

Δίδεται η ράβδος του σχήματος Π1.4, με εμβαδόν διατομής A, μέτρο ελαστικότητας E και μήκος L. Στο ελεύθερο άκρο ασκείται συγκεντρωμένο φορτίο P κατά την αξονική κατεύθυνση της ράβδου. Η ράβδος έχει προϋπάρχουσα τάση (residual stress) σ_o και ανηγμένη παραμόρφωση ε_o . Να υπολογισθεί η επιμήκυνση D στο άκρο της ράβδου, καθώς και η αναπτυσσόμενη τάση σ_x .



Σχήμα Π1.4 Ράβδος με αρχική παραμόρφωση ε_0 , αρχική τάση σ_0 (residual stress) και με αξονικό φορτίο P.

Λύση

Η ολική δυναμική ενέργεια της ράβδου δίνεται από την (1.4.15) και είναι:

$$\Pi = \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon^T E \varepsilon - \varepsilon^T E \varepsilon_0 + \varepsilon^T \sigma_0 \right) dV - DP \quad (1)$$

Αντικαθιστούμε όπου $\varepsilon_x = D / L$ στην (1) και έχουμε

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_V \left(\frac{1}{2} \frac{D^2}{L^2} E - \frac{D}{L} E \varepsilon_0 + \frac{D}{L} \sigma_0 \right) dV - DP \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{D^2}{L^2} E - \frac{D}{L} E \varepsilon_0 + \frac{D}{L} \sigma_0 \right) AL - DP \end{aligned}$$

Η εξίσωση ισορροπίας προκύπτει από τη σχέση

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D} = 0$$

$$\text{ή} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial D} = \left(\frac{1}{2} \frac{2DE}{L^2} - \frac{1}{L} E \varepsilon_0 + \frac{1}{L} \sigma_0 \right) AL - P = 0$$

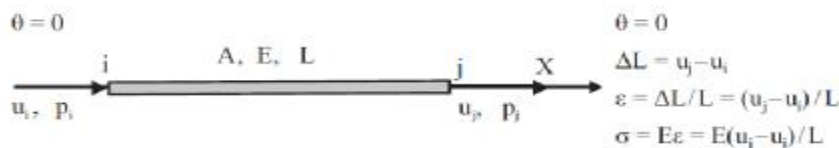
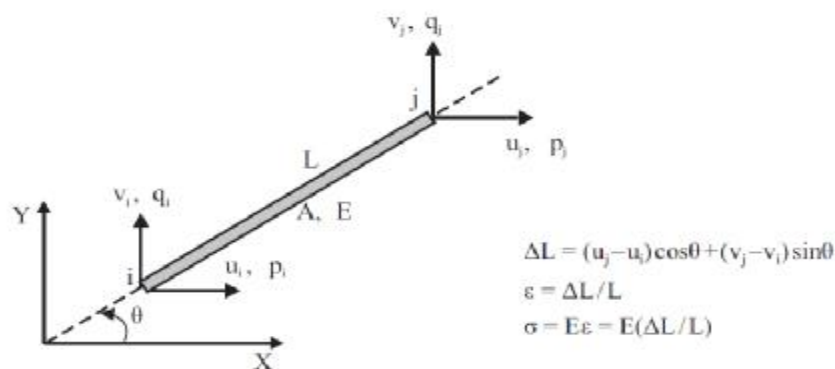
$$\text{ή} \quad D = \frac{PL}{AE} + L \varepsilon_0 - \frac{L \sigma_0}{E}$$

Η τάση σ_x δίδεται από την σχέση (1.4.7)

$$\sigma_x = E \varepsilon - E \varepsilon_0 + \sigma_0 = E \frac{D}{L} - E \varepsilon_0 + \sigma_0 = \frac{P}{A}$$

Παράδειγμα 1.5: Ράβδος δικτυώματος

Στη ράβδο δικτυώματος ij ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις σχήμα Π1.5α. Στον κόμβο i ασκούνται οι δυνάμεις p_i και q_i , και στον κομβο j οι δυνάμεις p_j και q_j . Δίδονται τα εξής στοιχεία της ράβδου: το μήκος L , η διατομή A , το μέτρο ελαστικότητας E , η γωνία θ και ο συντελεστής θερμικής διαστολής α .



Σχήμα Π1.5 Ράβδος δικτυώματος α) σε γωνία θ και β) σε γωνία $\theta=0$.

α) Να ευρεθούν:

- οι εξισώσεις ισορροπίας,
- το μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου
- οι κομβικές μετατοπίσεις u_i , v_j , u_j και v_j και
- η παραμόρφωση και η τάση.

β) Όταν η γωνία είναι $\theta=0$ να ευρεθούν

- το μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου,
- η παραμόρφωση και η τάση.

γ) Όταν είναι $\theta=0$ και επιπλέον των μηχανικών φορτίων έχουμε μεταβολή της θερμοκρασίας κατά T_0 βαθμούς, να ευρεθεί η παραμόρφωση και η

τάση.

Λύση

Η ράβδος έχει 4 βαθμούς ελευθερίας, γιατί υπάρχουν 4 μετατοπίσεις οι ε-
ξής: στον κόμβο i είναι οι u_i, v_i , και στον κόμβο j οι u_j και v_j , σχήμα

Π1.5α. Η ολική δυναμική ενέργεια της ράβδου είναι:

$$\Pi = U - W \quad (1)$$

όπου $W = p_i u_i + q_i v_i + p_j u_j + q_j v_j$ το εξωτερικό έργο των δυνάμεων (2)

U η εσωτερική ενέργεια της ράβδου, όγκου $V = AL$,

$$U = \sigma \cdot \varepsilon \cdot V = (E\varepsilon) \varepsilon \cdot V = \left(E \frac{\Delta L}{L} \right) \left(\frac{\Delta L}{L} \right) (AL) = \frac{AE}{2} \frac{\Delta L^2}{L} \quad (3)$$

Η μεταβολή του μήκους της ράβδου ΔL είναι

$$\Delta L = (u_j - u_i) \cos\theta + (v_j - v_i) \sin\theta = (u_j - u_i)c + (v_j - v_i)s$$

όπου $c = \cos\theta$ και $s = \sin\theta$.

Αντικαθιστούμε το ΔL στην U και είναι

$$U = \frac{AE}{2L} ((u_j - u_i)c + (v_j - v_i)s)^2 \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε την (2) και (3) στην (1) έχουμε

$$\Pi = \frac{AE}{2L} ((u_j - u_i)c + (v_j - v_i)s)^2 - p_i u_i - q_i v_i - p_j u_j - q_j v_j \quad (5)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι 4 όσοι είναι και οι βαθμοί ελευθερίας και είναι οι εξής:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_j} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v_j} = 0 \quad (6)$$

Από την (5) και (6) έχουμε:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0, \quad \frac{AE}{L}(-u_j c^2 + u_i c^2 - v_j sc + v_i sc) = p_i$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = 0, \quad \frac{AE}{2L}(-u_j cs + u_i cs - v_j s^2 + v_i s^2) = q_i$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_j} = 0, \quad \frac{AE}{L}(u_j c^2 - u_i c^2 + v_j sc - v_i sc) = p_j$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_j} = 0, \quad \frac{AE}{L}(u_j cs - u_i cs + v_j s^2 - v_i s^2) = q_j$$

Όπου $c = \cos\theta$ και $s = \sin\theta$ (7)

α) Οι παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας γράφονται υπό μορφή πινάκων

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j \\ c^2 & cs & -c^2 & -sc \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & sc \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_i \\ q_i \\ p_j \\ q_j \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$\mathbf{K}, 4 \times 4$ $\mathbf{d}, 4 \times 1$ $\mathbf{F}, 4 \times 1$

ή $\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F}$

Από την εξίσωση ισορροπίας (8) υπολογίζονται οι άγνωστες κομβικές μετατοπίσεις u_i, v_i, u_j και v_j .

Το μητρώον δυσκαμψίας \mathbf{K} είναι συμμετρικό της τάξεως 4×4 .

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j \\ c^2 & cs & -c^2 & -sc \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & sc \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad \text{όπου } c = \cos\theta \text{ και } s = \sin\theta \quad (9)$$

Παρατήρηση

Το μητρώο δυσκαμψίας (stiffness matrix) στην ελληνική βιβλιογραφία το

ονομάζουν μητρώο ακαμψίας ή και μητρώο στιβαρότητας.

Η παραμόρφωση ε είναι

$$\varepsilon = \Delta L/L = [(u_j - u_i)\cos\theta + (v_j - v_i)\sin\theta]/L$$

Η τάση σ είναι

$$\sigma = E\varepsilon = E[(u_j - u_i)\cos\theta + (v_j - v_i)\sin\theta]/L$$

β) Όταν $\theta = \theta_0$ ($c = \cos\theta_0 = 1$ και $s = \sin\theta_0 = 0$) σχήμα Π1.5, η ράβδος έχει 2 βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν στις οριζόντιες μετατοπίσεις u_i και u_j . Απαλείφουμε τις γραμμές και τις στήλες που αντιστοιχούν στις κατακόρυφες μετατοπίσεις v_i και v_j εξίσωση (8) και έχουμε

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} u_i & u_j \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Το μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου για $\theta=0^\circ$ είναι

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} u_i & u_j \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Η μεταβολή του μήκους της ράβδου ΔL είναι

$$\Delta L = u_j - u_i$$

η παραμόρφωση λόγω του συγκεντρωμένου φορτίου είναι:

$$\varepsilon = \Delta L/L = (u_j - u_i)/L$$

η τάση είναι:

$$\sigma = E\varepsilon = E(u_j - u_i)/L.$$

γ) Η παραμόρφωση ε λόγω των φορτίων και της μεταβολής της θερμοκρασίας κατά T^0 είναι:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{φορτίο}} - \varepsilon_{T^0} = (u_j - u_i)/L - \alpha T^0$$

Η τάση είναι:

$$\sigma = \sigma_{\text{φορτίο}} - \sigma_{T^0} = E(u_j - u_i)/L - E\alpha T^0.$$

4.5 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ RAYLEIGH-RITZ

Η μέθοδος του Rayleigh-Ritz είναι μια γενική μέθοδος. Στο παρόν κεφάλαιο θα εφαρμοσθεί η μέθοδος του Rayleigh-Ritz με την χρήση της ολικής δυναμικής ενέργειας.

α) Η κλασική μέθοδος του Rayleigh-Ritz

Θεωρούμε ότι έχουμε ένα σώμα (ή μια κατασκευή) που έχει ελαστική συμπεριφορά, ασκούνται δυνάμεις και θέλουμε να υπολογίσουμε τις μετατοπίσεις του σώματος. Με την κλασική μέθοδο του Rayleigh-Ritz, οι μετατοπίσεις u , v και w οι οποίες είναι παράλληλες ως προς τους άξονες X , Y και Z θεωρούμε ότι δίνονται προσεγγιστικά από τις σχέσεις:

$$u = \sum_{i=1}^l a_i f_i, \quad \text{όπου} \quad f_i = f_i(x, y, z), \quad i = 1, \dots, l \quad (1.5.1)$$

$$v = \sum_{j=1}^m b_j g_j, \quad \text{όπου} \quad g_j = g_j(x, y, z), \quad j = 1, \dots, m \quad (1.5.2)$$

$$w = \sum_{k=1}^n c_k h_k, \quad \text{όπου} \quad h_k = h_k(x, y, z), \quad k = 1, \dots, n \quad (1.5.3)$$

όπου: f_i , g_j , h_k συνήθως είναι πολυώνυμα,

a_i , b_j και c_k είναι άγνωστοι και θα υπολογισθούν παρακάτω.

Οι προσεγγιστικές λύσεις των u , v και w πρέπει να είναι κινηματικά επιτρεπτές, δηλαδή να ικανοποιούν τις κινηματικές οριακές συνθήκες (τις μετατοπίσεις).

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι της μορφής:

$$\Pi = \Pi(a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n),$$

και έχουμε τις $l+m+n$ εξισώσεις ισορροπίας:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l \quad (1.5.4\alpha)$$

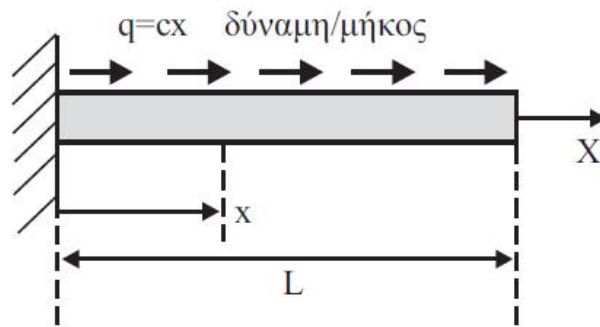
$$\frac{\partial \Pi}{\partial b_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (1.5.4\beta)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (1.5.4\gamma)$$

Από το πλήθος των $l+m+n$ εξισώσεων, υπολογίζονται οι $l+m+n$ άγνωστοι a_i , b_j και c_k .

Παράδειγμα 1.6: Rayleigh-Ritz, Μονόπακτη ράβδος

Δίδεται ράβδος μήκους L , διατομής A και μέτρου ελαστικότητας E . Η ράβδος στο ένα άκρο είναι πακτωμένη ενώ στο άλλο είναι ελεύθερη. Ασκείται φορτίο κατά μήκος της ράβδου $q = cx$ (δύναμη/μήκος) όπου c είναι μια σταθερά με μονάδες δύναμη ανά μήκος στο τετράγωνο, σχήμα Π1.6. Να υπολογισθεί η μετατόπιση και αναπτυσσόμενη τάση στην ράβδο. Η συμπεριφορά της ράβδου είναι ελαστική και γραμμική.



Σχήμα Π1.6 Ράβδος με συνεχές φορτίο.

Λύση

Η ολική δυναμική ενέργεια της ράβδου Π είναι:

$$\Pi = U - W$$

όπου: $W = \int_0^L q u \, dx$ και $q = cx$

$$U = \int_V U_0 \, dV \quad \text{η ενέργεια παραμόρφωσης} \quad (1)$$

Η U_0 είναι η ενέργεια παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου. Για την περίπτωση της ράβδου είναι:

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x = \frac{1}{2} (E \varepsilon_x) \varepsilon_x = \frac{1}{2} E \left(\frac{du}{dx} \right)^2.$$

Αντικαθιστούμε την U_0 από την παραπάνω εξίσωση στην (1) και θέτουμε όπου $dV = A dx$ έχουμε:

$$\text{Άρα } \Pi = \int_0^L \frac{1}{2} E \left(\frac{du}{dx} \right)^2 A dx - \int_0^L cxu \, dx \quad (2)$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} E \left(\frac{du}{dx} \right)^2 (A dx)$$

Σκοπός είναι να υπολογίσουμε την άγνωστη μετατόπιση u . Υποθέτουμε ότι η μετατόπιση u ορίζεται από μία συνάρτηση, και βάση αυτής λύνουμε

το πρόβλημα. Για να εφαρμοσθεί η μέθοδος του Rayleigh-Ritz, πρέπει η συνάρτηση της μετατόπισης u να είναι επιτρεπτή συνάρτηση, δηλαδή πρέπει να ικανοποιεί τις κινηματικές οριακές συνθήκες (γεωμετρικές συνθήκες), αλλά δεν υποχρεούται να ικανοποιεί τις φυσικές οριακές συνθήκες (δυνάμεις, ροπές, τάσεις). Θα εξετάσουμε ξεχωριστά διάφορες επιτρεπτές συναρτήσεις και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματά τους. Οι παρακάτω περιπτώσεις θα εξετασθούν

$$\begin{aligned}
 u &= ax && \text{(γραμμική μορφή)} \\
 u &= a_1x + a_2x^2 && \text{(παραβολική μορφή)} \\
 u &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 && \text{(κυβική μορφή)} \\
 u &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m && \text{(πολυώνυμο } m \text{ βαθμού)}
 \end{aligned}$$

Άγνωστοι είναι οι συντελεστές a, a_1, a_2, \dots, a_m τους οποίους και θα υπολογίσουμε παρακάτω. Στο σχήμα Π1.4 στο αριστερό μέρος της ράβδου, $x=0$ έχουμε πάκτωση, αρα η κινηματική ή γεωμετρική οριακή συνθήκη είναι: $u=0$.

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω συναρτήσεις είναι επιτρεπτές συναρτήσεις γιατί ικανοποιούν την παραπάνω κινηματική οριακή συνθήκη, δηλαδή για $x=0$ είναι $u=0$.

1) Δοκιμή με $u = ax$ (3)

Η συνάρτηση u είναι επιτρεπτή συνάρτηση γιατί είναι $u=0$ για $x=0$. Η u δεν ικανοποιεί την φυσική οριακή συνθήκη $\sigma=0$ για $x=L$, αλλά δεν πειράζει γιατί δεν απαιτείται να ικανοποιείται η συνθήκη. Αντικαθιστούμε στην Π όπου $u = ax$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \int_0^L \frac{E}{2} \left(\frac{dax}{dx} \right)^2 A dx - \int_0^L cx ax dx \\
 &= \frac{EA}{2} La^2 - \frac{cL^3}{3} a
 \end{aligned}$$

Η εξίσωση ισορροπίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{EA}{2} L 2a - \frac{cL^3}{3} = 0$$

Άρα $a = \frac{cL^2}{3AE}$, και από την (3) έχουμε ότι η μετατόπιση είναι: $u = \frac{cL^2}{3AE} x$

$$\text{Η ορθή τάση } \sigma \text{ είναι: } \sigma = E\varepsilon = E \frac{du}{dx} = E \frac{d\left(\frac{cL^2 x}{3AE}\right)}{dx} = \frac{cL^2}{3A}$$

2) Δοκιμή με $u = a_1 x + a_2 x^2$ (4)

Αντικαθιστούμε την τιμή της (4) στη (2) έχουμε

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^L \frac{E}{2} \left(\frac{d(a_1 x + a_2 x^2)}{dx} \right)^2 A dx - \int_0^L c x (a_1 x + a_2 x^2) dx \\ &= \int_0^L \frac{E}{2} (a_1 + 2a_2 x)^2 A dx - \int_0^L (ca_1 x^2 + ca_2 x^3) dx \\ &= \frac{EA}{2} \int_0^L (a_1^2 + 4a_1 a_2 x + 4a_2^2 x^2) dx - \int_0^L (ca_1 x^2 + ca_2 x^3) dx \\ &= \frac{EA}{2} \left(a_1^2 L + 2a_1 a_2 L^2 + \frac{4}{3} a_2^2 L^3 \right) - c \frac{L^3}{3} a_1 - c \frac{L^4}{4} a_2 \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος είναι:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{EA}{2} (2a_1 L + 2a_2 L^2) - \frac{cL^3}{3} = 0$$

$$\text{ή} \quad AEL(a_1 + a_2 L) = \frac{4cL^3}{12} \quad (5.a)$$

$$\text{Παρόμοια} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{EA}{2} \left(2a_1 L^2 + \frac{4}{3} 2a_2 L^3 \right) - \frac{cL^4}{4} = 0$$

$$\eta \quad AEL(La_1 + \frac{4}{3}L^2a_2) = \frac{3cL^4}{12} \quad (5.\beta)$$

Υπό μορφήν μητρώων οι εξισώσεις (5.α) και (5.β) γίνονται:

$$AEL \begin{bmatrix} 1 & L \\ L & \frac{4}{3}L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4cL^3}{12} \\ \frac{3}{12}cL^4 \end{Bmatrix} \quad \text{και έχουμε:} \quad \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{cL}{12AE} \begin{Bmatrix} 7L \\ -3 \end{Bmatrix}$$

Αντικαθιστούμε τις παραπάνω τιμές των a_1 και a_2 στην (4) έχουμε

$$u = \frac{cL}{12AE}(7Lx - 3x^2)$$

$$\text{Η τάση στην ράβδο είναι} \quad \sigma = E \frac{du}{dx} = \frac{cL}{12A}(7L - 6x)$$

$$\mathbf{3) \text{ Δοκιμή με } u = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3} \quad (6)$$

Εφαρμόζουμε την μέθοδο του Rayleigh-Ritz και ευρίσκουμε ότι

$$a_1 = \frac{cL^2}{2AE}, \quad a_2 = 0 \quad \text{και} \quad a_3 = -\frac{c}{6AE}$$

αντικαθιστούμε τις παραπάνω τιμές στην εξίσωση (6) έχουμε:

$$u = \frac{c}{6AE}(3L^2x - x^3)$$

Η υπολογισθείσα τιμή της u είναι η ακριβής λύση, και συμπίπτει με την αναλυτική λύση.

$$\text{Η τάση είναι:} \quad \sigma = E\varepsilon_x = E \frac{du}{dx} = \frac{c}{2A}(L^2 - x^2)$$

$$\mathbf{4) \text{ Δοκιμή με } u = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m} \quad (7)$$

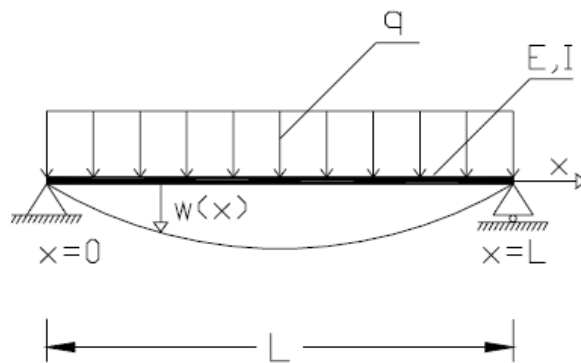
Εφαρμόζουμε την μέθοδο του Rayleigh-Ritz και ευρίσκουμε ότι

$$a_1 = \frac{cL^2}{2AE}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{c}{6AE} \quad \text{και} \quad a_4 = \dots = a_m = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι αν το πολυώνυμο της τρίτης τάξεως δίνει ακριβή λύση, τότε οι συντελεστές του πολυωνύμου με υψηλότερους όρους είναι μηδέν και συνεπώς δεν χρειάζεται να εξετάζουμε πολυώνυμα υψηλότερης τάξης του τρία.

Εφαρμογή: Αμφιέρεστη δοκός με ομοιόμορφο φορτίο q

Δίδεται η δοκός του σχήματος και ζητείται η επίλυσή της με βάση τη μέθοδο Rayleigh-Ritz για μία δεδομένη επιλογή συναρτήσεως της βύθισης.



Η ολική δυναμική ενέργεια μιας αμφιέρειστης δοκού με ομοιόμορφο φορτίο όπου συμμετέχουν μόνο τα έργα από ροπές κάμψεως δίδεται από την έκφραση:

$$\pi = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 - q w(x) \right] dx$$

οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$w(0) = w''(0) = 0$$

$$w(L) = w''(L) = 0$$

Αν επιλέξουμε ως λύση την έκφραση:

$$w(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4$$

Η καμπυλότητα εκφράζεται προσεγγιστικά ως εξής:

$$w''(x) = 2\alpha_2 + 3\alpha_3 x + 4\alpha_4 x^2$$

Εφαρμόζοντας τις δύο πρώτες συνοριακές συνθήκες προκύπτει:

$$w(0) = \alpha_0 = 0$$

$$w''(0) = 2\alpha_2 = 0$$

Άρα η βύθιση και η καμπυλότητά της εκφράζονται ως εξής:

$$w(x) = \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4$$

$$w''(x) = 6\alpha_3 x + 12\alpha_4 x^2$$

Εκφράζοντας τις υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες προκύπτει:

$$w(L) = \alpha_1 L + \alpha_3 L^3 + \alpha_4 L^4 = 0$$

$$w''(L) = 6\alpha_3 L + 12\alpha_4 L^2 = 0$$

από τις οποίες οι συντελεστές α_3 και α_4 εκφράζονται συναρτήσει του συντελεστή α_1 ως εξής:

$$\alpha_4 = -\frac{\alpha_3}{2L} = \frac{\alpha_1}{L^3}$$

$$\alpha_3 = -\frac{2\alpha_1}{L^2}$$

Έτσι η βύθιση εκφράζεται συναρτήσει μίας γενικευμένης συντεταγμένης από την σχέση:

$$w(x) = \alpha_1 \left(x - \frac{2}{L^2} x^3 + \frac{1}{L^3} x^4 \right)$$

Προκύπτει έτσι η παρακάτω έκφραση για την ελαστική γραμμή της αμφιέριστης δοκού που αποτελεί και την ακριβή λύση του προβλήματος.

$$w(x) = \frac{qL^4}{24EI} \left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4} \right)$$

ή

$$w(x) = \frac{qL^4}{24EI} (\xi - 2\xi^2 + \xi^4) \quad \xi = \frac{x}{L}$$

Ενδιαφέρον έχει να δούμε την έκφραση της βύθισης της αμφιέρειστης δοκού με ομοιόμορφο φορτίο θεωρώντας αρχικά ένα πολυώνυμο με έξι όρους δηλ.

$$w(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5$$

Η εφαρμογή των δύο πρώτων συνοριακών συνθηκών μηδενίζει πάλι τους όρους α_0 και α_2 , ενώ η εφαρμογή των δύο άλλων δίδει τις παρακάτω εξισώσεις:

$$w(L) = \alpha_1 L + \alpha_3 L^3 + \alpha_4 L^4 + \alpha_5 L^5 = 0$$

$$w''(L) = 6\alpha_3 L + 12\alpha_4 L^2 + 20\alpha_5 L^3 = 0$$

Δηλαδή:

$$\alpha_4 = -\frac{7\alpha_3 L^2 + 10\alpha_1}{4L^3}, \quad \alpha_5 = \frac{3(2\alpha_1 + \alpha_3 L^2)}{4L^4}$$

Προκύπτει έτσι ότι:

$$\alpha_1 = \frac{qL^3}{24EI}, \quad \alpha_3 = -\frac{2qL}{24EI}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση προκύπτει:

$$\alpha_4 = -\frac{7\alpha_3 L^2 + 10\alpha_1}{4L^3} = \frac{q}{24EI}, \quad \alpha_5 = \frac{3(2\alpha_1 + \alpha_3 L^2)}{4L^4} = 0$$

Δηλαδή η βύθιση προκύπτει η ίδια και για αυτή την επιλογή συναρτήσεως.

$$w(x) = \frac{qL^4}{24EI} \left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4} \right)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η επιλογή συναρτήσεων που βρίσκονται στον δρόμο της ακριβούς λύσης δίδει με την μέθοδο Rayleigh-Ritz τα ακριβή αποτελέσματα. Όπως φάνηκε δε από την παραπάνω λύση εφόσον η μέθοδος βρει την ακριβή λύση, με κάποιο αριθμόν όρων, εμμένει στην διατήρηση της, ανεξάρτητα από την μεγαλύτερη ελευθερία που

προσδίδουμε στην αρχική μας επιλογή εισάγοντας περισσότερες γενικευμένες συντεταγμένες.

4.4 Μέθοδος Galerkin

Η μέθοδος Galerkin αποτελεί μία μέθοδο εύρεσης προσεγγιστικών λύσεων διαφορικών εξισώσεων ή συστημάτων διαφορικών εξισώσεων σε κάποιο πεδίο. Η μέθοδος επενεργεί επί της διαφορικής εξίσωσης και όχι επί κάποιου συναρτησιακού όπως π.χ. η ολική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος και από την άποψη αυτή προσφέρεται για την λύση προβλημάτων στα οποία δεν διατυπώνονται αντίστοιχα συναρτησιακά-ενεργειακές αρχές. Θεωρούμε μια γραμμική διαφορική εξίσωση,

$$Lu = f \quad (1)$$

της οποίας οι συνοριακές συνθήκες είναι ομογενείς. Ο τελεστής L αντιπροσωπεύει έναν οποιονδήποτε γραμμικό διαφορικό τελεστή (π.χ. $L = EI \frac{d^4}{dx^4}$) για μια δοκό).

Αν εκφράσουμε την προσέγγιση της λύσης με τη μορφή μίας σειράς όρων που βασίζονται στην επιλογή κάποιας βάσης συναρτήσεων, δηλ:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \quad (2)$$

τότε η αντικατάσταση της προσεγγιστικής λύσης στην διαφορική εξίσωση θα ικανοποιεί την εξίσωση αφήνοντας κάποιο υπόλοιπο δηλ.

$$L\tilde{u} - f = \varepsilon \quad (3)$$

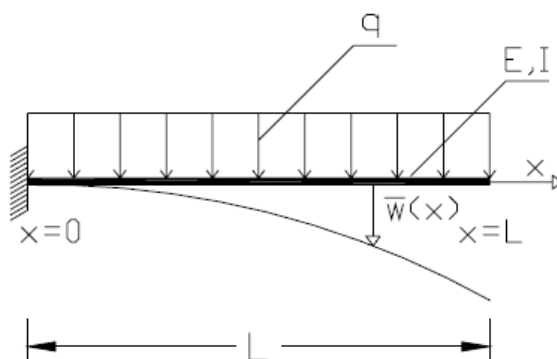
Η απαίτηση περιορισμού του υπολοίπου είναι να το θεωρήσουμε ορθογώνιο ως προς την βάση των επιλεγμένων συναρτήσεων ϕ_i δηλ. να απαιτήσουμε τον μηδενισμό της νοητής προβολής του στο χώρο των n διαστάσεων που δομούν οι n το πλήθος συναρτήσεις ϕ_i . Η συνθήκη ορθογωνικότητας αναλυτικά διατυπώνεται ως εξής:

$$\iiint_V \varepsilon \phi_i dv = \iiint_V (L\tilde{u} - f) \phi_i dv = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Οι σχέση (4) παρέχει n αλγεβρικές εξισώσεις ως προς τις n άγνωστες γενικευμένες συντεταγμένες α_i , η επίλυση των οποίων δίδει τις τιμές των α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ που εξασφαλίζουν την καλύτερη προσέγγιση στο χώρο που καθορίζει η επιλογή των συναρτήσεων ϕ_i . Αν το πλήθος των συναρτήσεων αυτών μεγαλώσει, τότε η προσέγγιση βελτιώνεται και θεωρητικά αν το πλήθος γίνει

άπειρο επιτυγχάνεται η σύγκλιση της προσεγγιστικής λύσης με την ακριβή. Οι αποδείξεις των ισχυρισμών αυτών υπάρχουν αλλά είναι αρκετά πολύπλοκες και για τον λόγο αυτό δεν παρατίθενται στις σημειώσεις αυτές.

Εφαρμογή: Πρόβολος με ομοιόμορφο φορτίο q



Η διαφορική εξίσωση της δοκού είναι:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{q}{EI}$$

Η προσεγγιστική λύση μπορεί να ληφθεί υπό πολυωνυμική μορφή ως εξής:

$$\tilde{w}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5$$

Η λύση αυτή για να ικανοποιεί τις κινηματικές συνοριακές συνθήκες στην πάκτωση του προβόλου, δηλ:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(0) &= 0 \\ \tilde{w}'(0) &= 0 \end{aligned}$$

πρέπει $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ και άρα ως λύση θεωρείται η παρακάτω έκφραση:

$$\tilde{w}(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο Galerkin θα πρέπει να απαιτήσουμε την ορθογωνικότητα του λάθους για την επιλογή των συναρτήσεων βάσεως x^2, x^3, x^4, x^5 άρα:

$$\int_0^L (L\tilde{w}(x) - f)\phi_i dx = 0 \quad i = 1, 2$$

$$\int_0^L \left(24\alpha_4 + 120\alpha_5 x - \frac{q}{EI} \right) x^2 dx = 0$$

$$\int_0^L \left(24\alpha_4 + 120\alpha_5 x - \frac{q}{EI} \right) x^3 dx = 0$$

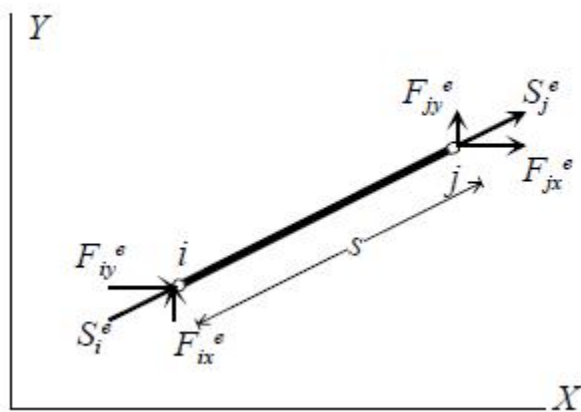
4.5 ΔΙΚΤΥΩΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ-ΡΑΒΔΟΣ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

Αριθμούμε τους κόμβους και τις ράβδους του δικτύωματος, στη συνέχεια απομονώνουμε την ράβδο e . Η ράβδος e είναι ένα στοιχείο, μονοδιάστατο αμφιαρθρωτό, αφόρτιστο μεταξύ των δύο άκρων του, που καταπονείται μόνον από τις αξονικές δυνάμεις S_i και S_j που δρουν στα άκρα της i, j . Συμβολίζουμε με S^e το διάνυσμα των δυνάμεων $S^e = [S_i, S_j]^T$ που δρα στους κόμβους i, j , δηλαδή

$$S^e = \begin{Bmatrix} S_i^e \\ S_j^e \end{Bmatrix}$$

Κάθε ράβδος του δικτύωματος είναι ορισμένη από τις συντεταγμένες των άκρων της i, j ως προς ένα καθολικό σύστημα συντεταγμένων και χαρακτηρίζεται από το μήκος της s , τη σταθερή της διατομή A και το μέτρο ελαστικότητας E του υλικού από το οποίο αποτελείται. Ας πάρουμε ένα τοπικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο i τέτοιο ώστε ο άξονας των x να συμπίπτει με την διεύθυνση της ράβδου με φορά από τον κόμβο i προς τον κόμβο j .

Οι μετατοπίσεις της ράβδου είναι πάντα κατά την έννοια της ράβδου. Ας συμβολίσουμε με $\delta(x)$ την μετατόπιση κατά τη διεύθυνση της ράβδου ενός σημείου M που απέχει x από το σημείο i (χρησιμοποιείται το σύμβολο δ αντί του q επειδή αναφερόμαστε σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων). Η μετατόπιση του πρέπει να εκφραστεί σαν συνάρτηση των μετατοπίσεων δ_i και δ_j με έναν απλό παρεμβολικό τύπο. Αυτό μπορεί να γίνει κατ' ευθείαν ή με το να θεωρήσουμε ότι η μετατόπιση $\delta(x)$ δίνεται από ένα απλό πολυώνυμο



$$\delta(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Η σχέση (1.1) πρέπει να ισχύει και στους κόμβους $i(x=0)$ και $j(x=s)$ όπου οι μετατοπίσεις είναι αντίστοιχα δ_i και δ_j , δηλαδή

$$\begin{aligned} \delta(0) &= \delta_i \\ \delta(s) &= \delta_j \end{aligned}$$

Άρα μόνο δύο όρους μπορούμε να κρατήσουμε από τη σχέση και κρατάμε πάντα τους όρους με ανιούσα σειρά, δηλαδή

$$\delta(x) = a_1 + a_2 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

ή

$$\delta(x) = \mathbf{M}(x) \mathbf{a}$$

όπου

$$\mathbf{M}(x) = [1 \quad x], \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τις

Η Μέθοδος των Π. Σ. σε απλές περιπτώσεις

$$\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

ή

$$\delta^e = \mathbf{A} \mathbf{a}$$

Λύνοντας ως προς \mathbf{a} και αντικαθιστώντας στην

$$\delta(x) = \left(1 - \frac{x}{s}\right) \delta_i + \frac{x}{s} \delta_j$$

ή

$$\delta(x) = (1 - \xi) \delta_i + \xi \delta_j, \quad \xi = \frac{x}{s}$$

Οπότε

$$\delta(x) = \begin{bmatrix} 1 - \xi & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}$$

Συμβολίζω με $N_i(x) \xi = 1 -$ και $N_j(x) \xi =$. Τα $N_i(x)$, $N_j(x)$ λέγονται **συναρτήσεις σχήματος**.

$$\delta(x) = \begin{bmatrix} N_i(x) & N_j(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \delta^e$$

Στη σχέση θα φτάναμε αν αντιστρέψαμε την, οπότε

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \delta^e$$

και την αντικαθιστούσαμε οπότε

$$\delta(x) = \mathbf{M}(x) \mathbf{A}^{-1} \delta^e$$

Άρα

$$\mathbf{N}(x) = \mathbf{M}(x) \mathbf{A}^{-1}$$

Οι παραμορφώσεις δίνονται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}$$

ή σε μητρωϊκή μορφή

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_1 \delta^e$$

όπου

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ενώ οι τάσεις προκύπτουν από τη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων

$$\boldsymbol{\sigma} = E \boldsymbol{\varepsilon} = E \mathbf{B}_1 \delta^e = \frac{E}{s} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \delta^e$$

Το επόμενο βήμα που θα κάνουμε είναι να εφαρμόσουμε την αρχή δυνατών έργων στο στοιχείο e . Οι δυνατές παραμορφώσεις δe εκφράζονται με μια σχέση ανάλογη της αφού το μόνο που αλλάζει είναι οι δυνατές μετατοπίσεις των κόμβων. Επομένως αν συμβολίσουμε με $\delta \delta e$ το διάνυσμα των δυνατών κομβικών μετατοπίσεων η δυνατή παραμόρφωση είναι

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_1 \delta \delta^e = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \delta \delta^e$$

Η αρχή των δυνατών έργων λέει ότι το δυνατό έργο $E \zeta$ των εξωτερικών δυνάμεων $E [\delta] \zeta = \delta e \mathbf{S} e \mathbf{T}$ είναι ίσο με το έργο των $E \sigma$ των εσωτερικών δυνάμεων

$$E_\sigma = \int_{V^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \text{ δηλαδή}$$

$$[\delta\delta^e]^T \left(\mathbf{S}^e - \int_{V^e} \mathbf{B}_1^T E \mathbf{B}_1 dV \delta\delta^e \right) = 0$$

Ονομάζω ακαμψία \mathbf{k}^e του στοιχείου e στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων την ποσότητα

$$\bar{\mathbf{k}}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}_1^T E \mathbf{B}_1 dV$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι τα \mathbf{B}_1 , E , και η διατομή A της ράβδου είναι σταθερά προκύπτει

$$\bar{\mathbf{k}}^e = \frac{AE}{s} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Δεδομένου ότι το διάνυσμα $\delta\delta^e$ είναι ένα τυχαίο μη μηδενικό διάνυσμα η σχέση γράφεται

$$\bar{\mathbf{k}}^e \delta\delta^e = \mathbf{S}^e$$

Θεωρούμε τώρα τις μετατοπίσεις στο καθολικό σύστημα XOY . Το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων \mathbf{q}^e της ράβδου είναι

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ v_j \\ u_j \end{Bmatrix}$$

Το διάνυσμα $\delta\delta^e$ συνδέεται με το διάνυσμα \mathbf{q}^e με τη σχέση

$$\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ v_j \\ u_j \end{Bmatrix}$$

ή

$$\delta\delta^e = \mathbf{a}_1 \mathbf{q}^e$$

Η Μέθοδος των Π. Σ. σε απλές περιπτώσεις 5 όπου l, m είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης της ράβδου e ως προς τους άξονες X, Y (*), δηλαδή

$$l = \frac{X_j - X_i}{s} = \cos\varphi \quad m = \frac{Y_j - Y_i}{s} = \sin\varphi$$

και $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j)$ οι συντεταγμένες των κόμβων i, j αντίστοιχα. Έστω

(F_{ix}^e, F_{iy}^e) και (F_{jx}^e, F_{jy}^e) οι συνιστώσες των S_i^e και S_j^e αντίστοιχα στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων.

$$\begin{Bmatrix} F_{ix}^e \\ F_{iy}^e \\ F_{jx}^e \\ F_{jy}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & 0 \\ m & 0 \\ 0 & l \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_i^e \\ S_j^e \end{Bmatrix}$$

ή

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{a}_1^T \mathbf{S}^e$$

Η σχέση συνδέει το μητρώο στήλη \mathbf{F}^e των κομβικών δυνάμεων στο καθολικό σύστημα με το μητρώο των κομβικών δυνάμεων \mathbf{S}^e στο τοπικό σύστημα. Αντικαθιστώντας την σχέση στις σχέσεις και προκύπτει

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}^e = \mathbf{B} \mathbf{q}^e$$

$$\boldsymbol{\sigma} = E \mathbf{B}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}^e = E \mathbf{B} \mathbf{q}^e$$

Εφαρμόζοντας ξανά την αρχή των δυνατών έργων μετά από μια ανάλογη διαδικασία όπως προηγουμένως βρίσκουμε

$$\mathbf{k}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{F}^e$$

όπου

$$\mathbf{k}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dV = \int_{V^e} \mathbf{a}_1^T \mathbf{B}_1^T E \mathbf{B}_1 \mathbf{a}_1 dV = \mathbf{a}_1^T \left(\int_{V^e} \mathbf{B}_1^T E \mathbf{B}_1 dV \right) \mathbf{a}_1$$

δηλαδή

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{a}_1^T \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{a}_1$$

το μητρώο ακαμψίας στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων άνοντας τις πράξεις βρίσκουμε

$$\mathbf{k}^e = \frac{AE}{s} \begin{bmatrix} \ell^2 & \ell m & -\ell^2 & -\ell m \\ \ell m & m^2 & -\ell m & -m^2 \\ -\ell^2 & -\ell m & \ell^2 & \ell m \\ -\ell m & -m^2 & \ell m & m^2 \end{bmatrix}$$

Το μητρώο ακαμψίας \mathbf{k}_e και το μητρώο των κομβικών μετατοπίσεων δ_e στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων, συνδέονται με το μητρώο των κομβικών δυνάμεων

$$\mathbf{S}^e = \begin{bmatrix} S_i^e & S_j^e \end{bmatrix}^T \quad \text{επίσης στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων}$$

δηλαδή πρέπει να ισχύει

$$AE \frac{\delta_i - \delta_j}{s} = S_i^e \quad AE \frac{\delta_j - \delta_i}{s} = S_j^e$$

που είναι ήδη γνωστά από τον εφελκυσμό των ράβδων. Δηλαδή, η σχέση μπορεί να προκύψει και απευθείας. Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την σχέση με \mathbf{a}_1^T και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις και προκύπτει

$$(\mathbf{a}_1^T \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{a}_1) \mathbf{q}^e = \mathbf{F}^e \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{F}^e$$

Από τη στιγμή που έχουν αναπτυχθεί οι σχέσεις η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος ακολουθεί τα βήματα της μητρωϊκής ανάλυσης των κατασκευών, δηλαδή εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας σε κάθε κόμβο i του δικτύματος. Στις εξισώσεις αυτές τις εσωτερικές δυνάμεις $F F F ix e iy e iz , , e$ στον κόμβο i της ράβδου e τις αντικαθιστούμε από τη σχέση (1.20). Έτσι βρίσκουμε σχέσεις που συνδυάζουν τις ακαμψίες \mathbf{k}_e ($e=1,2,\dots,N$) και των N ράβδων του δικτύματος καθώς και όλες τις μετατοπίσεις των κόμβων. Η σχέσεις αυτές έχουν ως δεύτερο μέλος τις γνωστές εξωτερικές δυνάμεις \mathbf{R} που εφαρμόζονται στους κόμβους του δικτύματος. Αν συμβολίσουμε με \mathbf{K} τον συνδυασμό -σύνθεση των ακαμψιών των επί μέρους ράβδων που περιγράψαμε πιο πάνω και με \mathbf{r} το διάνυσμα που παριστά

όλες τις μετατοπίσεις των κόμβων τότε θα έχουμε

$$\mathbf{K}\mathbf{r}=\mathbf{R}$$

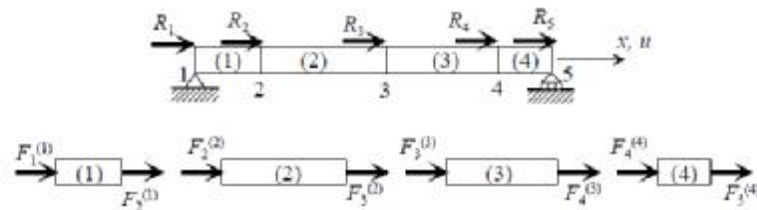
όπου

$$\mathbf{K}=\sum_{e=1}^N \mathbf{k}^e$$

είναι το μητρώο ακαμψίας της ραβδωτής κατασκευής. (Προσοχή το σύμβολο Σ δεν παριστά κλασική άθροιση). Πιο πολύ μπορεί να καταλάβει κανείς την διαδικασία μέσα από τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1.1

Θεωρούμε τη μονοδιάστατη αμφιέριστη δοκό σταθερής διατομής που φορτίζεται μονοαξονικά και έχει χωρισθεί σε τέσσερα πεπερασμένα στοιχεία όπως φαίνεται στο σχήμα. Δεχόμαστε ότι η δοκός δεν λυγίζει επιπλέον, θεωρούμε ότι τα μητρώα ακαμψίας και φορτίσεως των στοιχείων είναι γνωστά.



Κάθε κόμβος i έχει μόνον ένα βαθμό ελευθερίας, την αξονική μετατόπιση $u_i=q_i$.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση για κάθε ένα στοιχείο ξεχωριστά προκύπτει

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} \\ k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{33}^{(3)} & k_{34}^{(3)} \\ k_{43}^{(3)} & k_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3^{(3)} \\ F_4^{(3)} \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} k_{44}^{(4)} & k_{45}^{(4)} \\ k_{54}^{(4)} & k_{55}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4^{(4)} \\ F_5^{(4)} \end{Bmatrix}$$

Τα στοιχεία k_{ij}^e των μητρώων \mathbf{k}^e είναι μονοδιάστατα (1×1). Για να σχηματισθούν οι εξισώσεις ισορροπίας όλης της δοκού θεωρείται η ισορροπία κάθε κόμβου ξεχωριστά. Οπότε,

$$\begin{aligned}
R_1 &= F_1^{(1)} &= k_{11}^{(1)} q_1 + k_{12}^{(2)} q_2 \\
R_2 &= F_2^{(1)} + F_2^{(2)} &= k_{21}^{(1)} q_1 + [k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)}] q_2 + k_{23}^{(2)} q_3 \\
R_3 &= F_3^{(2)} + F_3^{(3)} &= k_{32}^{(2)} q_2 + [k_{33}^{(2)} + k_{33}^{(3)}] q_3 + k_{34}^{(3)} q_4 \\
R_4 &= F_4^{(3)} + F_4^{(4)} &= k_{43}^{(3)} q_3 + [k_{44}^{(3)} + k_{44}^{(4)}] q_4 + k_{45}^{(4)} q_5 \\
R_5 &= F_5^{(4)} &= k_{54}^{(4)} q_4 + k_{55}^{(4)} q_5
\end{aligned}$$

όπου, R_1, \dots, R_5 οι συνολικές δυνάμεις που ασκούνται στους κόμβους 1, ..., 5 αντίστοιχα.

Οι εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να γραφούν σε μητρωϊκή μορφή ως εξής

$$\begin{bmatrix}
k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\
k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & 0 & 0 \\
0 & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} + k_{33}^{(3)} & k_{34}^{(3)} & 0 \\
0 & 0 & k_{43}^{(3)} & k_{44}^{(3)} + k_{44}^{(4)} & k_{45}^{(4)} \\
0 & 0 & 0 & k_{54}^{(4)} & k_{55}^{(4)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1 \\
q_2 \\
q_3 \\
q_4 \\
q_5
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
R_1 \\
R_2 \\
R_3 \\
R_4 \\
R_5
\end{bmatrix}$$

ή

$$\mathbf{K}\mathbf{r}=\mathbf{R}$$

όπου, \mathbf{K} είναι το ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής, \mathbf{r} το μητρώο διάνυσμα των μετατοπίσεων των κόμβων και \mathbf{R} το μητρώο διάνυσμα των κομβικών δυνάμεων. Το σύστημα των εξισώσεων (γ') αποτελεί το τελικό σύστημα των εξισώσεων σορροπίας όλου του μέσου. Οποιοσδήποτε φορέας και να αντιμετωπισθεί με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων το σύστημα των τελικών εξισώσεων που θα σχηματισθεί θα είναι της μορφής των εξισώσεων (γ'). παρατηρώντας το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων (γ), βλέπουμε ότι θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε το ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής και απ' υθείας. Έτσι δύναμη σε ένα κόμβο i προκαλούν οι μετακινήσεις uj των κόμβων $ων$ στοιχείων e_1, e_2, \dots, e_N που έχουν κοινούς κόμβους τον i και j . Αυτό ημαίνει ότι το στοιχείο K_{ij} του ολικού μητρώου ακαμψίας θα είναι

$$K_{ij} = k_{ij}^{e_1} + k_{ij}^{e_2} + \dots + k_{ij}^{e_N}$$

όπου $k_{ij}^{e_1}, k_{ij}^{e_2}, \dots, k_{ij}^{e_N}$ είναι τα επιμέρους στοιχεία των μητρώων

ακαμψίας των στοιχείων e_1, e_2, \dots, e_N .

Αξίζει να τονίσουμε ότι αν ο κόμβος j ανήκει μόνο στα στοιχεία e_1 και e_2 τότε η σχέση (δ) περιλαμβάνει μόνο τους δύο πρώτους όρους αφού οι υπόλοιποι όροι είναι μηδενικοί.

Το πρόβλημα ελαφρώς περιπλέκεται αν ο αριθμός των κομβικών παραμέτρων είναι μεγαλύτερος του 1. Έτσι πχ. στον κόμβο j υπάρχουν οι μετατοπίσεις u_j, v_j οπότε και οι δυνάμεις θα είναι R_{xj}, R_{yj} θα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι η δύναμη R_{xj} προκαλείται από τις μετατοπίσεις u_j, v_j που πολλαπλασιάζουν τα στοιχεία της $(2j-1)$ γραμμής του μητρώου ακαμψίας κοκ. Στο παράδειγμα που ακολουθεί αποφύγαμε, για λόγους ευκολότερης κατανόησης αυτή την περιπλοκή παίρνοντας τις μετατοπίσεις u_j, v_j με τη μορφή ενός διανύσματος q_j οπότε και τα στοιχεία K_{ij} του μητρώου ακαμψίας είναι μητρώα (2×2) .

Παράδειγμα 1.2

Υπολογίζουμε τις τάσεις των ράβδων του δικτύωματος του σχήματος που και κοινό εμβαδό διατομής A . Από τη σχέση προκύπτουν τα μητρώα ακαμψίας των ράβδων 1,2,3,4,5 αφού τα συνημίτονα κατεύθυνσης της κάθε ράβδου είναι

$$\text{ράβδος (1): } (\ell, m) = (1, 0)$$

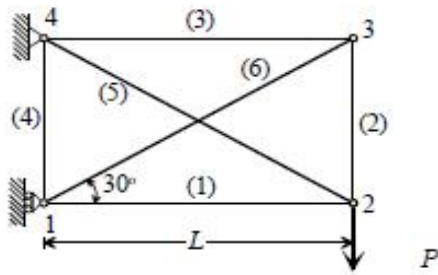
$$\text{ράβδος (2): } (\ell, m) = (0, 1)$$

$$\text{ράβδος (3): } (\ell, m) = (-1, 0)$$

$$\text{ράβδος (4): } (\ell, m) = (0, -1)$$

$$\text{ράβδος (5): } (\ell, m) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{ράβδος (6): } (\ell, m) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}^1 &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{k}^2 &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{k}^3 &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{k}^4 &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{k}^5 &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \sqrt{3} & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}, & \mathbf{k}^6 &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \sqrt{3} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Επομένως, η σχέση που συνδέει τις μετατοπίσεις των κόμβων με τα επικόμβια εξωτερικά φορτία και τις αντιδράσεις R_{1x}, R_{4x}, R_{4y} στους κόμβους 1,4 είναι

$$\begin{bmatrix} R_{1x} \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -1 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & -\sqrt{3} \\ -1 & 0 & 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & -\sqrt{3} & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -1 & 0 \\ -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & -\sqrt{3} & \frac{3}{8} & \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -1 & 0 & 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & -\sqrt{3} & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η σχέση αυτή, αφού ληφθούν υπόψη οι οριακές συνθήκες ταυτίζεται με τη σχέση που προέκυψε για το ίδιο δικτύωμα αλλά με την εφαρμογή αρχών της αντοχής των υλικών στο Κεφάλαιο 1.

Η λύση του συστήματος δίνει

$$v_1 = -0,12847 \frac{PL}{EA}, \quad u_2 = -0,26340 \frac{PL}{EA}, \quad v_2 = -1,15864 \frac{PL}{EA},$$

$$u_3 = 0,38541 \frac{PL}{EA}, \quad v_3 = -1,82379 \frac{PL}{EA}$$

Οπότε η ισορροπία μας δίνει τις αντιδράσεις στους κόμβους 1,4

$$R_{4x} = P, \quad F_{4y} = -P\sqrt{3}, \quad F_{1x} = P\sqrt{3}$$

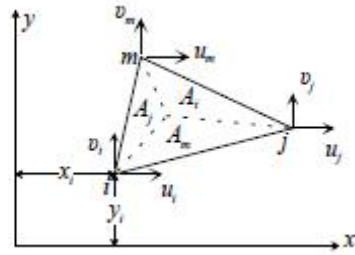
Τέλος, αντικαθιστώντας τις μετατοπίσεις στις σχέσεις προσδιορίζουμε τις τάσεις των ράβδων.

4.6 ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ-ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ

Έστω ότι έχουμε μια επίπεδη κατασκευή D που υποδιαιρείται με τη βοήθεια ιδεατών γραμμών σ' έναν αριθμό τριγωνικών στοιχείων. Πρέπει στο σημείο αυτό να επισημάνουμε ότι η υποδιαίρεση αυτή μπορεί να μην αναπαριστά με απόλυτη ακρίβεια την κατασκευή, επειδή π.χ. το καμπύλο σύνορο του σώματος δεν μπορεί να παρασταθεί με απόλυτη ακρίβεια. Άρα η διακεκριμενοποίηση της κατασκευής οδηγεί στον υπολογισμό μιας κατασκευής Dh που μοιάζει με την αρχική D αλλά δεν ταυτίζεται απόλυτα με αυτήν. Η κατασκευή Dh μπορεί να έχει απλοποιηθεί όσον αφορά και την παράσταση των οριακών συνθηκών (π.χ. αντικατάσταση κατανεμημένων φορτίων με συγκεντρωμένα φορτία στους κόμβους κλπ).

Τα στοιχεία θεωρούνται ότι συνδέονται μεταξύ τους σε διακριτά σημεία τους *κόμβους*. Αυτό σημαίνει ότι κατά κάποιο τρόπο η κατασκευή μετασχηματίζεται σε ένα είδος δικτύωματος. Απομονώνουμε το τριγωνικό στοιχείο e με κόμβους του i, j, m (Σχ. 1.3). Έστω, (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_m, y_m) οι συντεταγμένες των κόμβων στο σύστημα αναφοράς xOy . Η μετατόπιση έχει δύο συνιστώσες, την u κατά τη διεύθυνση x και την v κατά τη διεύθυνση y . Συμβολίζουμε με

$$\mathbf{q}_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix}, k = i, j, m$$



Συμβολίζουμε με \mathbf{q}_e το διάνυσμα των μετατοπίσεων των κόμβων i, j, m δηλαδή

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_m \end{Bmatrix}$$

Θέλουμε να εκφράσουμε τις μετατοπίσεις

$$\mathbf{q}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

στο σημείο M του στοιχείου e σαν συνάρτηση των μετατοπίσεων $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \mathbf{q}_m$ των κόμβων. Για το λόγο αυτό εκφράζουμε τις μετατοπίσεις στο εσωτερικό του στοιχείου e με τη βοήθεια πολυωνυμικών συναρτήσεων της μορφής

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + \dots \\ v(x, y) &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy + \dots \end{aligned}$$

Οι σχέσεις αυτές αν εφαρμοστούν στον κόμβο i , οι μετατοπίσεις πρέπει να είναι ίσες με u_i, v_i αντίστοιχα, δηλαδή

$$\begin{aligned} u(x_i, y_i) &= u_i \\ v(x_i, y_i) &= v_i \end{aligned}$$

Προφανώς το ίδιο ισχύει και για τους άλλους κόμβους. Δεδομένου ότι υπάρχουν τρεις μόνο κόμβοι, μόνον οι τρεις πρώτοι συντελεστές a_1, a_2, a_3 της σχέσης που δίνει τη μετατόπιση στο στοιχείο e μπορούν να προσδιορισθούν σαν συνάρτηση των u_i, u_j, u_m . Το ίδιο ισχύει και με τους συντελεστές b_1, b_2, b_3 της μετατόπισης v . Με άλλα λόγια από τη σχέση (1.28) πρέπει να κρατήσουμε τους τρεις πρώτους συντελεστές. Άρα

$$u(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y$$

$$v(x,y) = b_1 + b_2x + b_3y$$

Οι σχέσεις γράφονται σε μητρωϊκή μορφή

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

δηλαδή

$$\mathbf{q}(x,y) = \mathbf{M}(x,y) \mathbf{a}$$

όπου

$$\mathbf{M}(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση όπου x,y τις συντεταγμένες των κόμβων του τριγώνου, προκύπτει η σχέση

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

ή

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{A} \mathbf{a}$$

Επιλύοντας ως προς \mathbf{a} προκύπτει

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{q}^e$$

όπου

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} z_i & 0 & z_j & 0 & z_m & 0 \\ 0 & z_i & 0 & z_j & 0 & z_m \\ y_{jm} & 0 & y_{mi} & 0 & y_j & 0 \\ 0 & y_{jm} & 0 & y_{mi} & 0 & y_j \\ x_{mj} & 0 & x_{im} & 0 & x_j & 0 \\ 0 & x_{mj} & 0 & x_{im} & 0 & x_j \end{bmatrix}$$

με

$$z_i = x_j y_m - x_m y_j$$

$$y_{jm} = y_j - y_m$$

$$x_{mj} = x_m - x_j$$

και

$$A^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

το εμβαδόν του τριγώνου (ijm). Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$\mathbf{q}(x,y) = \mathbf{N}(x,y) \mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} N_i(x,y) & N_j(x,y) & N_m(x,y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

όπου

$$N_i(x,y) = \begin{bmatrix} v_i(x,y) & 0 \\ 0 & v_i(x,y) \end{bmatrix} = v_i(x,y) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

με

$$v_i(x,y) = \frac{1}{2A^e} (z_i + y_{jm}x + x_{mj}y)$$

Το πολυώνυμο $v_i(x,y)$ ονομάζεται συνάρτηση σχήματος του κόμβου i , και μπορεί να γραφεί επίσης με τη μορφή

$$v_i(x,y) = \frac{1}{2A^e} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{A_i}{A^e}$$

όπου, P είναι το σημείο με συντεταγμένες (x,y) και A_i είναι το εμβαδόν του τριγώνου (Pjm). Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν και για τις συναρτήσεις σχήματος που αναφέρονται στους κόμβους j και m (οι σχέσεις προκύπτουν με κυκλική εναλλαγή των δεικτών). Από την (1.41) προφανώς προκύπτει ότι

$$v_i(x_j, y_j) = v_i(x_m, y_m) = 0$$

και

$$v_i(x_i, y_i) = 1$$

και γενικά

$$v_k(x_\ell, y_\ell) = \delta_{k\ell}$$

4.7 Παραμορφώσεις και τάσεις του στοιχείου

Το πεδίο των παραμορφώσεων που αναπτύσσεται στο στοιχείο είναι

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Μετά από κατάλληλες παραγωγώσεις της (1.38) βρίσκουμε

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}^e$$

όπου

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v_m}{\partial y} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} & \frac{\partial v_i}{\partial x} & \frac{\partial v_j}{\partial y} & \frac{\partial v_j}{\partial x} & \frac{\partial v_m}{\partial y} & \frac{\partial v_m}{\partial x} \end{bmatrix}$$

ή

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_{jm} & 0 & y_{mi} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{mj} & 0 & x_{im} & 0 & x_{ji} \\ x_{mj} & y_{jm} & x_{im} & y_{mi} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix}$$

Επίσης το πεδίο των τάσεων στην περίπτωση της επίπεδης ελαστικότητας είναι

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις συνδέονται με τις παραμορφώσεις με τη σχέση $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$, όπου το μητρώο ελαστικότητας \mathbf{D} είναι διαφορετικό για τις περιπτώσεις της επίπεδης έντασης και της επίπεδης παραμόρφωσης (Παράρτημα 3, σχέσεις (3.4.3), (3.4.6)). Για κάθε μια ξεχωριστά απ' αυτές τις περιπτώσεις και χωρίς να λάβουμε υπόψη τις αρχικές παραμορφώσεις και αρχικές τάσεις προκύπτει

i) Επίπεδη εντατική κατάσταση

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

ή λαμβάνοντας υπόψη τις (1.43), (1.45)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2A^e(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} y_{jm} & \nu x_{mj} & y_{mi} & \nu x_{im} & y_{\theta} & \nu x_{\theta} \\ \nu y_{jm} & x_{mj} & \nu y_{mi} & x_{im} & \nu y_{\theta} & x_{\theta} \\ \frac{1-\nu}{2} x_{mj} & \frac{1-\nu}{2} y_{jm} & \frac{1-\nu}{2} x_{mi} & \frac{1-\nu}{2} y_{mi} & \frac{1-\nu}{2} x_{\theta} & \frac{1-\nu}{2} y_{\theta} \end{bmatrix} \mathbf{q}^e$$

ii) Επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

ή

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{2A^e(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} y_{jm} & \frac{\nu}{1-\nu} x_{mj} & y_{mi} & \frac{\nu}{1-\nu} x_{im} & y_{\theta} & \frac{\nu}{1-\nu} x_{\theta} \\ \frac{\nu}{1-\nu} y_{jm} & x_{mj} & \frac{\nu}{1-\nu} y_{mi} & x_{im} & \frac{\nu}{1-\nu} y_{\theta} & x_{\theta} \\ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} x_{mj} & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} y_{jm} & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} x_{mi} & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} y_{mi} & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} x_{\theta} & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} y_{\theta} \end{bmatrix} \mathbf{q}^e$$

4.8 Υπολογισμός του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου

Αν απομονώσουμε από την κατασκευή το στοιχείο e (Σχ. 1.4), τότε στο σύνορο του στοιχείου θα δρουν κάποιες τάσεις που προέρχονται από τα γειτονικά στοιχεία. Τις τάσεις αυτές μπορούμε να τις θεωρήσουμε σαν μια κατανομή επιφανειακών τάσεων $\mathbf{T}=[T_x, T_y]\mathbf{T}$. Ακόμα στο στοιχείο e δρα και το διάνυσμα $\mathbf{f}=[f_x, f_y]\mathbf{T}$ των καθολικών δυνάμεων. Υποθέτουμε ότι το πάχος t των στοιχείων είναι σταθερό οπότε η αρχή των δυνατών έργων στο στοιχείο e που έχει συνολική επιφάνεια Ae και περίμετρο Le δίνει

$$t \int_{A^e} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f} dA + t \int_{L^e} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{T} dL = t \int_{A^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA$$

Τις δυνατές μετατοπίσεις $\delta \mathbf{q}$ και τις δυνατές παραμορφώσεις $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ μπορούμε να τις εκφράσουμε με τη βοήθεια σχέσεων αντίστοιχων προς τις (1.38) και (1.43) γιατί γενικά όταν αλλάζει το πεδίο των μετατοπίσεων εκείνο που αλλάζει είναι οι μετατοπίσεις των κόμβων. Στη προκειμένη περίπτωση οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι $\delta \mathbf{q}e$. Άρα

$$\delta \mathbf{q} = \mathbf{N} \delta \mathbf{q}^e$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{q}^e$$

Με αυτά τα δεδομένα ο πρώτος όρος του αριστερού μέλους της (1.51) που παριστάνει το δυνατό έργο των καθολικών δυνάμεων γράφεται

$$t \int_{A^e} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f} dA = t (\delta \mathbf{q}^e)^T \int_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dA$$

Αν ορισθεί

$$\mathbf{F}_f^e = t \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dS$$

από την (1.54) φαίνεται ότι το διάνυσμα \mathbf{F}_f^e παριστάνει τις **στατικά ισοδύναμες** δυνάμεις που δρουν στους κόμβους του στοιχείου e . Δηλαδή τις κομβικές δυνάμεις που παράγουν ισοδύναμο έργο με τις καθολικές \mathbf{f} . Μ' αυτό τον τρόπο μπορούν να αντικατασταθούν οι καθολικές δυνάμεις (που επιδρούν σ' όλο το στοιχείο) με δυνάμεις \mathbf{F}_f^e που δρουν μόνο στους κόμβους του στοιχείου. Με την ίδια διαδικασία μπορούν να αντικατασταθούν και οι επιφανειακές τάσεις \mathbf{T} με τις **στατικά ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις**

$$\mathbf{F}_T^e = t \int_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dA$$

Επομένως, η σχέση (1.51) παίρνει τη μορφή

$$(\delta \mathbf{q}^e)^T (\mathbf{F}_f^e + \mathbf{F}_T^e - \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e) = 0$$

όπου

$$\mathbf{k}^e = t \int_{S^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS$$

παριστάνει το **μητρώο ακαμψίας** του στοιχείου e . Εφόσον το $\delta \mathbf{q}^e$ είναι τυχαίο διάνυσμα διάφορο του μηδενός η (1.57) γράφεται

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e \quad \text{όπου} \quad \mathbf{F}^e = \mathbf{F}_f^e + \mathbf{F}_T^e$$

είναι το διάνυσμα της συνισταμένης των γενικευμένων δυνάμεων του στοιχείου e .

Επειδή τα μητρώα \mathbf{B} , \mathbf{D} περιέχουν μόνο σταθερούς όρους η (1.58) γράφεται

$$\mathbf{k}^e = t \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \int_{A^e} dx dy = t A^e \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$$

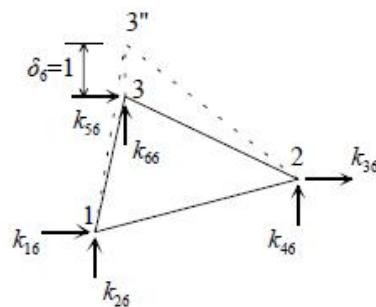
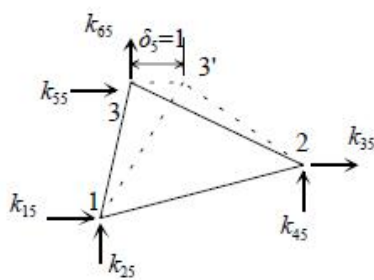
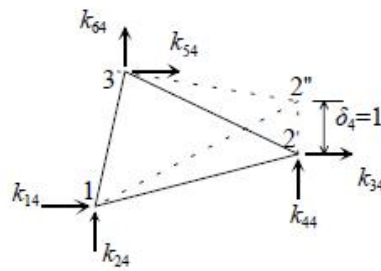
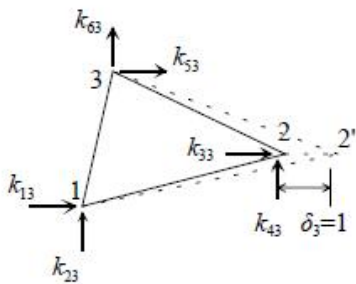
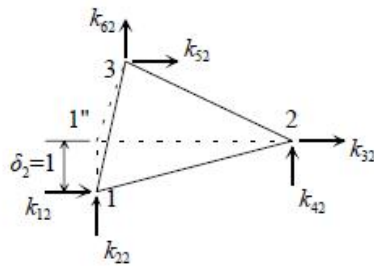
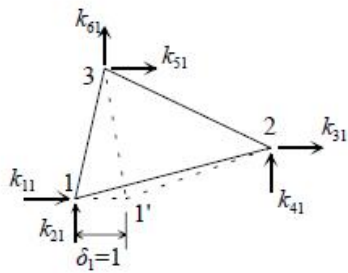
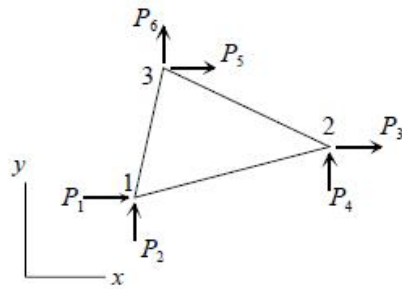
Ανάλογα με το αν έχουμε επίπεδη εντατική κατάσταση ή επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση η (1.61) γίνεται

i) επίπεδη εντατική κατάσταση συμμετρικό

$$\mathbf{k}^e = \frac{Et(1-\nu)}{4A^e(1+\nu)(1-2\nu)} \times \left[\begin{array}{cccc} \left(y_{jm}^2 + \frac{1-\nu}{2} x_{nj}^2 \right) & \left(x_{nj}^2 + \frac{1-\nu}{2} y_{jm}^2 \right) & \left(y_{jm}^2 + \frac{1-\nu}{2} x_{im}^2 \right) & \text{συμμετρικό} \\ \frac{1+\nu}{2} x_{nj} y_{jm} & \left(x_{im} x_{nj} + \frac{1-\nu}{2} x_{im} y_{jm} \right) & \frac{1+\nu}{2} x_{im} y_{jm} & \left(x_{im}^2 + \frac{1-\nu}{2} y_{jm}^2 \right) \\ \left(y_{jm} x_{im} + \frac{1-\nu}{2} x_{im} x_{nj} \right) & \left(x_{im} x_{nj} + \frac{1-\nu}{2} y_{jm} y_{im} \right) & \frac{1+\nu}{2} x_{im} y_{im} & \left(x_{im}^2 + \frac{1-\nu}{2} y_{im}^2 \right) \\ \left(x_{im} y_{jm} + \frac{1-\nu}{2} x_{nj} y_{im} \right) & \left(x_{im} x_{nj} + \frac{1-\nu}{2} y_{jm} y_{im} \right) & \frac{1+\nu}{2} x_{im} y_{im} & \left(x_{im}^2 + \frac{1-\nu}{2} y_{im}^2 \right) \\ \left(y_{jm} y_{im} + \frac{1-\nu}{2} x_{im} x_{nj} \right) & \left(x_{im} x_{nj} + \frac{1-\nu}{2} x_{im} y_{jm} \right) & \left(y_{jm} x_{im} + \frac{1-\nu}{2} x_{im} x_{nj} \right) & \left(x_{im}^2 + \frac{1-\nu}{2} y_{im}^2 \right) \\ \left(x_{im} y_{im} + \frac{1-\nu}{2} x_{im} x_{nj} \right) & \left(x_{im} x_{nj} + \frac{1-\nu}{2} y_{jm} y_{im} \right) & \left(x_{im} y_{im} + \frac{1-\nu}{2} x_{im} y_{jm} \right) & \left(x_{im}^2 + \frac{1-\nu}{2} y_{im}^2 \right) \\ \left(x_{im} y_{im} + \frac{1-\nu}{2} x_{im} y_{jm} \right) & \left(x_{im} x_{nj} + \frac{1-\nu}{2} y_{jm} y_{im} \right) & \left(x_{im} y_{im} + \frac{1-\nu}{2} x_{im} y_{jm} \right) & \left(x_{im}^2 + \frac{1-\nu}{2} y_{im}^2 \right) \\ \left(x_{im} y_{im} + \frac{1-\nu}{2} x_{im} y_{jm} \right) & \left(x_{im} x_{nj} + \frac{1-\nu}{2} y_{jm} y_{im} \right) & \left(x_{im} y_{im} + \frac{1-\nu}{2} x_{im} y_{jm} \right) & \left(x_{im}^2 + \frac{1-\nu}{2} y_{im}^2 \right) \end{array} \right] \quad (1.62)$$

ii) επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση

Η Μέθοδος των Π. Σ. σε απλές περιπτώσεις



όπου (F_{xi}, F_{yi}) και (u_i, v_i) είναι η δύναμη ή η μετατόπιση που δρα στον κόμβο i .

Άρα η σχέση (1.59) γράφεται

Η Μέθοδος των Π. Σ. σε απλές περιπτώσεις

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}$$

όπου $k_{ij}(i,j=1,2,\dots,6)$ είναι τα στοιχεία του \mathbf{k}^e .

Η παραπάνω σχέση γράφεται ακόμα

$$\begin{aligned} P_1 &= k_{11}\delta_1 + k_{12}\delta_2 + k_{13}\delta_3 + k_{14}\delta_4 + k_{15}\delta_5 + k_{16}\delta_6 \\ P_2 &= k_{21}\delta_1 + k_{22}\delta_2 + k_{23}\delta_3 + k_{24}\delta_4 + k_{25}\delta_5 + k_{26}\delta_6 \\ P_3 &= k_{31}\delta_1 + k_{32}\delta_2 + k_{33}\delta_3 + k_{34}\delta_4 + k_{35}\delta_5 + k_{36}\delta_6 \\ P_4 &= k_{41}\delta_1 + k_{42}\delta_2 + k_{43}\delta_3 + k_{44}\delta_4 + k_{45}\delta_5 + k_{46}\delta_6 \\ P_5 &= k_{51}\delta_1 + k_{52}\delta_2 + k_{53}\delta_3 + k_{54}\delta_4 + k_{55}\delta_5 + k_{56}\delta_6 \\ P_6 &= k_{61}\delta_1 + k_{62}\delta_2 + k_{63}\delta_3 + k_{64}\delta_4 + k_{65}\delta_5 + k_{66}\delta_6 \end{aligned}$$

Οι σχέσεις (1.66) δεν εκφράζουν τίποτα άλλο παρά ότι οι δυνάμεις $\sigma \tau \omicron \upsilon \varsigma$ κόμβους είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των μετατοπίσεων των κόμβων. Έτσι διπλασιασμός των μετατοπίσεων προκαλεί διπλασιασμό των δυνάμεων και αντιστρόφως. Αυτό το αποτέλεσμα είναι αυτονόητο αφού βρισκόμαστε στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικότητας. Αν τώρα στη σχέση (1.66) διαλέξουμε $\delta_1=1, \delta_2=\delta_3=\delta_4=\delta_5=\delta_6=0$ βλέπουμε ότι

τα στοιχεία $k_{i1}(i=1,2,\dots,6)$ της πρώτης στήλης ισούνται με τις δυνάμεις P_{116}, K_{11} στους κόμβους. Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία της πρώτης στήλης είναι οι δυνάμεις P_{116}, K_{11} που πρέπει να εφαρμοσθούν στους κόμβους ώστε να έχουμε μοναδιαία μετατόπιση του κόμβου 1 κατά τη διεύθυνση x . Αντίστοιχα συμπεράσματα εξάγουμε αν πάρουμε κατά σειρά τα $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_6$ μοναδιαία και τα υπόλοιπα μηδέν.

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι συντελεστές $k_{ij}(i,j=1,2,\dots,6)$ έχουν φυσική σημασία.

Απεικόνιση της φυσικής αυτής σημασίας δίνουμε στο Σχ. 1.5 που αντιστοιχούν σε μοναδιαίες μετατοπίσεις $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_6$. Η νέα αυτή θέση των κόμβων 1,2,3 συμβολίζεται με 1',2',3',1'',2'',3''

4.10 ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΤΕΛΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ

Η διαμόρφωση του τελικού συστήματος ακαμψίας μπορεί να γίνει είτε με τη διαδικασία ισορροπίας των επιμέρους κόμβων είτε με την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων. Βέβαια και η αρχή δυνατών έργων δεν εκφράζει παρά ισορροπία στο σύνολο των κόμβων του σώματος. Όμως η εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων επιτρέπει να εξετασθούν πιο γενικά μοντέλα από ότι η συνθήκη ισορροπίας των κόμβων. Όπως είπαμε με την ισορροπία κόμβων δεν μπορεί να αντιμετωπισθεί το πρόβλημα εσωτερικών κόμβων, ή το πρόβλημα κόμβων που περιλαμβάνουν στις κομβικές παραμέτρους, παραγώγους των μετατοπίσεων κλπ.

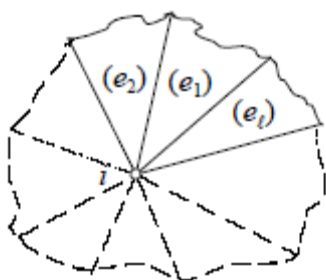
Η Μέθοδος των Π. Σ. σε απλές περιπτώσεις

Από την άλλη μεριά η μέθοδος ισορροπίας μας δίνει μια πολύ πιο εποπτική και πρακτική εικόνα της διαδικασίας. Γι' αυτό το λόγο θα περιλάβουμε και τις δύο αποδείξεις.

4.11 Σχηματισμός του ολικού μητρώου ακαμψίας με τη μέθοδο

Ισορροπίας

Ο σχηματισμός των τελικών εξισώσεων ισορροπίας του μέσου γίνεται αν θεωρήσουμε την ισορροπία κάθε κόμβου της κατασκευής ξεχωριστά. Άρα, εάν i είναι ένας κόμβος που ανήκει σε l στοιχεία e_k ($k=1, \dots, l$) και \mathbf{R}_i το διάνυσμα της γενικευμένης κομβικής δύναμης που ασκείται σ' αυτόν (Σχ. 1.6), παίρνοντας την ισορροπία στο i προκύπτει



$$\mathbf{R}_i = \mathbf{F}_i^{e1} + \mathbf{F}_i^{e2} + \dots + \mathbf{F}_i^{el}$$

όπου,

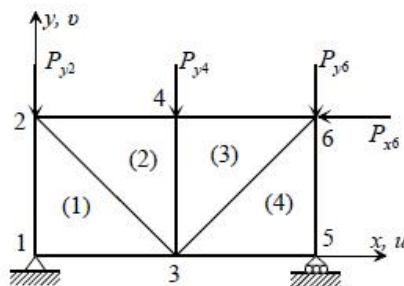
$$\mathbf{F}_i^{ek} \quad (k=1,2,\dots,\ell)$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται από καθένα από τα στοιχεία e_k ($k=1,2,\dots,\ell$) στον κόμβο i . Οι κομβικές αυτές δυνάμεις δίνονται από τη σχέση (1.60) ανάλογα με τη μορφή του στοιχείου και τα φορτία που έχουν επιβληθεί στον φορέα. Οπότε, εάν η κατασκευή περιλαμβάνει n κόμβους θα σχηματισθούν n εξισώσεις με αγνώστους τις κομβικές παραμέτρους. Ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου φαίνεται καλύτερα στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα

Θεωρείται μια επίπεδη αμφιέριστη δοκός με δεδομένη φόρτιση που διαιρείται σε 4 τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία. Η δοκός ισορροπεί και κάθε κόμβος παρουσιάζει δύο βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή τις μετατοπίσεις u_i και v_i .

Θέτοντας



$$\mathbf{q}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

έχουμε ότι οι βαθμοί ελευθερίας του κόμβου i περιορίζονται σε 1 (ο συμβολισμός αυτός χρησιμοποιείται για λόγους απλότητας) και ότι οι κομβικές παράμετροι συμπίπτουν με τις κομβικές μετατοπίσεις. Αντίστοιχα, για τις κομβικές δυνάμεις ισχύει

$$\mathbf{F}_i^e = \begin{Bmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \end{Bmatrix}$$

Άρα, εφόσον ο συνολικός αριθμός των κόμβων είναι 6 το μητρώο ακαμψίας του φορέα θα έχει διαστάσεις (6×6) και τα στοιχεία του \mathbf{k}_e θα είναι μητρώα (2×2) . Εξετάζοντας το πρώτο στοιχείο του φορέα έχουμε ότι η ισορροπία του κόμβου 1 εξαρτάται από τις μετατοπίσεις των κόμβων 1,2,3 (θεωρώντας σαν φορά διαγραφής την ανθρωπολογιακή) όπου, οι συντελεστές ακαμψίας είναι αντίστοιχα

Η Μέθοδος των Π. Σ. σε απλές περιπτώσεις

$$k_{11}^1, k_{13}^1, k_{12}^1$$

Οπότε, εφαρμόζοντας την (1.59) για το στοιχείο (1) προκύπτει

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{13}^1 & k_{12}^1 \\ k_{31}^1 & k_{33}^1 & k_{32}^1 \\ k_{21}^1 & k_{23}^1 & k_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_3^1 \\ F_2^1 \end{Bmatrix} \quad (\alpha)$$

Αντίστοιχα, για τα στοιχεία (2), (3), και (4) ισχύει

$$\begin{bmatrix} k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ k_{41}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^2 \\ F_3^2 \\ F_4^2 \end{Bmatrix} \quad (\beta)$$

$$\begin{bmatrix} k_{44}^3 & k_{43}^3 & k_{45}^3 \\ k_{34}^3 & k_{33}^3 & k_{35}^3 \\ k_{54}^3 & k_{53}^3 & k_{55}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_3 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4^3 \\ F_3^3 \\ F_5^3 \end{Bmatrix} \quad (\gamma)$$

$$\begin{bmatrix} k_{44}^4 & k_{45}^4 & k_{46}^4 \\ k_{54}^4 & k_{55}^4 & k_{56}^4 \\ k_{64}^4 & k_{65}^4 & k_{66}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4^4 \\ F_5^4 \\ F_6^4 \end{Bmatrix} \quad (\delta)$$

Παίρνοντας την ισορροπία σε κάθε κόμβο της δοκού προκύπτει

$$k_{11}^1 q_1 + k_{13}^1 q_3 + k_{12}^1 q_2 = F_1^1 = R_1$$

$$k_{21}^1 q_1 + (k_{22}^2 + k_{22}^2) q_2 + (k_{23}^1 + k_{23}^2) q_3 + k_{24}^2 q_4 = F_2^1 + F_2^2 = R_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P_{y2} \end{Bmatrix}$$

$$k_{31}^1 q_1 + (k_{32}^1 + k_{32}^2) q_2 + (k_{33}^1 + k_{33}^2 + k_{33}^3) q_3 + (k_{34}^2 + k_{34}^3) q_4 + k_{35}^3 q_5 = F_3^1 + F_3^2 + F_3^3 = R_3$$

$$k_{42}^2 q_2 + (k_{43}^2 + k_{43}^3) q_3 + (k_{44}^2 + k_{44}^3 + k_{44}^4) q_4 + (k_{45}^3 + k_{45}^4) q_5 + k_{46}^4 q_6 = F_4^2 + F_4^3 + F_4^4 = R_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P_{y4} \end{Bmatrix}$$

$$k_{53}^3 q_3 + (k_{54}^3 + k_{54}^4) q_4 + (k_{55}^3 + k_{55}^4) q_5 + k_{56}^4 q_6 = F_5^3 + F_5^4 = R_5$$

$$k_{64}^4 q_4 + k_{65}^4 q_5 + k_{66}^4 q_6 = R_6 = \begin{Bmatrix} -P_{x6} \\ -P_{y6} \end{Bmatrix}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας σε μητρωϊκή γραφή γράφονται ως εξής

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^1 + k_{23}^2 & k_{24}^2 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 + k_{32}^2 & k_{33}^1 + k_{33}^2 + k_{33}^3 & k_{34}^2 + k_{34}^3 & k_{35}^3 & 0 \\ 0 & k_{42}^2 & k_{43}^2 + k_{43}^3 & k_{44}^2 + k_{44}^3 + k_{44}^4 & k_{45}^3 + k_{45}^4 & k_{46}^4 \\ 0 & 0 & k_{53}^3 & k_{54}^3 + k_{54}^4 & k_{55}^3 + k_{55}^4 & k_{56}^4 \\ 0 & 0 & 0 & k_{64}^4 & k_{65}^4 & k_{66}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

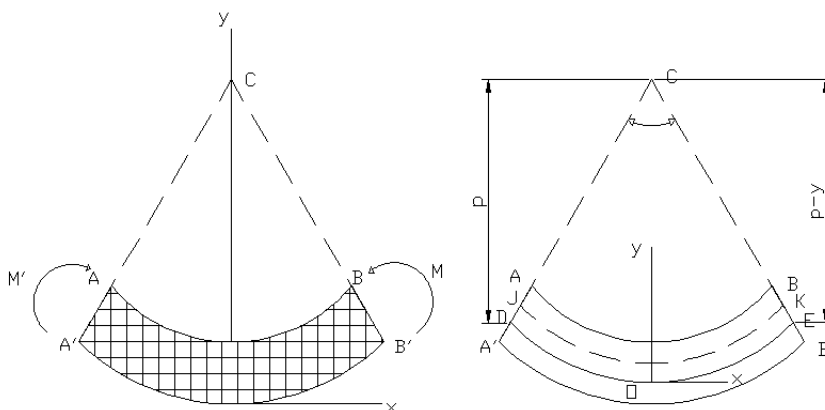
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΤΟ ANSYS

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Βρείτε της μέγιστης εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις κάμψεως σε ασύμμετρη δέσμη T υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφη κάμψη Mz , με διαστάσεις και γεωμετρικές ιδιότητες, όπως φαίνεται παρακάτω.(VM10)

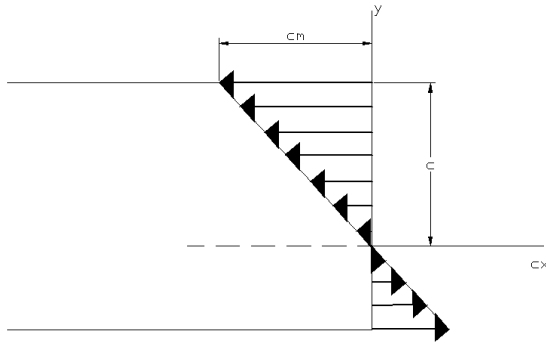
A . ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

ΘΕΩΡΙΑ (Βουθούνης)



Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου η ροπή κάμψης M είναι τέτοια ώστε οι ορθές τάσεις στο μέλος να παραμένουν κάτω από την τάση διαρροής σ_y . Αυτό σημαίνει ότι, για όλους τους πρακτικούς σκοπούς, οι τάσεις στο μέλος θα παραμένουν κάτω από το όριο αναλογίας και το όριο ελαστικότητας. Στην περίπτωση αυτή, δεν θα υπάρχουν μόνιμες παραμορφώσεις και θα εφαρμόζεται ο νόμος του **Hooke** για μονοαξονική τάση. Υποθέτοντας ότι το υλικό είναι ομογενές και συμβολίζοντας με E το μέτρο ελαστικότητάς του, έχουμε στη διαμήκη διεύθυνση x

$$\sigma_x = E \epsilon_x$$



Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της Εξ. 1 με E και γράφουμε $E \epsilon_x = - (y/c) * \sigma_m$, όπου σ_m συμβολίζει την μέγιστη απόλυτη τιμή της τάσης. Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι, στην ελαστική περιοχή, η ορθή τάση μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση από την ουδέτερη επιφάνεια.

$$\sigma_m = (M/I) * c$$

Αντικαθιστώντας την σ_m από την 1 στην 2, βρίσκουμε την ορθή τάση σ_x σε οποιαδήποτε απόσταση y από τον ουδέτερο άξονα:

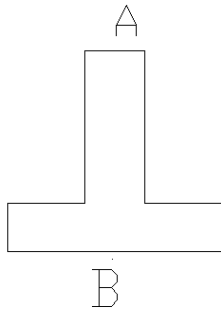
$$\sigma_x = - (M/I) * y$$

Οι εξισώσεις 1 και 2 ονομάζονται τύποι της ελαστικής κάμψης και η ορθή τάση σ_x που προκαλείται από την κάμψη ή τον λυγισμό του μέλους, αναφέρεται συχνά ως τάση κάμψης ή καμπτική τάση. Εύκολα επαληθεύουμε ότι η τάση είναι θλιπτική ($\sigma_x < 0$) πάντως από τον ουδέτερο άξονα ($y > 0$) όταν η καμπτική ροπή M είναι θετική και εφελκυστική ($\sigma_x > 0$) όταν η M είναι αρνητική.

Επιστρέφοντας στην Εξ. 2 σημειώνουμε ότι ο λόγος I/c εξαρτάται μόνο από την γεωμετρία της εγκάρσιας διατομής. Ο λόγος αυτός καλείται μέτρο ελαστικής κάμψης ή ελαστική ροπή αντίστασης και συμβολίζεται με S .

Έχουμε $S = I/c$ και αντικαθιστώντας έχουμε $\sigma_m = M/S$.

Επίλυση παραδείγματος διατομής 1



δεδομένα:

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi} \quad h = 8 \text{ in} \quad M_z = 100,000 \quad B = 9 \text{ in}$$

$$b = 1.5 \text{ in} \quad y' = 6 \text{ in} \quad I = 100 \text{ in}^4$$

Αναλυτική λύση:

Beam 54:

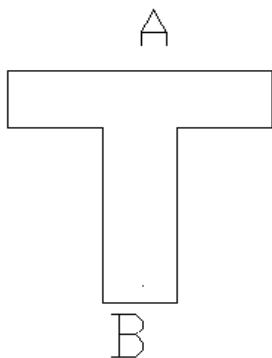
$$A : 16 \times 1,5 + (4 \times 9) = 60 \text{ in}^2$$

$$I_z : 2000 \text{ in}^4$$

$$\sigma_x \text{ πάνω} : - (M/I_z) \times Y = -(100,000/2000) \times 14 = -700 \text{ psi}$$

$$\sigma_x \text{ κάτω} : + (M/I_z) \times Y = +(100,000/2000) \times 16 = 300 \text{ psi}$$

Επίλυση παραδείγματος διατομής 2



δεδομένα:

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi} \quad h = 8 \text{ in} \quad M_z = 100,000 \quad B = 9 \text{ in}$$

$$b = 1.5 \text{ in} \quad y' = 14 \text{ in} \quad I = 100 \text{ in}^4$$

λύση:

Beam 54:

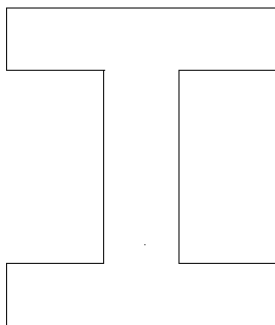
$$I_z : (1/12) \times 9 \times 20^3 - 2 \times (1/12) \times (7.5/2) \times 16^3 = 5316,7 \text{ in}^4$$

$$\sigma_x \text{ πάνω} : - (M/I_z) \times Y = -(100,000/5316,7) \times 6 = - 112,85 \text{ psi}$$

$$\sigma_x \text{ κάτω} : + (M/I_z) \times Y = +(100,000/5316,7) \times 14 = 263,3 \text{ psi}$$

$$A : 16 \times 1,5 + (4 \times 9) = 60 \text{ in}^2$$

Επίλυση παραδείγματος διατομής 3



δεδομένα:

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi} \quad h = 8 \text{ in} \quad M_z = 100,000$$

$$B = 9 \text{ in} \quad y' = 10 \text{ in} \quad I = 100 \text{ in}^4$$

λύση:

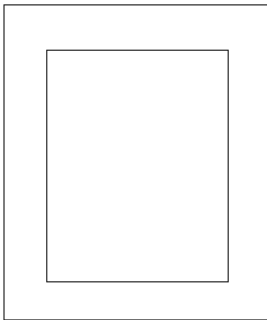
$$I_z : (1/12) \times 9 \times 20^3 - 2 \times (1/12) \times 3 \times 12^3 = 5136 \text{ in}^4$$

$$\sigma_x \text{ πάνω} : - (M/I_z) \times Y = -(100,000/5136) \times 10 = - 194,7 \text{ psi}$$

$$\sigma_x \text{ κάτω} : + (M/I_z) \times Y = +(100,000/5316) \times 10 = 194,7 \text{ psi}$$

$$A : 36 \times 2 + 36 = 108 \text{ in}^2$$

Επίλυση παραδείγματος διατομής 4



δεδομένα:

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi} \quad h = 8 \text{ in} \quad M_z = 100,000$$

$$B = 9 \text{ in} \quad y' = 10 \text{ in} \quad I = 100 \text{ in}$$

λύση:


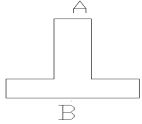

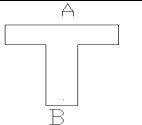

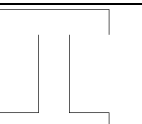

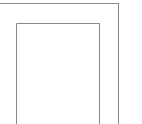
$$I_z : (1/12) \times 9 \times 20^3 - (1/12) \times 3 \times 14^3 = 5134 \text{ in}^4$$

$$\sigma_x \text{ πάνω} : - (M/I_z) \times Y = -(100,000/5134) \times 10 = - 188,18 \text{ psi}$$

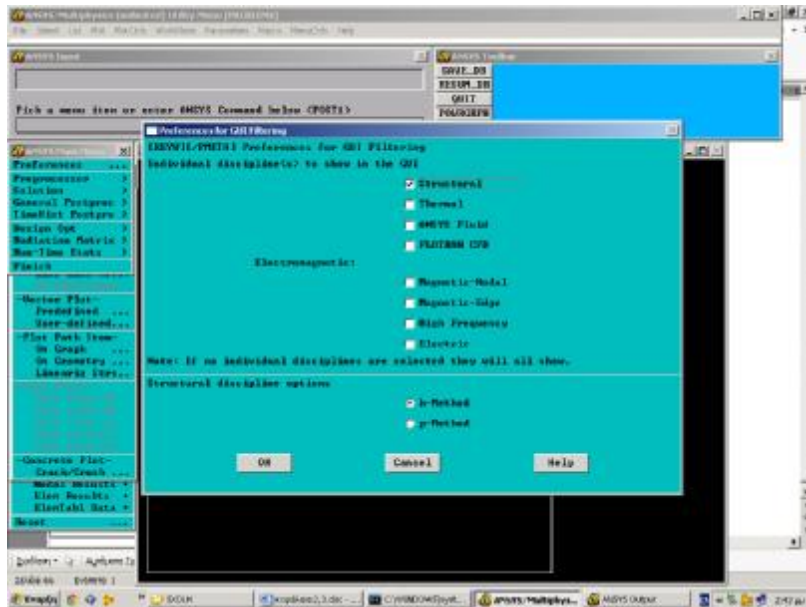
$$\sigma_x \text{ κάτω} : + (M/I_z) \times Y = +(100,000/5314) \times 10 = 188,18 \text{ psi}$$

$$A : 180 - 52 = 128 \text{ in}^2$$

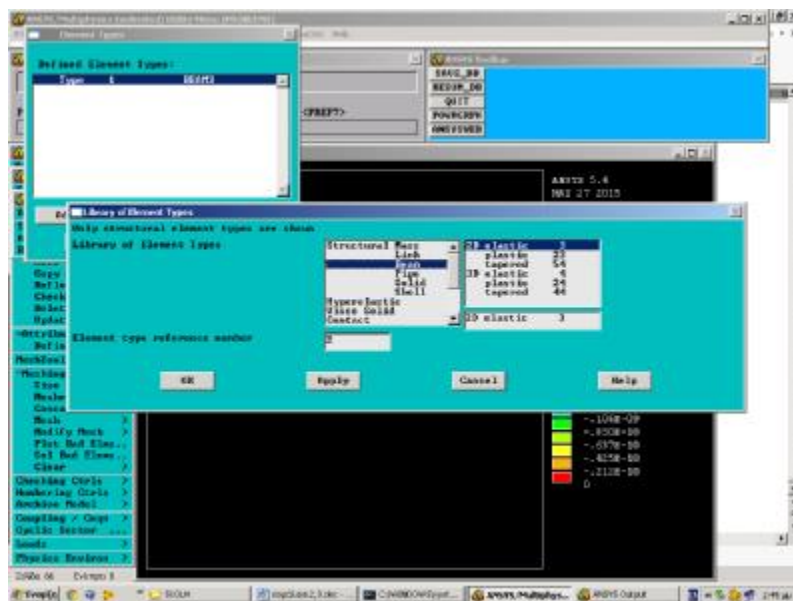
Γενικός πίνακας αποτελεσμάτων για κάθε διατομή

Beam	Διατομή	A	I		Σα psi	Σβ psi
		60	2000	0,00833	-700	300
		60	5316,7	0,00853	-112,8	263,3
		108	5136	0,003245	-194,7	194,7
		128	5134	0,003136	-188,18	188,18

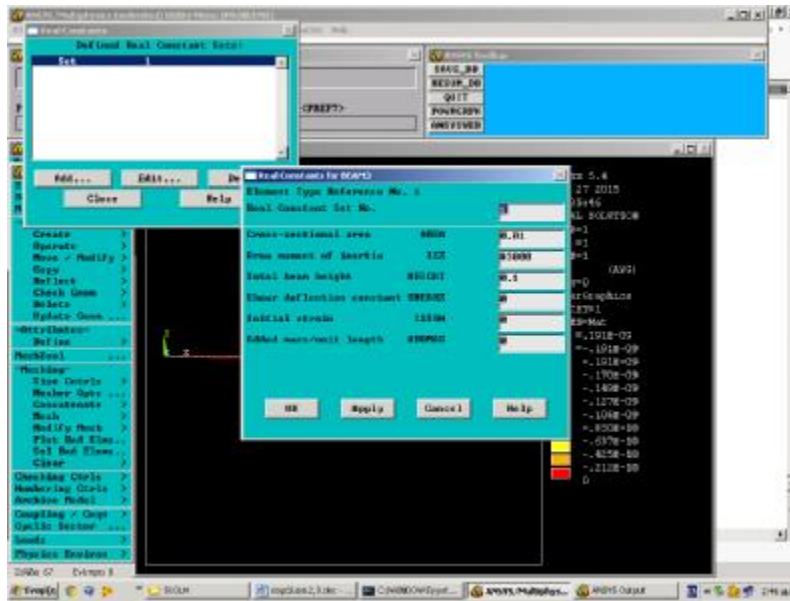
B. Επίλυση με Πεπερασμένα στοιχεία



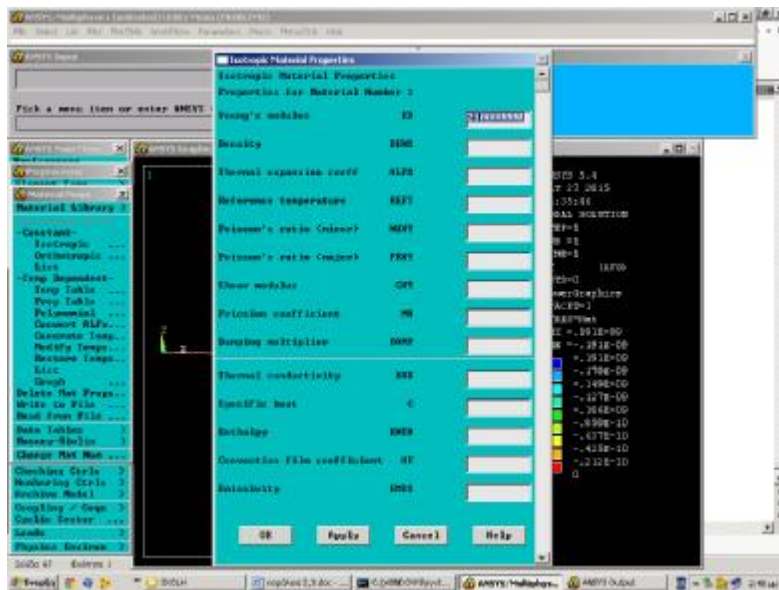
Εικόνα 34: Ορισμός δομοστατικού προβλήματος



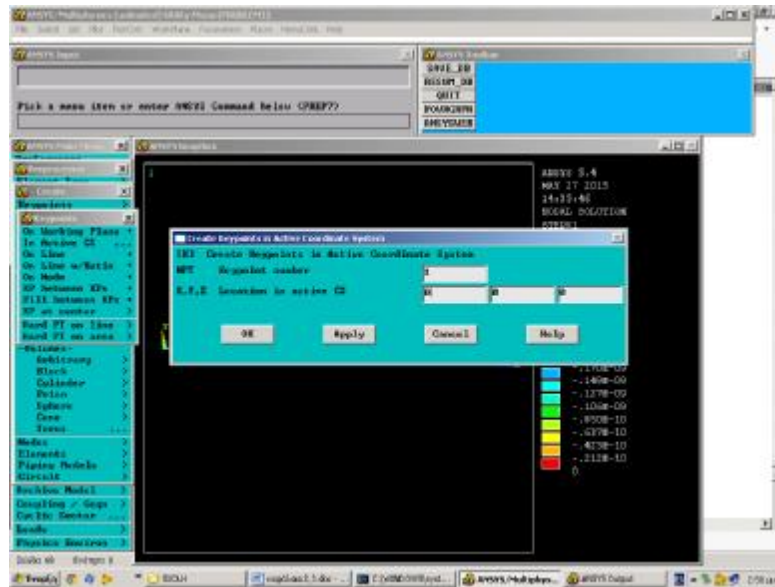
Εικόνα 35: Ορισμός τύπου ΠΣ



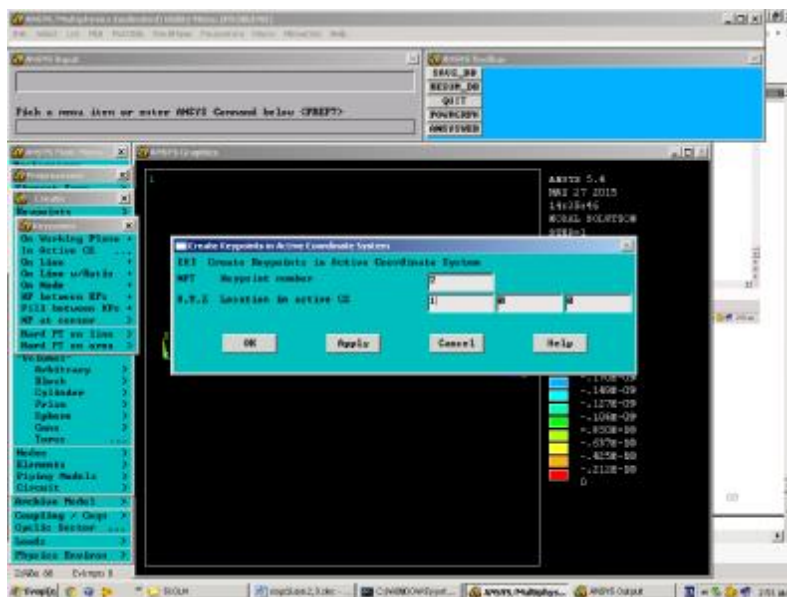
Εικόνα 36: Εισαγωγή σταθερών ποσοτήτων του προβλήματος



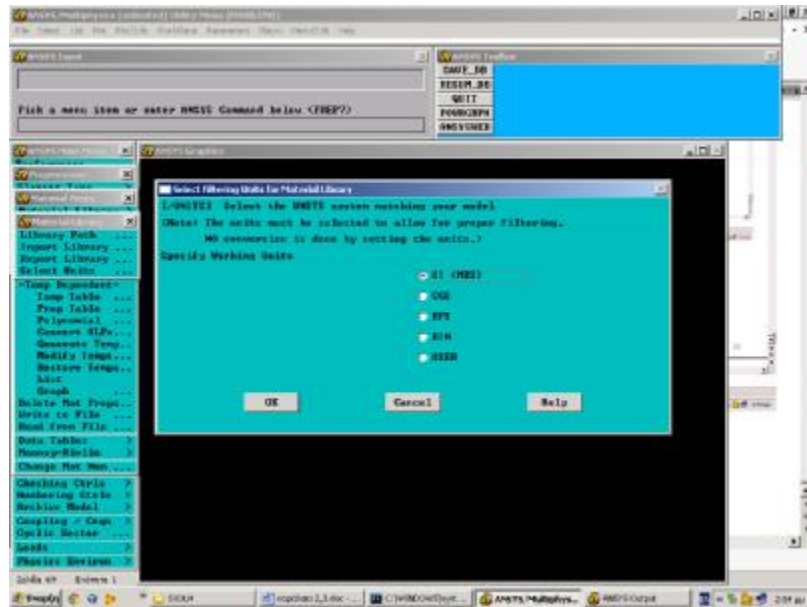
Εικόνα 37: Εισαγωγή του μέτρου ελαστικότητας για το υλικό



Εικόνα 38: Εισάγουμε σημεία κλειδιά για τη γεωμετρία του προβλήματος



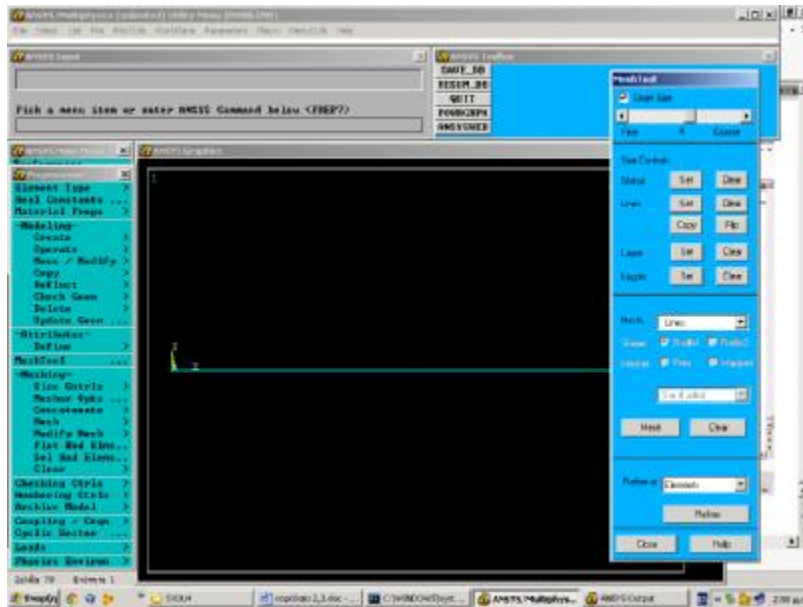
Εικόνα 39: Εισάγουμε σημεία κλειδιά για τη γεωμετρία του προβλήματος για να διευκολύνουμε τον σχεδιασμό



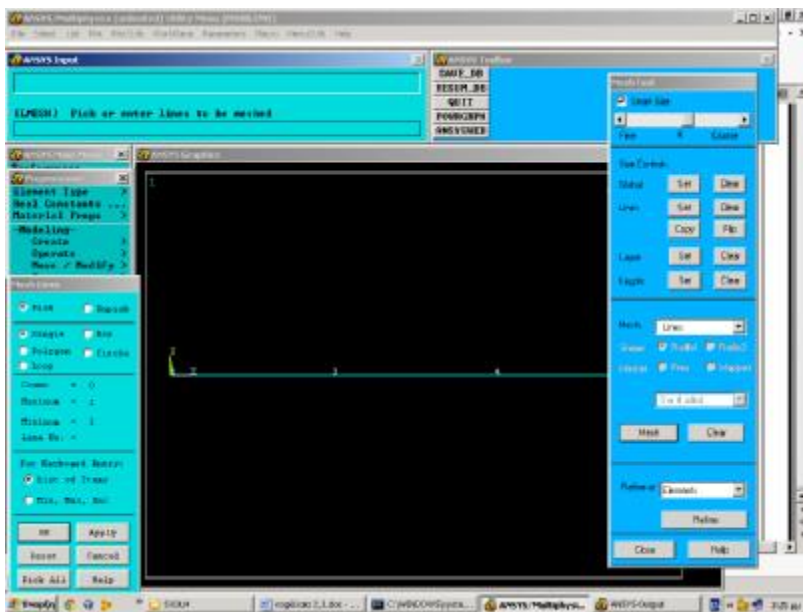
Εικόνα 40: Ορίσμου το σύστημα μονάδων (BIN)



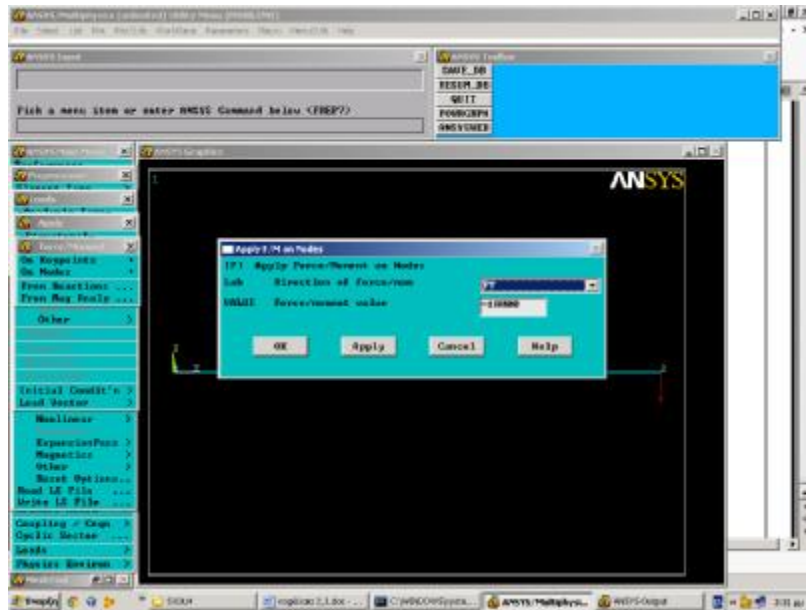
Εικόνα 41: Σχεδιάζουμε τη γεωμετρία με γραμμές



Εικόνα 42: Βλέπουμε το σύστημα συντεταγμένων



Εικόνα 43: Βλέπουμε τους κόμβους



Εικόνα 44: Εφαρμόζουμε τις στηρίξεις (συνοριακές συνθήκες)

Εφαρμογή 2

VM 184

4.92 SOLID92 3-D 10-Node Tetrahedral Structural Solid

4.92.1	Input Data
4.92.2	Element Properties
4.92.3	Element Loads
4.92.4	Element Results
4.92.5	Element Output
4.92.6	Element Output
4.92.7	Element Output
4.92.8	Element Output
4.92.9	Element Output
4.92.10	Element Output
4.92.11	Element Output
4.92.12	Element Output
4.92.13	Element Output
4.92.14	Element Output
4.92.15	Element Output
4.92.16	Element Output
4.92.17	Element Output
4.92.18	Element Output
4.92.19	Element Output
4.92.20	Element Output
4.92.21	Element Output
4.92.22	Element Output
4.92.23	Element Output
4.92.24	Element Output
4.92.25	Element Output
4.92.26	Element Output
4.92.27	Element Output
4.92.28	Element Output
4.92.29	Element Output
4.92.30	Element Output
4.92.31	Element Output
4.92.32	Element Output
4.92.33	Element Output
4.92.34	Element Output
4.92.35	Element Output
4.92.36	Element Output
4.92.37	Element Output
4.92.38	Element Output
4.92.39	Element Output
4.92.40	Element Output
4.92.41	Element Output
4.92.42	Element Output
4.92.43	Element Output
4.92.44	Element Output
4.92.45	Element Output
4.92.46	Element Output
4.92.47	Element Output
4.92.48	Element Output
4.92.49	Element Output
4.92.50	Element Output
4.92.51	Element Output
4.92.52	Element Output
4.92.53	Element Output
4.92.54	Element Output
4.92.55	Element Output
4.92.56	Element Output
4.92.57	Element Output
4.92.58	Element Output
4.92.59	Element Output
4.92.60	Element Output
4.92.61	Element Output
4.92.62	Element Output
4.92.63	Element Output
4.92.64	Element Output
4.92.65	Element Output
4.92.66	Element Output
4.92.67	Element Output
4.92.68	Element Output
4.92.69	Element Output
4.92.70	Element Output
4.92.71	Element Output
4.92.72	Element Output
4.92.73	Element Output
4.92.74	Element Output
4.92.75	Element Output
4.92.76	Element Output
4.92.77	Element Output
4.92.78	Element Output
4.92.79	Element Output
4.92.80	Element Output
4.92.81	Element Output
4.92.82	Element Output
4.92.83	Element Output
4.92.84	Element Output
4.92.85	Element Output
4.92.86	Element Output
4.92.87	Element Output
4.92.88	Element Output
4.92.89	Element Output
4.92.90	Element Output
4.92.91	Element Output
4.92.92	Element Output
4.92.93	Element Output
4.92.94	Element Output
4.92.95	Element Output
4.92.96	Element Output
4.92.97	Element Output
4.92.98	Element Output
4.92.99	Element Output
4.92.100	Element Output

SOLID92 has a nonlinear displacement behavior and is well suited to model irregular meshes. It has an undrained linear elastic (COUPLED) behavior. A 20-node brick shaped element, [SOLID209](#) is described in [Section 4.95](#). A 4-node tetrahedral element, [SOLID4](#) is described in [Section 4.92](#).

The element is defined by ten nodes having three degrees of freedom at each node: translations in the nodes X, Y, and Z directions. The element also has plasticity, creep, swelling, stress stiffening, large deflection, and large strain capabilities. See [Section 4.92](#) in the *ANSYS Theory Reference* for more details about the element.

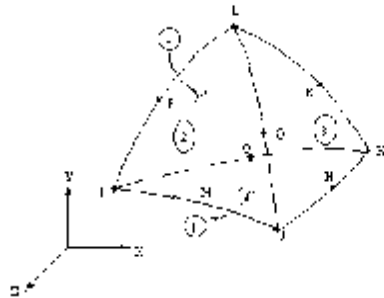


Figure 4.92-1 SOLID92 3-D 10-Node Tetrahedral Structural Solid

4.92.1 Input Data

The geometry, node locations, and the coordinate system for this element are shown in Figure 4.92-1.

ANSYS Elements Reference, 000853, Ninth Edition, SAS IP, Inc.®

4-645

Chapter 4 The Element Library

Beside the nodes, the element input data includes the orthotropic material properties. Orthotropic material directions correspond to the element coordinate directions. The element coordinate system orientation is as described in [Section 2.3](#). Properties not input default as described in [Section 2.4](#).

Element loads are described in [Section 2.6](#). Pressures may be input as surface loads on the element faces as shown by the circled numbers on Figure 4.92-1. Positive pressures act into the element. Temperatures and fluences may be input as element body loads at the nodes. The node I temperature $T(I)$ defaults to TUNIF. If all other temperatures are unspecified, they default to $T(I)$. If all corner node temperatures are specified, each midside node temperature defaults to the average temperature of its adjacent corner nodes. For any other input temperature pattern, unspecified temperatures default to TUNIF. Similar defaults occur for fluence except that zero is used instead of TUNIF.

A summary of the element input is given in Table 4.92-1. A general description of element input is given in [Section 2.1](#).

Table 4.92-1 SOLID92 Input Summary

Element Name	SOLID92
Nodes	I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R

Degrees of Freedom	LX, UX, LZ
Real Constants	None
Material Properties	EX, EY, EZ, A_LFX, A_LFY, A_LFZ, PRXY, PRYZ, PRXZ or HUXY, HUYZ, HJXZ, DEHS, GXY, GYZ, GXZ, D4W P
Surface Loads	Pressures: face 1 (J-K), face 2 (I-J-L), face 3 (J-K-L), face 4 (K-I-L)
Body Loads	Temperatures: T(0), T(1), T(2), T(3), T(4), T(5), T(6), T(7), T(8), T(9) Fluxes: F1(0), F1(1), F1(2), F1(3), F1(4), F1(5), F1(6), F1(7), F1(8), F1(9) F1(0), F1(1), F1(2), F1(3)
Special Features	Flexibility, Creep, Swelling, Stress stiffening, Large deflection, Large strain, Birth and death, Adaptive descent
KEYOPT(5)	0 - Elastic element printout 1 - Elastic element printout
KEYOPT(6)	0 - Elastic element printout 1 - Elastic element printout 2 - Elastic element printout 3 - Elastic element printout 4 - Surface printout for faces with zero pressure

4.92.2 Output Data

The solution output associated with the element is in two forms: 1) nodal displacements included in the overall nodal solution, and 2) additional element output as shown in Table 4.92-2. Several items are illustrated in Figure 4.92-2. The element stress directions are parallel to the element coordinate system. The surface stress outputs are in the surface coordinate system and are available for any face (KEYOPT(6)). The coordinate system for face JIK is shown in Figure 4.92-2. The other surface coordinate systems follow similar orientations as indicated by the pressure face node description. Surface stress printout is valid only if the conditions described in Section 2.2.2 are met. A general description of solution output is given in Section 2.2. See the [ANSYS Basic Analysis Procedures Guide](#) for ways to view results.

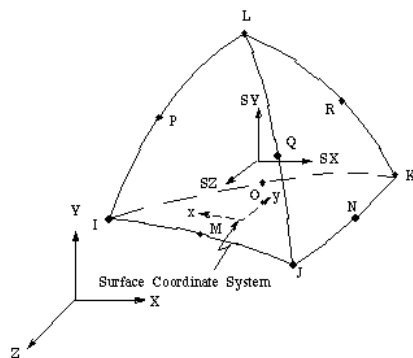


Figure 4.92-2 SOLID92 Stress Output

The following notation is used in Table 4.92-2:

A color () in the Name column indicates the item can be accessed by the Component Name method (ETABLE) (ESOL) (see Section 2.2.2). The "C" and "R" columns indicate the availability of the items on the file Jobname.OUT ("O") or on the results file ("R"): a "*" indicates that the item is *always* available, a number refers to a table formula which describes when the item is *conditionally* available, and a blank indicates that the item is *not* available.

Table 4.92-2a SOLID92 Element Output Definitions

Name	Definition	O	R
EL	Element number	*	*
NODES	Corner nodes = I, J, K, L	*	*
AREA	Element area	*	*
VOLUME	Volume	*	*
CENT(X, Y, Z)	Global X, Y, Z location of centroid	*	*
PRES	Pressures: P1 at nodes J,K; P2 at I,J,L; P3 at J,K,L; P4 at I,J,L	*	*
TEMP	Temperatures: T(I), T(J), T(K), T(L), T(M), T(N), T(O), T(P), T(Q), T(R)	*	*
FLUX	Fluxes: FL(I), FL(J), FL(K), FL(L), FL(M), FL(N), FL(O), FL(P), FL(Q), FL(R)	*	*
S-POT	Element potential	*	*
S-EQV	Equivalent stress	*	*
S(X, Y, Z, XX, YY, ZZ)	Stresses	*	*
S-T, R, T	Principal stresses	*	*
SPR(X, Y, Z, X1, Y1, Z1)	Element strain	*	*
TEMP(C, T, S, a)	Temperature stabilizations	*	*
SPR(X, Y, Z, XX, YY, ZZ)	Element strain	1	1
SPR(X, Y, Z, XX, YY, ZZ)	Element strain	1	1
DISP(A)	Displacement	1	1
AVGTEMP	Average temperature	1	1
RATIO	Ratio of total stress to stress on a slide surface	1	1

<i>TRI</i>	Nodes on this face	2	
<i>AREA</i>	Face area	2	
<i>TEMP</i>	Face average temperature	2	

(continued on next page)

ANSYS Elements Reference . 000833 . Ninth Edition . SAS IP, Inc.®

4-648

4.92 SOLID92

(continued from previous page)

Name	Definition	O	R
<i>EPEL(X,Y,XY)</i>	Surface elastic strains	2	
<i>PRES</i>	Surface pressure	2	
<i>S(X,Y,XY)</i>	Surface stresses	2	
<i>S(1,2,3)</i>	Surface principal stresses	2	
<i>SINT</i>	Surface stress intensity	2	
<i>SEQV</i>	Surface equivalent stress	2	

1. Nonlinear solution (output if the element has a nonlinear material)
2. Face output (if KEYOPT(6)=4 and a nonzero pressure face)

Table 4.92-2b SOLID92 Miscellaneous Element Output

Description	Names of Items Output	O	R
<i>Integration Point Stress Solution</i>	TEMP, SINT, SEQV, EPEL, S, EPPL, EPCR, EPSW, EPEQ, SRAT, SEPL, HPRES	1	
<i>Nodal Stress Solution</i>	LOCATION, TEMP, SINT, SEQV, S	2	

1. Output at each integration point, if KEYOPT(5)=1
2. Output at each vertex node, if KEYOPT(5)=2

Table 4.92-3 lists output available through the **ETABLE** command using the Sequence Number method. See Section 2.2.2 of this manual and the **ANSYS Basic Analysis Procedures Guide** for further information. The following notation

Name - output quantity as defined in the Table 4.92-2
 Item - predetermined *Item* label for **ETABLE** command
 I,J,...,R - sequence number for data at nodes I,J,...,R

Table 4.92-3 SOLID92 Item and Sequence Numbers for the ETABLE and ESOL Commands:

Name	Item	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
P1	SMISC	2	1	3							
P2	SMISC	4	5		6						
P3	SMISC		7	8	9						
P4	SMISC	11		10	12						

ANSYS Elements Reference . 000053 . Ninth Edition . SAS IP, Inc. ©

4-649

Chapter 4 The Element Library

4.92.3 Assumptions and Restrictions

The element must not have a zero volume. Elements may be numbered either as shown in Figure 4.92-1 or may have node L below the IJK plane. An edge with a removed midside node implies that the displacement varies linearly, rather than parabolically, along that edge.

4.92.4 Product Restrictions

When used in the product(s) listed below, the stated product-specific restrictions apply to this element in addition to the general assumptions and restrictions given in the previous section.

When used in the product(s) listed below, the stated product-specific restrictions apply to this element in addition to the general assumptions and restrictions given in the previous section.

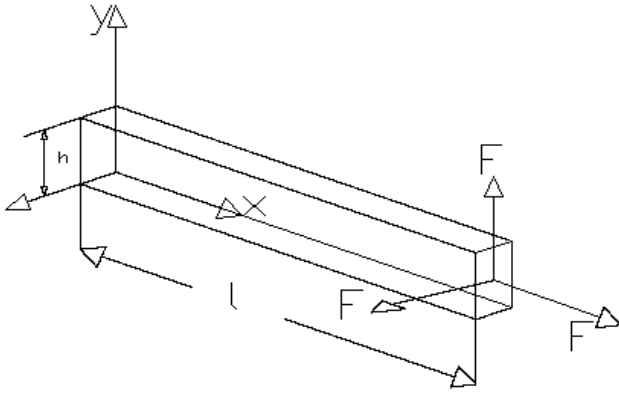
ANSYS/LinearPlus

- The DAMP material property is not allowed.
- Fluence body loads are not applicable.
- The only special feature allowed is stress stiffening.

SOLUTION

Vm184

Solid 92



Materials Properties: $E = 10 \times 10^6$ Geometric Properties: $I = 6$ in

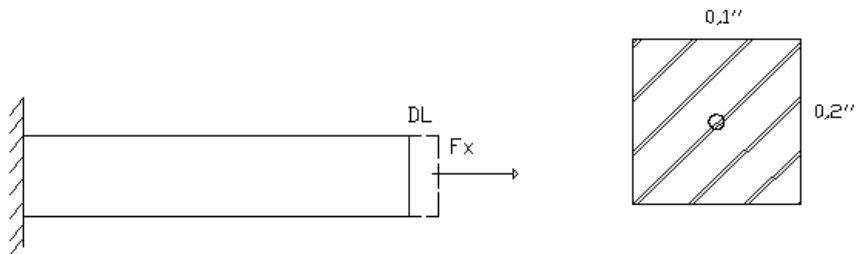
$$\nu = 0,3$$

$$h = 0,2 \text{ in}$$

$$t = 0,1 \text{ in}$$

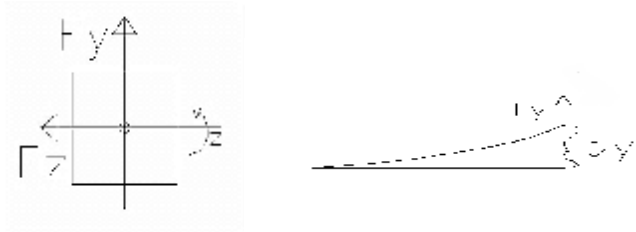
Loading: $F = 1\text{lb}$

Αναλυτική επίλυση της άσκησης



$$\rightarrow d_x = (DL_x / L_0) \times L_0 = E_x \times L_0 = (C_x / L_0) \times L_0$$

$$d_x = ((F_x/A) / E) \times L_0 = (F_x \times L_0) / (A \times E) = (1 \times 6) / (0,20 \times 0,10 \times 10^{-7}) = 3 \times 10^{-5}$$

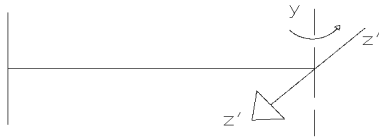


$$d_y = (F_y \times L^3) / (3 \times E \times I) = 1 \times 6^3 / (3 \times 10^7 \times I)$$

$$\rightarrow I_{zz} = (1/12) \times 0,2^3 \times 0,1 = (2/3) \times 10^{-4} \text{ (in}^4\text{)}$$

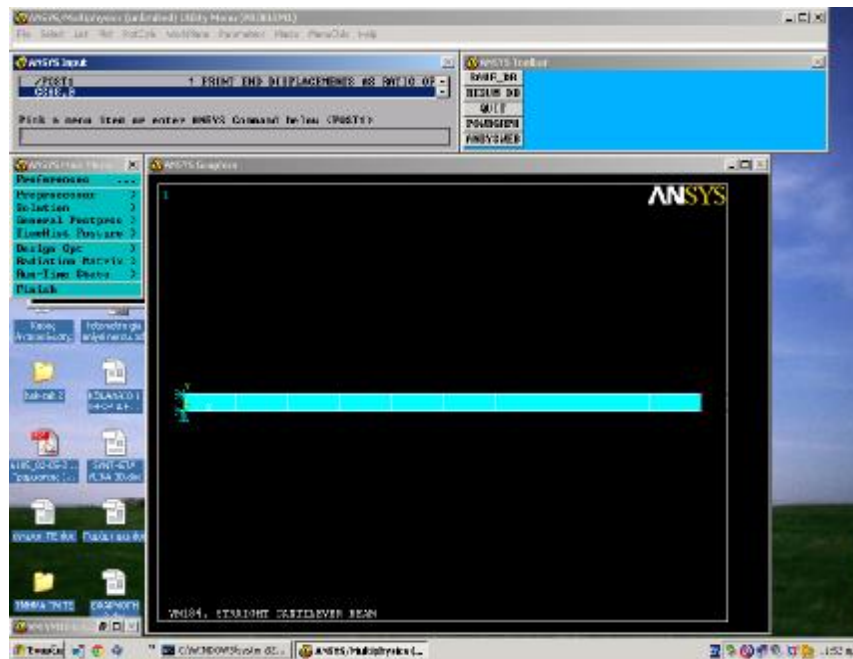
Ara:

$$\rightarrow dy = (3 \times 36) / 10^3 = 108 \times 10^{-3} = 0,108 \text{ in}$$

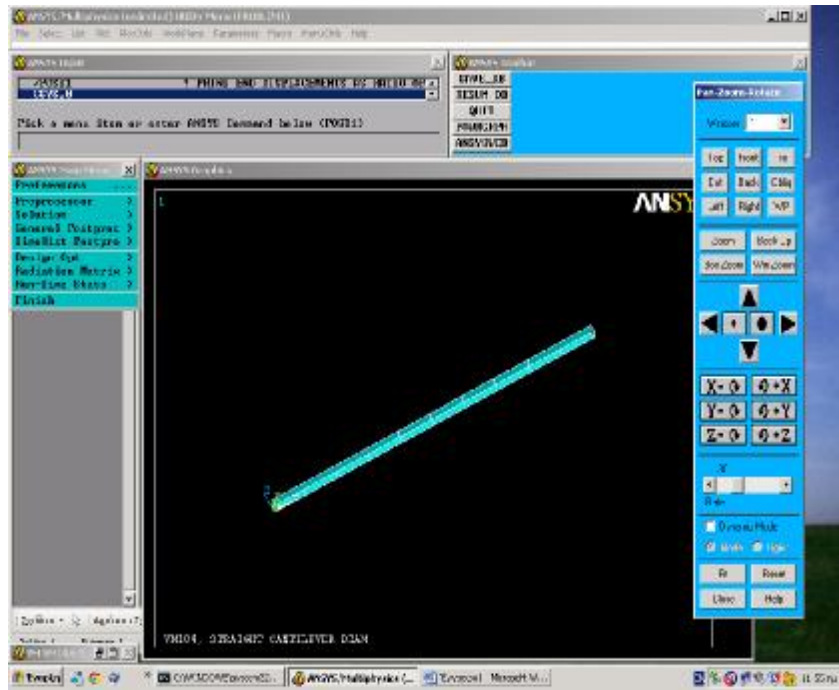


$$\rightarrow dz = F_z \times L^3 / (3 \times E \times I) = 6^4 / 3 \times 10^{-3} = 0,432 \text{ (in)}$$

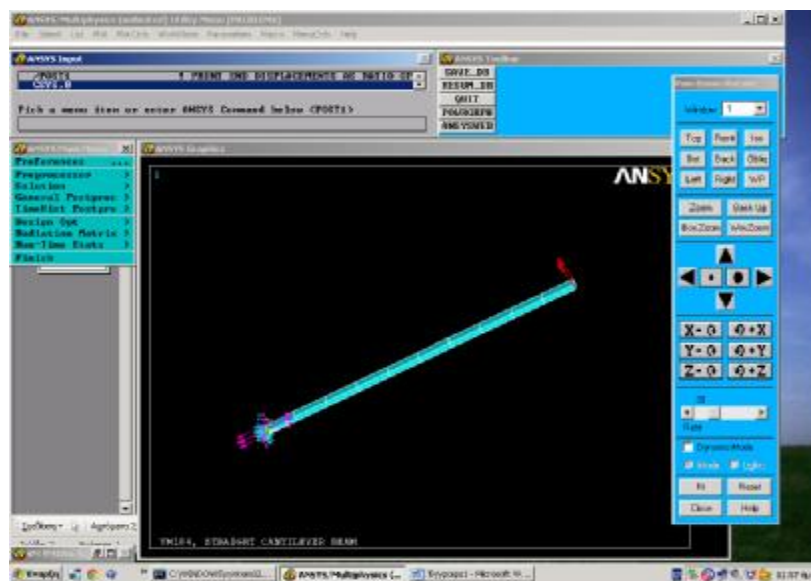
Επίλυση της Vm 184 μέσω ANSYS :



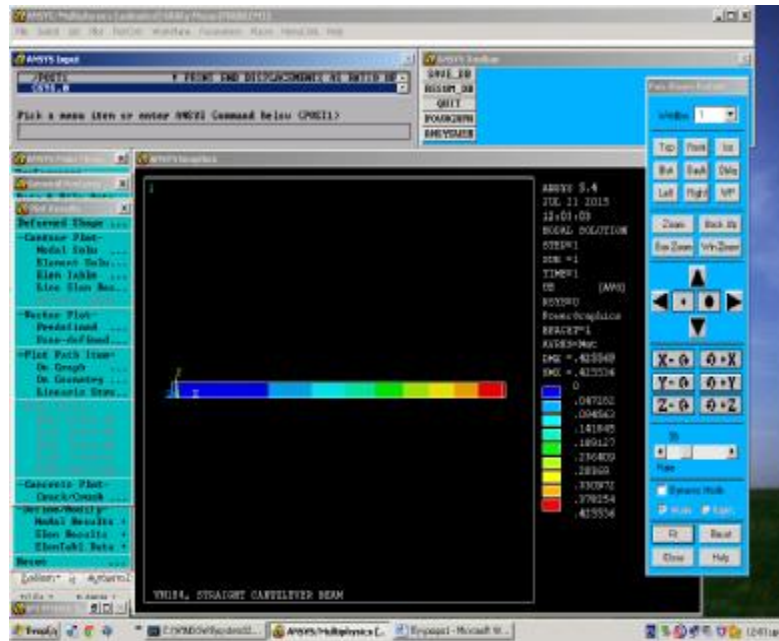
Εικόνα 45: Ανάλυση δοκού σε πεπερασμένα στοιχεία



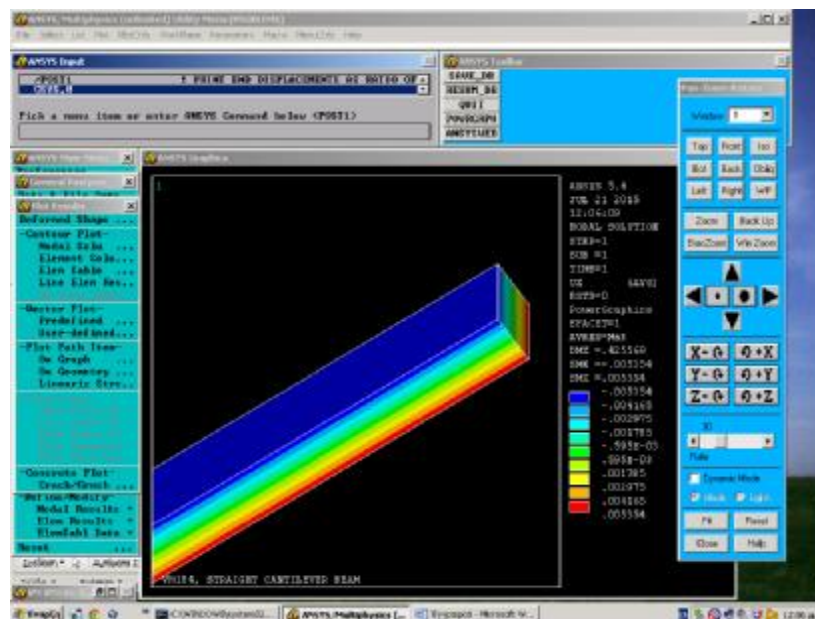
Εικόνα 46: 3-D Απεικόνιση της δοκού



Εικόνα 47: Φορτίσεις και αντιδράσεις



Εικόνα 48: Επιμήκυνση στην Z-κατεύθυνση



Εικόνα 49: Επιμήκυνση στην X-κατεύθυνση (εφελκυσμός στην κάτω πλευρά και θλίψη στην άνω πλευρά)

SOLID 92	Target	ANSYS	Ratio
dx,in	3.000×10^{-5}	2.9906×10^{-5}	0.995
dx,in	0.10800	0.10672	0.988
dx,in	0.43200	0.42554	0.985

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕC#3 ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΑΠΟ ΧΑΛΥΒΑ

ΤΕΧΝΙΚΟ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

για τη χρήση των Ευρωκωδίκων

*EN 1991-1-3 : Γενικές δράσεις –
Φορτία χιονιού*

Συντακτική Ομάδα

Νίκος Μαλακάτας, Δρ ΠΜ, Πρόεδρος CEN/TC250/SC1
Κώστας Τρέζος, Δρ ΠΜ, Επικ. Καθηγητής ΕΜΠ

Ευρωκώδικας 1991-1-3: Φορτία χιονιού

Περιεχόμενα του παρόντος κειμένου

- 1 Εισαγωγή**
 - 1.1 Τα Περιεχόμενα του Ευρωκώδικα 1991-1-3
 - 1.2 Σκοπός
 - 1.3 Πεδίο εφαρμογής
 - 1.4 Κατάταξη της δράσεως του χιονιού
 - 1.5 Εθνικά δεδομένα
- 2 Βασικές έννοιες, ορισμοί**
 - 2.1 Χαρακτηριστικό φορτίο χιονιού επί του εδάφους
 - 2.2 Εξαιρετικό φορτίο χιονιού επί του εδάφους
 - 2.3 Φορτίο χιονιού στην στέγη
 - 2.4 Μη παρασυρμένο φορτίο χιονιού επί της στέγης
 - 2.5 Παρασ Εξαιρετική παράσυρση συσσωρευση φορτίου χιονιού επί της στέγης υρμένο φορτίο χιονιού επί της στέγης
- 3 Η φύση της δράσεως του χιονιού**
 - 3.1 Καθορισμός της δράσεως του χιονιού
 - 3.2 Καταστάσεις σχεδιασμού
 - 3.3 Χάρτες χαρακτηριστικού φορτίου χιονιού στο έδαφος
 - 3.4 Συντελεστής έκθεσης και θερμικός συντελεστής
 - 3.5 Συντελεστές σχήματος
 - 3.6 Τοπικά φαινόμενα
- 4 Εφαρμογή**

1. Εισαγωγή

1.1 Τα Περιεχόμενα του Ευρωκώδικα 1991-1-3 είναι:

- | | |
|-------------|---|
| | Πρόλογος |
| 1. | Γενικά |
| 2. | Κατάταξη Δράσεων |
| 3. | Καταστάσεις Σχεδιασμού |
| 4. | Φορτία χιονιού επί του εδάφους |
| 5. | Φορτία χιονιού επί της στέγης |
| 6 | Τοπικά φαινόμενα |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α | Καταστάσεις σχεδιασμού και Διατάξεις φορτίων για χρήση σε διάφορες τοποθεσίες (κανονιστικό) |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β | Συντελεστές σχήματος φορτίου χιονιού για εξαιρετικές παρασύρσεις χιονιού (κανονιστικό) |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ | Ευρωπαϊκός χάρτης φορτίου χιονιού επί του εδάφους (πληροφοριακό) |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ | Προσαρμογή του φορτίου χιονιού επί του εδάφους ανάλογα με την περίοδο επαναφοράς (πληροφοριακό) |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε | Φαινόμενη πυκνότητα βάρους φυσικώς συσσωρευμένου χιονιού (πληροφοριακό) |

1.2 Σκοπός: ο προσδιορισμός της δράσεως του χιονιού σε δομήματα Πολιτικού Μηχανικού (ως σύνολο) καθώς και σε επιμέρους στοιχεία των δομημάτων.

1.3 Πεδίο εφαρμογής: Για κτήρια και τεχνικά έργα μέχρι υψόμετρο 1500m. Για τοποθεσίες με υψόμετρο μεγαλύτερο από 1500m πρέπει να γίνεται ειδική μελέτη και αξιολόγηση.

Ο Ευρωκώδικας αυτός δεν εφαρμόζεται για:

- Κρουστικά φορτία χιονιού που μπορεί να προκληθούν από ολίσθηση και πτώση χιονιού από μια υψηλότερη στέγη.
- Πρόσθετα φορτία ανεμοπίεσεως που μπορεί να προκληθούν από την αλλαγή του σχήματος ή του μεγέθους της κατασκευής λόγω της παρουσίας χιονιού ή πάγου.
- Φορτία σε περιοχές με χιονοκάλυψη καθ' όλη την διάρκεια του έτους.
- Φορτία λόγω της ύπαρξης πάγου.
- Πλευρικά φορτία χιονιού (π.χ.: πλευρική πίεση λόγω συσσώρευσης χιονιού.)
- Φορτία χιονιού επί γεφυρών.

1.4 Κατάταξη της δράσεως του χιονιού

Το χιόνι χαρακτηρίζεται ως μια στατική δράση, μεταβλητή ως προς τον χρόνο αλλά σταθερή ως προς τον χώρο. Σε ειδικές καταστάσεις η δράση του χιονιού μπορεί να θεωρηθεί ως τυχαματική δράση, συνήθως μικρής διάρκειας αλλά σημαντικής έντασης με μικρή πιθανότητα εμφάνισης κατά την διάρκεια της ωφέλιμης διάρκειας της κατασκευής.

1.5 Εθνικά δεδομένα: Όσα στοιχεία εξαρτώνται από την τοποθεσία του δομήματος και την ποιότητα των μετεωρολογικών στοιχείων δίνονται στα εθνικά προσαρτήματα της κάθε χώρας.

2. Βασικές έννοιες, ορισμοί

Στον Ευρωκώδικα αυτό εισάγονται οι εξής έννοιες:

2.1 Χαρακτηριστικό φορτίο χιονιού επί του εδάφους. Είναι το φορτίο χιονιού στο έδαφος με ετήσια πιθανότητα υπέρβασης 2%, το οποίο προέκυψε μη λαμβάνοντας υπόψη τα «εξαιρετικά» φορτία χιονιού.

2.2 Εξαιρετικό φορτίο χιονιού επί του εδάφους. Το φορτίο του στρώματος χιονιού επί του εδάφους, που είναι αποτέλεσμα μιας χιονοπτώσεως με εξαιρετικά σπάνια πιθανότητα εμφανίσεως. Σε ορισμένες περιοχές έχουν παρατηρηθεί εξαιρετικά έντονες χιονοκαλύψεις ως αποτέλεσμα χιονοπτώσεων σημαντικά μεγαλύτερων από ότι συνήθως παρατηρείται στην περιοχή. Το να συμπεριλάβει κανείς τις χιονοπτώσεις αυτές στην στατιστική επεξεργασία θα οδηγήσει σε δυσανάλογα μεγάλες τιμές του χαρακτηριστικού φορτίου χιονιού επί του εδάφους.

Πότε ένα φορτίο χιονιού επί του εδάφους χαρακτηρίζεται ως εξαιρετικό»?

Σύμφωνα με την Ευρωπαϊκή έρευνα για την σύνταξη των χαρτών ακολουθήθηκε ως εξής ορισμός του εξαιρετικού φορτίου χιονιού:

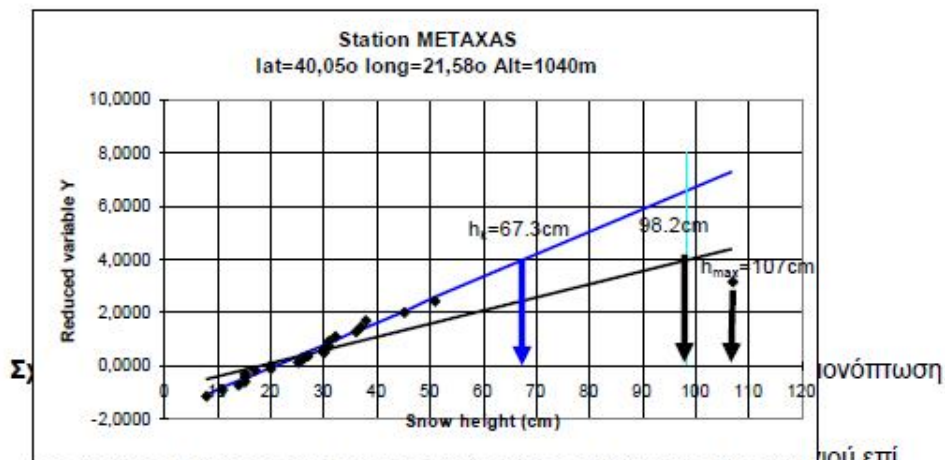
Εκπαιδευτικές Σημειώσεις ΤΕΕ : EN 1991-1-3

N. Μαλακάτας, Κ. Τρέζος

Αν ο λόγος της μέγιστης παρατηρηθείσας τιμής του φορτίου χιονιού επί του εδάφους, s_{max} , προς την χαρακτηριστική τιμή, s_k , του φορτίου χιονιού που προκύπτει αγνοώντας την μέγιστη αυτή τιμή, είναι μεγαλύτερος του 1.5 τότε η μέγιστη παρατηρηθείσα τιμή πρέπει να θεωρηθεί ως εξαιρετική τιμή.

Παράδειγμα

Στο Σχήμα1 φαίνεται η στατιστική επεξεργασία του ύψους χιονιού για τον Σταθμό Μεταξάς. Η μέγιστη παρατηρηθείσα τιμή του ύψους χιονιού στο έδαφος είναι $h_{max}=107\text{cm}$ ενώ όλες οι υπόλοιπες είναι σημαντικά μικρότερες (κάτω από 50cm). Αν ληφθούν υπόψη όλες οι τιμές προκύπτει χαρακτηριστική τιμή ύψους χιονιού στο έδαφος ίση προς 98.2cm. Αν δεν ληφθεί υπόψη η μέγιστη τιμή, τότε η χαρακτηριστική τιμή που προκύπτει είναι $h_k=67.3\text{cm}$. Ο λόγος $h_{max}/h_k=107/67.3=1.59>1.50$ άρα η τιμή 107cm θεωρείται εξαιρετική τιμή.



του επί της στέγης είναι το γινόμενο της χαρακτηριστικής τιμής φορτίου χιονιού επί του εδάφους με τους κατάλληλους συντελεστές (συντελεστής σχήματος της στέγης, συντελεστής έκθεσης και θερμικός συντελεστής). Από τους τρεις συντελεστές καθοριστικός είναι ο συντελεστής σχήματος της στέγης.

2.4 Μή παρασυρμένο φορτίο χιονιού επί της στέγης. Η διάταξη του φορτίου που περιγράφει το ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο χιονιού επί της στέγης το οποίο επηρεάζεται μόνον από το σχήμα της στέγης, πριν συμβεί οποιαδήποτε αναδιάταξη του χιονιού λόγω άλλων κλιματολογικών δράσεων.

2.5 Παρασυρμένο φορτίο χιονιού επί της στέγης. Η διάταξη φορτίου που περιγράφει την κατανομή του φορτίου χιονιού επί της στέγης που είναι αποτέλεσμα της μετατόπισης του χιονιού από μια θέση σε άλλη θέση της στέγης π.χ. λόγω της δράσης του ανέμου.

2.6 Εξαιρετική παράσυρση-συσσώρευση φορτίου χιονιού επί της στέγης. Η διάταξη φορτίου που περιγράφει το φορτίο του στρώματος χιονιού

Εκπαιδευτικές Σημειώσεις TEE : EN 1991-1-3

N. Μαλακάτας, K. Τρέζος

επί της στέγης το οποίο είναι αποτέλεσμα ενός εξαιρετικά σπάνιου τρόπου απόθεσης ή μετατόπισής του. Οι εξαιρετικές παρασύρσεις αντιμετωπίζονται με τους κατάλληλους συντελεστές σχήματος που δίνονται στο Παράρτημα Β.

3. Η φύση της δράσεως του χιονιού

3.1 Καθορισμός της δράσεως του χιονιού

Η δράση του χιονιού θεωρείται ότι εξασκείται στις στέγες (οριζόντιες ή μη) των κτηρίων και άλλων τεχνικών έργων. Ως δράση λαμβάνεται το φορτίο (ομοιόμορφο ή μη) που οφείλεται στο ίδιο βάρος του χιονιού το οποίο έχει συσσωρευθεί είτε από ελεύθερη πτώση είτε έχει παρασυρθεί (είτε φυσικά λόγω της κλίσεως της στέγης ή/και του ανέμου είτε τεχνητά). Η δράση του χιονιού θεωρείται στατική, μεταβλητή στον χρόνο και σταθερή στον χώρο.

Το φορτίο χιονιού στην στέγη, s , προκύπτει από το χαρακτηριστικό φορτίο χιονιού στο έδαφος, s_k , (σε kPa)^a και το οποίο τροποποιείται με μια σειρά συντελεστών οι οποίοι λαβαίνουν υπόψη τους:

- ✓ την διαφοροποίηση του φορτίου από το έδαφος στην στέγη (συντελεστής σχήματος, μ),
- ✓ την έκθεση της στέγης στα καιρικά φαινόμενα (συντελεστής έκθεσης, C_e) και
- ✓ την επίδραση της θερμοκρασίας στην συσσώρευση του χιονιού στην στέγη (θερμικός συντελεστής, C_t).

Είναι δηλαδή:

$$s = \mu C_e C_t s_k$$

3.2 Καταστάσεις σχεδιασμού.

Σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 1990, οι καταστάσεις σχεδιασμού κατατάσσονται ως εξής:

“**Με διάρκεια**”^b αναφέρονται στην κανονική χρήση

“**Παροδικές**”^c προσωρινές καταστάσεις που αναφέρονται στην φάση της ανέγερσης ή επισκευής

“**Τυχηματικές**”^d αναφέρονται σε εξαιρετικές συνθήκες στις οποίες μπορεί να εκτεθεί η κατασκευή

“**Σεισμικές**”^e αναφέρονται στην έκθεση του φορέα σε σεισμικές δράσεις

Στην περίπτωση της δράσεως του χιονιού, ανάλογα με την χιονόπτωση (εξαιρετική ή μη εξαιρετική) και την παράσυρση του χιονιού (εξαιρετική ή μη εξαιρετική) διακρίνονται τέσσερις δυνατές περιπτώσεις (βλ. και τον επόμενο Πίνακα):

Χιονόπτωση

^a Επειδή το μέγεθος που μετρείται κατά τις μετεωρολογικές παρατηρήσεις είναι το φορτίο (σε ισοδύναμο ύδατος) ή το ύψος του χιονιού στο έδαφος

^b Persistent design situations

^c Transient design situations

^d Accidental design situations

^e Seismic design situations

Εκπαιδευτικές Σημειώσεις TEE : EN 1991-1-3

N. Μαλακάτας, Κ. Τρέζος

		Μη εξαιρετική	Εξαιρετική
Παράσυρση	Μη εξαιρετική	Περίπτωση Α	Περίπτωση Β1
	Εξαιρετική	Περίπτωση Β2	Περίπτωση Β3

- Για όλες τις τέσσερις Περιπτώσεις (Α, Β1, Β2 και Β3) θα πρέπει να εξετάζονται οι **"Με διάρκεια"** και **"Παροδικές"** καταστάσεις σχεδιασμού:
 - ο Χωρίς παράσυρση: $s = \mu_i C_e C_t S_k$
 - ο Με παράσυρση: $s = \mu_i C_e C_t S_k$
- Για τις οποίες οι συνδυασμοί είναι:
 - ο Όταν η δράση του χιονιού είναι κύρια μεταβλητή δράση:
$$\sum_{j=1} Y_{G,j} G_{k,j} + "Y_P P" + "Y_S S" + \sum_{l=1} Y_{Q,l} \Psi_{0,l} Q_{k,l}$$
 - ο Όταν η δράση του χιονιού είναι συνοδευούσα δράση:
$$\sum_{j=1} Y_{G,j} G_{k,j} + "Y_P P" + "Y_{Q,1} Q_{k,1}" + "Y_S \Psi_{0,s} S" + \sum_{l=2} Y_{Q,l} \Psi_{0,l} Q_{k,l}$$
- Επιπλέον, μόνον για τις τρεις περιπτώσεις Β (Β1, Β2 και Β3) θα πρέπει να εξετάζονται οι **"Τυχηματικές"** καταστάσεις σχεδιασμού όπου το χιόνι είναι η τυχηματική δράση:
$$\sum_{j=1} G_{k,j} + "A_d" + "P" + \Psi_{1,1} \Psi_{2,1} Q_{k,1} + \sum_{l=2} \Psi_{2,l} Q_{k,l}$$

Όπου A_d είναι η τιμή της τυχηματικής δράσεως του χιονιού η οποία είναι για την:

 - ο Περίπτωση Β1:
 - Χωρίς παράσυρση: $A_d = s = \mu_i C_e C_t C_{esl} S_k$
 - Με παράσυρση: $A_d = s = \mu_i C_e C_t C_{esl} S_k$
 - ο Περίπτωση Β2:
 - Με παράσυρση: $A_d = s = \mu_i S_k$ (για στέγες του Παραρτήματος Β)
 - ο Περίπτωση Β3:
 - Χωρίς παράσυρση: $A_d = s = \mu_i C_e C_t C_{esl} S_k$
 - Με παράσυρση: $A_d = s = \mu_i S_k$ (για στέγες του Παραρτήματος Β)

Η συνιστώμενη τιμή του συντελεστή εξαιρετικών φορτίων χιονιού είναι $C_{esl} = 2.0$

Οι συνιστώμενες τιμές για τους συντελεστές Ψ_0 , Ψ_1 και Ψ_2 για την δράση του χιονιού δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Περιοχές με υψόμετρο	Τιμή συνδυασμού Ψ_0	Συχνή τιμή Ψ_1	Οιονεί μόνιμη τιμή Ψ_2
1500m > H > 1000m	0,70	0,50	0,20
1000m > H	0,50	0,20	0,00

3.3 Χάρτες χαρακτηριστικού φορτίου χιονιού στο έδαφος.

Το χαρακτηριστικό φορτίο χιονιού στο έδαφος, s_k , εξαρτάται από την γεωγραφική θέση και το υψόμετρο της περιοχής.

Στο Παράρτημα Γ του Ευρωκώδικα δίνονται χάρτες με τις χαρακτηριστικές τιμές του φορτίου χιονιού, ανηγμένες στην στάθμη της θάλασσας, για τις Ευρωπαϊκές χώρες. Οι τιμές αυτές έχουν προκύψει από μια συντονισμένη έρευνα μεταξύ όλων των χωρών. Το Παράρτημα Γ είναι πληροφοριακό και δεν πρέπει να χρησιμοποιείται στους υπολογισμούς μιας και οι κανονιστικές διατάξεις του έχουν ενσωματωθεί με ελαφρές μικροδιαφορές. Με βάση την έρευνα αυτή, κάθε χώρα χωρίζεται, με κλιματικά κριτήρια, σε περιοχές στις οποίες η τιμή του χαρακτηριστικού φορτίου χιονιού στο έδαφος στην στάθμη της θάλασσας είναι σταθερή.

Οι τρεις ζώνες στις οποίες χωρίζεται η Χώρα είναι οι εξής:

Ζώνη Α: Νομοί Αρκαδίας, Ηλείας, Λακωνίας, Μεσσηνίας και όλα τα νησιά πλην των Σποράδων και της Εύβοιας

Ζώνη Γ: Νομοί Μαγνησίας, Φθιώπιδας, Καρδίτσας, Τρικάλων, Λάρισας, Σποράδες και Εύβοια

Ζώνη Β: Υπόλοιπη Χώρα

Επειδή το χαρακτηριστικό φορτίο χιονιού στο έδαφος εξαρτάται, με παραβολικό τρόπο, και από το υψόμετρο της περιοχής, δίνεται η σχέση μεταβολής του χαρακτηριστικού φορτίου συναρτήσεως του υψομέτρου. Η σχέση που προέκυψε για την Ελλάδα είναι:

$$s_k = 0,420 * Z - 0,030 \left[1 + \left(\frac{A}{917} \right)^2 \right]$$

Όπου:

A το υψόμετρο της περιοχής σε m,

Z αριθμός που παίρνει τις τιμές 1, 2 και 4 για τις τρεις ζώνες Α, Β και Γ αντίστοιχα.

Στο Εθνικό Προσάρτημα η παραπάνω σχέση απλοποιήθηκε ως εξής:

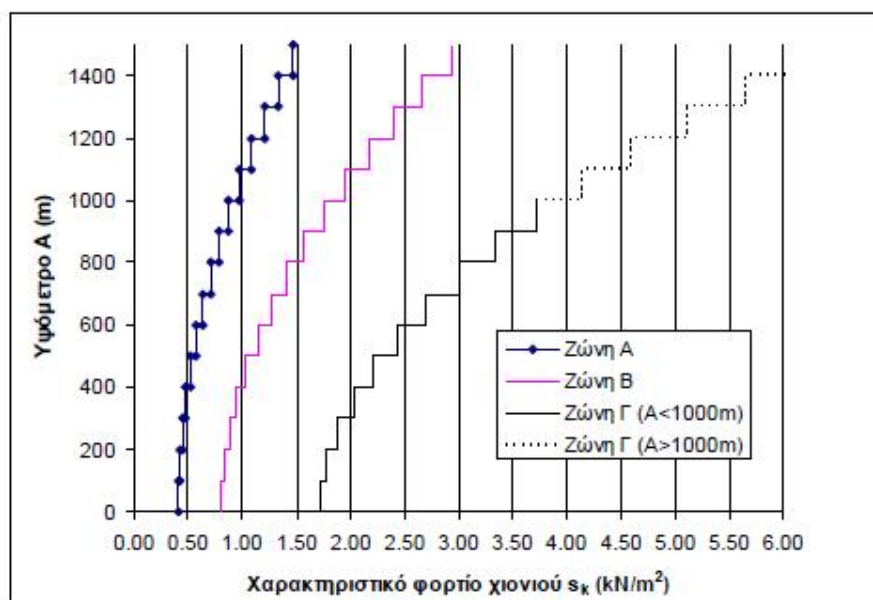
$$s_k = s_{k,0} \left[1 + \left(\frac{A}{917} \right)^2 \right]$$

Όπου:

$s_{k,0}$ το χαρακτηριστικό φορτίο χιονιού στο έδαφος στην στάθμη της θάλασσας και το οποίο παίρνει τις τιμές 0.4, 0.8 και 1.7kPa για τις τρεις ζώνες Α, Β και Γ αντίστοιχα.

Α είναι το υψόμετρο της περιοχής σε m το οποίο μετρείται με ακρίβεια 100m και στρογγυλεύεται στην αμέσως μεγαλύτερη εκατοντάδα (βλ Σχήμα 2 και Πίνακα 1).

Ειδικώς για την ζώνη Γ και για υψόμετρα μεγαλύτερα των 1000m, απαιτείται ειδική μελέτη, από την οποία η χαρακτηριστική τιμή του φορτίου χιονιού επί του εδάφους s_k θα προκύψει με την χρήση κατάλληλης στατιστικής επεξεργασίας[†] μακροχρόνιων μετρήσεων (τουλάχιστον 20 ετών) που έγιναν σε καλά προφυλαγμένο (υπήνεμο) χώρο κοντά στον τόπο του έργου. Πάντως στην περίπτωση που δεν υπάρχει καμία άλλη πληροφορία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η προεκβολή της καμπύλης Γ και για υψόμετρα μεγαλύτερα των 1000m (διακεκομμένη γραμμή στο Σχήμα 1), αλλά οι τιμές που προκύπτουν είναι δυσανάλογα μεγάλες.



Σχήμα 2 Χαρακτηριστικό φορτίο χιονιού στο έδαφος, s_k , συναρτήσεως του υψόμετρου για τις τρεις ζώνες της Ελλάδος.

[†] Η συνήθης πρακτική, η οποία ακολουθήθηκε και για την σύνταξη των Ευρωπαϊκών χαρτών, συνίσταται στην επιλογή του πιθανοτικού προσομοιώματος, στην εκτίμηση των παραμέτρων και τέλος στον υπολογισμό της χαρακτηριστικής τιμής πιθανότητας 98%. Συγκεκριμένα, το μέγιστο ετήσιο φορτίο χιονιού στο έδαφος θεωρείται ότι ακολουθεί κατανομή ακροτάτων

τύπου I (Gumbel), με αθροιστική συνάρτηση κατανομής: $F_S(s) = P(S < s) = e^{-e^{-\frac{s-u}{b}}}$, από τις μέγιστες ετήσιες τιμές εκτιμώνται οι παράμετροι u και b της κατανομής και τέλος η χαρακτηριστική τιμή υπολογίζεται από την σχέση $s_k = u + 3.90b$

Εκπαιδευτικές Σημειώσεις TEE : EN 1991-1-3

N. Μαλακάτας, Κ. Τρέζος

Πίνακας 1. Χαρακτηριστικό φορτίο χιονιού στο έδαφος, s_k , συναρτήσει του υψομέτρου για τις τρεις ζώνες της Ελλάδος.

Υψόμετρο A (m)		Ζώνη Α	Ζώνη Β	Ζώνη Γ
από	έως			
0	100	0.40	0.81	1.72
100	200	0.42	0.84	1.78
200	300	0.44	0.89	1.88
300	400	0.48	0.95	2.02
400	500	0.52	1.04	2.21
500	600	0.57	1.14	2.43
600	700	0.63	1.27	2.69
700	800	0.70	1.41	2.99
800	900	0.79	1.57	3.34
900	1000	0.88	1.75	3.72
1000	1100	0.98	1.95	Απαιτείται Ειδική μελέτη
1100	1200	1.08	2.17	
1200	1300	1.20	2.41	
1300	1400	1.33	2.66	
1400	1500	0.40	0.80	
1500	Και άνω	Δεν καλύπτεται από τον Ευρωκώδικα		

3.4 Συντελεστής έκθεσης και θερμικός συντελεστής

Η έκθεση μιας κατασκευής στην δράση του ανέμου καθώς και η διάδοση της θερμότητας διαμέσου μιας μη μονωμένης στέγης επηρεάζουν την συσσώρευση του χιονιού στην στέγη. Για να ληφθούν υπόψη τα φαινόμενα αυτά ο Ευρωκώδικας εισάγει τον συντελεστή έκθεσης, C_e , και τον θερμικό συντελεστή, C_t .

Γενικώς ο συντελεστής έκθεσης λαμβάνεται ίσος με την μονάδα $C_e=1$, εκτός αν η κατασκευή είναι προφυλαγμένη ή εκτεθειμένη οπότε ο συντελεστής C_e αυξομειώνεται κατά 20% αντιστοίχως.

Πίνακας 2. Συνιστώμενες τιμές του C_e για διάφορα τοπογραφικά χαρακτηριστικά

Τοπογραφικά Χαρακτηριστικά	C_e
Εκτεθειμένο ⁹	0,8
Κανονικό ^h	1,0
Προφυλαγμένο ^l	1,2

Η επιλογή της τιμής του C_e πρέπει να λαμβάνει υπόψη της την μελλοντική εξέλιξη της περιοχής γύρω από την εξεταζόμενη περιοχή, ιδίως όταν η εξέλιξη είναι προς την δυσμενή κατεύθυνση: Για παράδειγμα σε μια περιοχή, η οποία σήμερα είναι εκτεθειμένη και ενδεχομένως η χρήση της τιμής 0,8 να ήταν δικαιολογημένη, μπορεί στο μέλλον οι συνθήκες να αλλάξουν και η περιοχή να πρέπει να χαρακτηριστεί ως κανονική με συντελεστή έκθεσης ίσο με 1,0.

⁹ Επίπεδες εκτάσεις χωρίς εμπόδια εκτεθειμένες από όλες τις πλευρές χωρίς καθόλου, ή με λίγη προστασία από το φυσικό ανάγλυφο, τις υψηλότερες κατασκευές, ή τα δέντρα.

^h Περιοχές όπου δεν υπάρχει σημαντική μετακίνηση του χιονιού από τον άνεμο στις κατασκευές, λόγω του φυσικού αναγλύφου, των υψηλότερων κατασκευών, ή των δέντρων.

^l Περιοχές όπου η θεωρούμενη κατασκευή είναι σημαντικά χαμηλότερη από το φυσικό ανάγλυφο, ή περιβάλλεται από υψηλά δένδρα ή/και από υψηλότερες κατασκευές.

Εκπαιδευτικές Σημειώσεις TEE : EN 1991-1-3

N. Μαλακάτας, Κ. Τρέζος

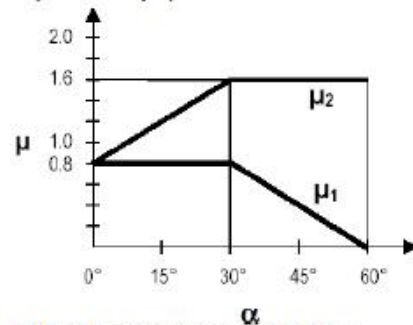
Ομοίως ο θερμικός συντελεστής λαμβάνεται γενικώς ίσος με την μονάδα: $C_t=1$. Παρόλο που θεωρητικώς προβλέπεται η δυνατότητα και για τιμές του C_t μικρότερες της μονάδας ιδίως σε ορισμένες γυάλινες στέγες, όπου το χιόνι λιώνει λόγω των απωλειών θερμότητας, ωστόσο ούτε στον Ευρωκώδικα ούτε στο Εθνικό Προσάρτημα δίνονται τιμές μικρότερες της μονάδας. Σχετικώς αξίζει να σημειωθεί ότι δεν είναι σπάνιες οι περιπτώσεις όπου σε μια μεγάλη χιονόπτωση παρατηρείται ταυτόχρονα και βλάβη στο σύστημα θέρμανσης (π.χ. από διακοπή του ηλεκτρικού ρεύματος, ή πάγωμα του πετρελαίου) οπότε στην περίπτωση αυτή θα έπρεπε ο θερμικός συντελεστής να ληφθεί ίσος με την μονάδα.

3.5 Συντελεστές σχήματος

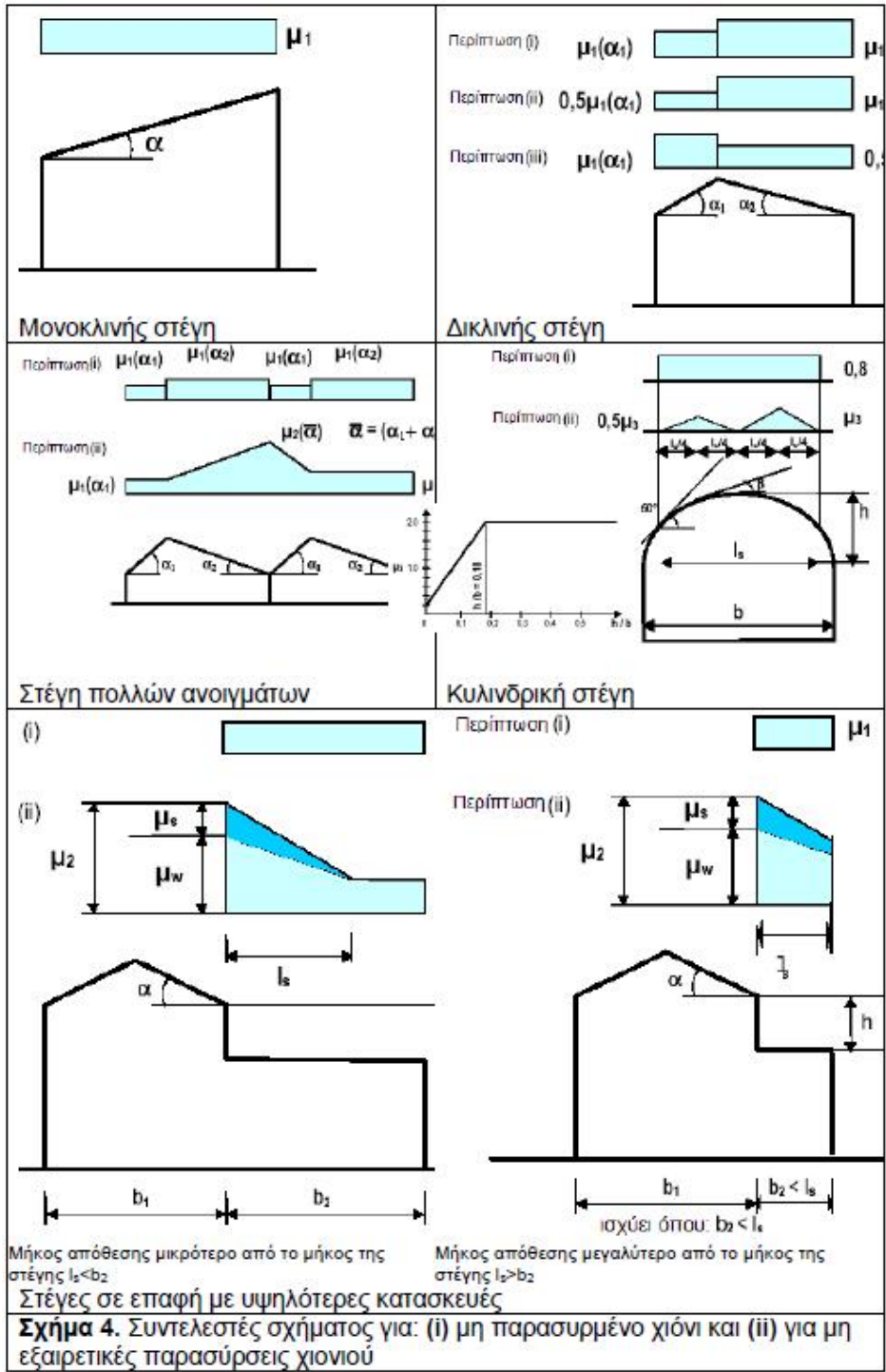
Οι συντελεστές σχήματος της στέγης χρησιμοποιούνται για την αναγωγή από το φορτίο χιονιού στο έδαφος σε φορτίο χιονιού στην στέγη. Γενικώς το φορτίο χιονιού στην στέγη εξαρτάται από:

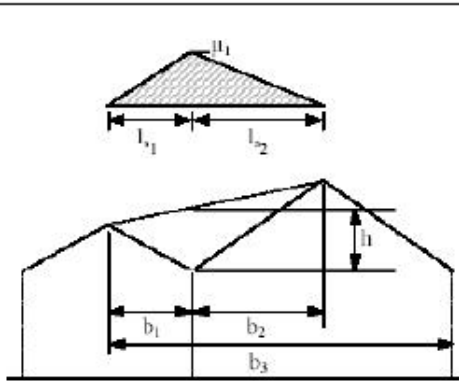
- το σχήμα της στέγης και την κλίση της στέγης. Γενικώς θεωρείται ότι το χιόνι δεν μπορεί να παραμείνει σε στέγες με κλίση μεγαλύτερη των 60° , εκτός αν υπάρχουν εμπόδια, προεξοχές ή φράχτες.
- τις θερμικές ιδιότητες της στέγης και την παραγόμενη θερμότητα κάτω από την στέγη
- την τραχύτητα της επιφάνειας της στέγης
- την γεινίαση με άλλα υψηλότερα κτήρια
- την τοπογραφία της περιοχής
- το μικροκλίμα της περιοχής (και κυρίως την έκθεση στον άνεμο)

Οι συντελεστές σχήματος στέγης, μ , δίνονται στην παράγραφο 5.3 του Ευρωκώδικα για παρασυρμένο και για μη παρασυρμένο χιόνι για περιπτώσεις μη εξαιρετικής μετατόπισης. Για τις περιπτώσεις εξαιρετικής μετατόπισης του χιονιού οι συντελεστές σχήματος δίνονται στο Παράρτημα Β του Ευρωκώδικα.



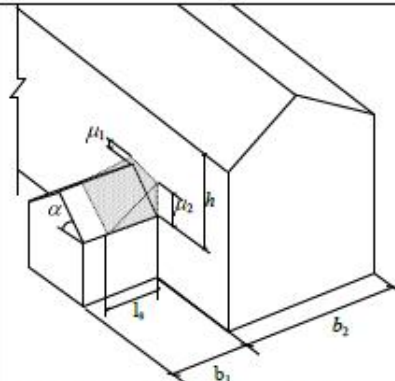
Σχήμα 3. Συντελεστές σχήματος





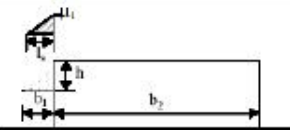
$$\mu_1 = \min[2h/s_k, 2b_3/(l_{s1} + l_{s2}), 5]$$

Κοιλάδες στεγών πολλαπλών ανοιγμάτων

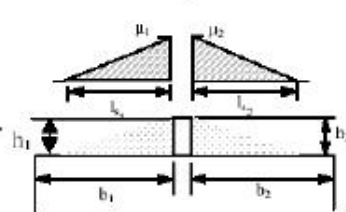


Για τα μ_1 και μ_2 βλέπε πίνακα ??

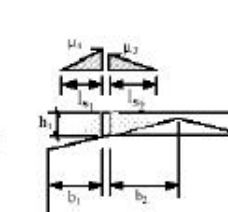
Στέγες σε επαφή με, ή κοντά σε, υψηλότερες κατασκευές



Σκιάστρα με $b_1 \leq 5$



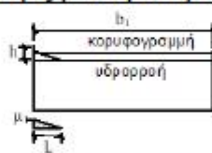
Εμπόδιο σε οριζόντια στέγη



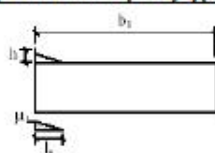
Εμπόδιο σε κεκλιμένη ή καμυλωτή στέγη

$$\mu_1 = \min[2h_1/s_k, 5], \mu_2 = \min[2h_2/s_k, 5]$$

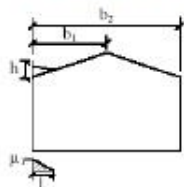
Στέγες με παράσωση χιονιού σε προεξοχές και εμπόδια



Χιόνι σε «κοιλιά» πίσω από πέτασμα στην άκρη της στέγης



Χιόνι πίσω από πέτασμα, οριζόντια στέγη



Χιόνι πίσω από πέτασμα σε μαρκίζα, κεκλιμένη ή κυλινδρική στέγη

ΣΗΜ.: Το b_2 πρέπει να χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του συντελεστή σχήματος

$$\mu_1 = \min[2h/s_k, 2b/l_s, 8], l_s = \min[5h, b_1, 15m]$$

Στέγες με συγκέντρωση χιονιού σε πετάσματα

Σχήμα 5. Συντελεστές σχήματος για εξαιρετικές παρασύρσεις χιονιού

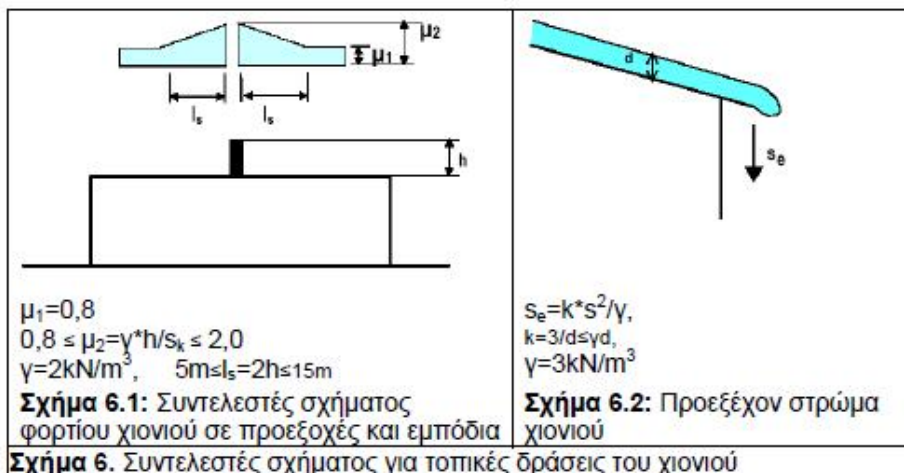
Πίνακας 3: Συντελεστές σχήματος φορτίου χιονιού για εξαιρετικές μετατοπίσεις χιονιού για στέγες σε επαφή με, ή κοντά σε, υψηλότερες κατασκευές.

Συντελεστής Σχήματος	Γωνία κλίσης της στέγης α_1			
	$0^\circ \leq \alpha_1 \leq 15^\circ$	$15^\circ < \alpha_1 \leq 30^\circ$	$30^\circ < \alpha_1 < 60^\circ$	$60^\circ \leq \alpha_1$
μ_1	μ_2	$\mu_2 \{ (30 - \alpha_1) / 15 \}$	0	0
μ_2	μ_3	μ_3	$\mu_3 \{ (60 - \alpha_1) / 30 \}$	0
Σημείωση: $\mu_2 = \min[2h/s_k, 2b/l_s, 8]$, $b_{\max}[b_1, b_2]$, $l_s = \min[5h, b_1, 15m]$.				

Στον Ευρωκώδικα δίνονται συντελεστές σχήματος στέγης για μια ποικιλία μορφών στέγης. Για ορισμένες μορφές στέγης, πρέπει να εξεταστούν διάφορες περιπτώσεις φορτίσεως επειδή είναι πιθανές διάφορες διατάξεις των φορτίων (με ή χωρίς παράσυρση του χιονιού).

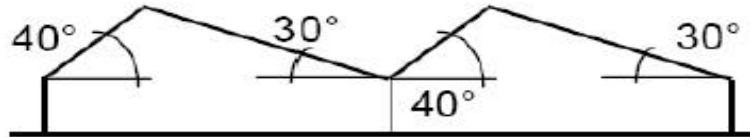
3.6 Τοπικά φαινόμενα

Πέραν των τυπικών φορτίσεων, στον Ευρωκώδικα καθορίζονται και δυνάμεις για τοπικές δράσεις που προκαλούνται από: **α)** χιόνι προεξέχον από την άκρη της στέγης και **β)** συσσώρευση χιονιού σε προεξοχές, εμπόδια και φράκτες χιονιού.



4 Εφαρμογή

Δίδεται το κτήριο του σχήματος.



Σχήμα 6. Παράδειγμα στέγης πολλών ανοιγμάτων

Πρόκειται για αγροτικό κτήριο στην περιοχή του Βόλου (Ζώνη Γ), το οποίο βρίσκεται σε υψόμετρο 310m. Τα τοπογραφικά χαρακτηριστικά της περιοχής θεωρούνται κανονικά, άρα ο συντελεστής έκθεσης λαμβάνεται ίσος με την μονάδα, και ο θερμικός συντελεστής επίσης λαμβάνεται ίσος με την μονάδα: $C_e=C_t=1.0$

Για υψόμετρο 310m, από τον Πίνακα 1 είναι $s_k=2.02\text{kPa}$

Για την φόρτιση του χιονιού εξετάζονται δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1^η: Μη παρασυρμένο χιόνι και

Περίπτωση 2^η: Παρασυρμένο χιόνι.

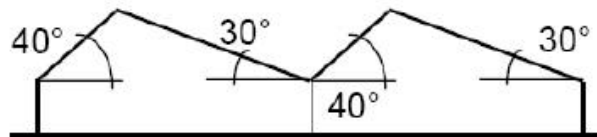
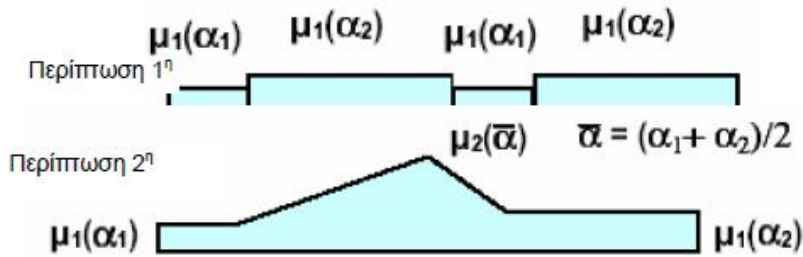
Από το Σχήμα 4 (στέγη πολλών ανοιγμάτων) προκύπτουν οι συντελεστές «μ» του Σχήματος 7.

Οι αντίστοιχες τιμές των συντελεστών «μ» λαμβάνονται από το Σχήμα 3:

Για $\alpha_1=40^\circ$ είναι $\mu_1=0.53$ και άρα $s = \mu_1 C_e C_t s_k = 0.53 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 2.02 = 1.07\text{kN/m}^2$,

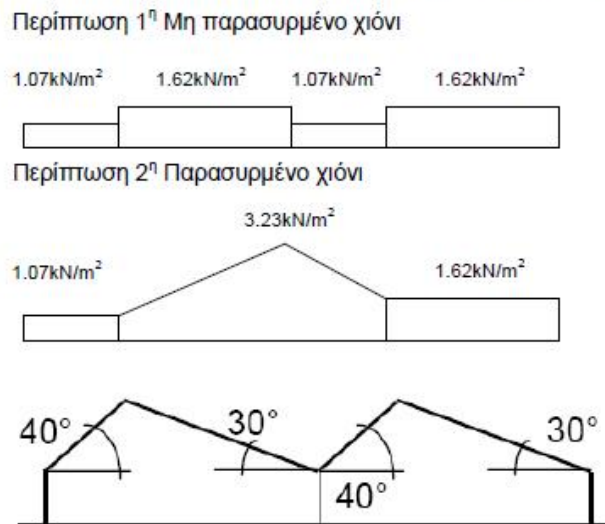
Για $\alpha_2=30^\circ$ είναι $\mu_1=0.80$ και άρα $s = \mu_1 C_e C_t s_k = 0.80 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 2.02 = 1.62\text{kN/m}^2$,

Για $\alpha=(\alpha_1+\alpha_2)=35^\circ$ είναι $\mu_2=1.60$ και άρα $s = \mu_1 C_e C_t s_k = 1.60 \cdot 2.02 = 3.23\text{kN/m}^2$,



Σχήμα 6. Συντελεστές σχήματος:
 Περίπτωση 1ª Μη παρασυρμένο χιόνι
 Περίπτωση 2ª Παρασυρμένο χιόνι

Από τα παραπάνω, προκύπτουν οι φορτίσεις του επόμενου Σχήματος 7:



Σχήμα 7. Περιπτώσεις φορτίσεως (χαρακτηριστικές τιμές)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1, ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΕΣ

<http://www.halyvourgiki.com/>

<http://www.profisol.gr/>

<https://pixabay.com>

<http://library.tee.gr/>

www.leorooft.com

<http://www.hellaskps.gr/>

<http://www.gpm-metal.com/>

www.civil.auth.gr

<http://www.domisis-ltd.gr/>

<http://skoutarissteel.com/>

<http://portal.tee.gr/>

<http://www.e-archimedes.gr/>

<http://www.mechpedia.gr/>

<http://metalkat.gr/>

<http://eclass.gunet.gr/>

<http://www.metallodomi.com/>

<https://youtu.be/dJ0lsdulY6s>

https://youtu.be/vqV1MF_xGJ4

2. ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 2.1 Χ.Κ. Μπανιωτόπουλος, Κατασκευές από Χάλυβα, εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη (2009)
- 2.2 Π. Κακαβάς και Π. Λέμης-Πετρόπουλος, εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη (2008)
- 2.3 Π. Μαυροειδής, Χάλυβες Οπλισμού Σκυροδέματος, εκδ. Παπασωτηρίου (2005)
- 2.4 F. P. Beer, E. R. Johnston, J. DeWolf and D. F. Mazurek, Μηχανική των Υλικών, εκδ Τζιόλα, Θεσσαλονίκη (2014)

3. ΑΓΓΛΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 3.1 V. Feodosyev, Strength of Materials, MIR Publications, Moscow (1976)
- 3.2 BEER F.P. – JOHNSTON E.R., Mechanics of materials ,Mc Graw Hill, Singapore, 1992
- 3.3 FEODOSYEV V., Strength of Materials, MIR Publ., Moscow, 1976
- 3.4 MEGSON T.H.G., Strength of Materials for Civil Engineers, Nelson, 1980