ΤΕΙ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΣΔΟ

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων

Συναρτήσεις μίας μεταβλητής και εφαρμογή τους σε πραγματικά προβλήματα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

των

ΑΜΕΝΤΑ ΕΙΡΗΝΗ
και
ΠΗΤΤΑ ΜΙΧΑΗΛ

Επιβλέπων : Γεωργία Βάσιου
Πανεπιστημιακή Υπότροφος

Πάτρα, Ιούνιος 2015

Ευχαριστίες

Για την εκπόνηση της διπλωματικής μας εργασίας, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε αρχικά την επιβλέπουσα καθηγήτριά μας Δρ. Βάσιου , αλλά και όλους τους καθηγητές της Σχολής που συνέβαλαν στην ακαδημαϊκή μας διαπαιδαγώγηση, μέσα και έξω από τα αμφιθέατρα.

Εν συνεχεία, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε από καρδιάς τις οικογένειές μας, για την υπομονή και εμπιστοσύνη που μας έδειξαν, αλλά και για την υποστήριξη τους, οικονομική και ηθική, για να καταφέρουμε να ανταπεξέλθουμε στις υποχρεώσεις των σπουδές μας. Συμπαραστάτες μας σε όλα τα χρόνια της φοιτητικής μας πορείας στάθηκαν κι οι φίλοι μας, που χωρίς αυτούς δε θα είχαμε προχωρήσει ως εδώ.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία με τίτλο «Συναρτήσεις μιας μεταβλητής και εφαρμογές στην Διοίκηση και την Οικονομία» εκπονήθηκε στη Σχολή Εφαρμογών Πληροφορικής στην Διοίκηση του Α.Τ.Ε.Ι. Πάτρας, παράρτημα Αμαλιάδος υπό την επίβλεψη της καθηγήτριας Γεωργίας Βάσιου του Τ.Ε.Ι. Πάτρας.

Αρχικά πραγματοποιείται μια εισαγωγή στην μαθηματική θεωρία των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, ορίζοντας τις απαιτούμενες έννοιες καθώς και μια σύντομη παρουσίαση των πιο διαδεδομένων συναρτήσεων και των ιδιοτήτων τους. Στα πλαίσια της μαθηματικής εισαγωγής ορίζονται οι έννοιες του ορίου και της συνέχειας, ως μαθηματικά εργαλεία διερεύνυσης της συμπεριφοράς των συναρτήσεων.

Στη συνέχεια γίνεται μια παρουσίαση της οικονομικής επιστήμης και συγκεκριμένα της μικροοικονομικής θεωρίας. Έπειτα ορίζονται τα σημαντικότερα μικροοικονομικά μεγέθη, που συσχετίζονται με την αγορά και τις επιχειρήσεις. Οι δυνάμεις της αγοράς εξετάζονται μέσω των συναρτήσεων προσφοράς και ζήτησης, έπειτα πραγματοποιείται μια σύντομη ανάλυση στις καμπύλες αδιαφορίας και πώς γίνεται τελικών η επιλογή προϊόντος απ' τον καταναλωτή, ενώ στο τελευταίο υποκεφάλαιο παρουσιάζονται τα μεγέθη που περιγράφουν τα κέρδη μιας επιχείρησης.

Τέλος, ως εφαρμογή τόσο της μαθηματικής όσο και της μικροοικονομικής θεωρίας, χρησιμοποιείται το υπολογιστικό πακέτο excel, για την επίλυση μαθηματικοποιημένων πραγματικών και ακαδημαϊκών προβλημάτων επιχειρήσεων, όπως αυτά δίνονται απ' την σχετική, ελληνόφωνη βιβλιογραφία.

Σκοπός είναι αφού αναλυθεί η σχετική θεωρία και πραγματοποιηθεί η υπολογιστική εφαρμογή της, να αξιολογηθεί τόσο η χρήση του πακέτου excel ως εργαλείο επίλυσης μαθηματικοποιημένων προβλημάτων όσο και η επιλογή των οικονομολόγων να χρησιμοποιήσουν μαθηματικό φορμαλισμό για την περιγραφή εννοιών και προβλημάτων στην οικονομική επιστήμη.

Abstract

The subject of this thesis is «One-variable functions and applications in Business Administration and Economics» and was carried out at the School of Business Administration (TEI Patra) under the supervision of Lecturer Dr. Georgia Vasiou.

First of all, the mathematical theory of one-variable functions is introduced, by defining the necessary concepts and by presenting the most common functions and their properties. In this context, the concepts of limit and continuity are defined and described as mathematical tools for studying the behavior of functions.

Thereafter, an introduction to economic theory is presented. At this chapter, the most important microeconomic laws and variables, describing markets and businesses, are defined. The market forces are explored by examining the functions of supply and demand. Subsequently, indifference curves are briefly analysed and how the final product choice by the consumer is decided. The chapter ends by describing a company's production and its profits from a mathematical-microeconomic perspective.

Finally, as an application of both the mathematical and the microeconomic theory of the thesis, the use EXCEL program is presented, as a computational tool for solving real-life and academic, mathematical problems for businesses. The examples are provided from relevant cases in the greek literature.

The objective is after analysing the theory and introducing a major computational application, to evaluate both the use of «excel» packet as a computational tool for mathematical problems and the choice of economists to use mathematical formalism in order to describe economical notions and formulate problems.

Περιεχόμενα

1

Μαθηματική Εισαγωγή – Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

1.1. Πραγματικές συναρτήσεις – Βασικές έννοιες, πράξεις κι ιδιότητες

1.1.1 Ορισμός πραγματικής συνάρτησης

Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία απεικόνισης f , με την οποία κάθε στοιχείο x που ανήκει σ'ενα υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών, δηλαδή $x \in A \subseteq R$, αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό ψ, που ανήκει σε υποσύνολο B των πραγματικών αριθμών, δηλαδή $\psi \in B \subseteq R$. Το ψ ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με f(x). Η μαθηματική έκφραση της διαδικασίας είναι η εξής:

$$f: A \rightarrow B \text{ ή } x \rightarrow f(x)$$

- Το γράμμα *x* συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του A κι ονομάζεται *ανεξάρτητη μεταβλητή* , ενώ το γράμμα *ψ* συμβολίζει την τιμή της f στο στοιχείο x κι ονομάζεται *εξαρτημένη μεταβλητή*.

- Το σύνολο A ονομάζεται *πεδίο ή σύνολο ορισμού* της συνάρτησης f και συμβολίζεται με $D(f)$ ή D_f . Μπορεί να αποτελεί είτε υποσύνολα του R είτε να είναι ολόκληρο το R, δηλαδή το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

    - Στα πλαίσια της εργασίας αυτής θα χρησιμοποιηθούν συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστήματος, δηλαδή το σύνολο ορισμού θα είναι της μορφής: $D_f = [\alpha, \beta]$ ή $D_f = (\alpha, \beta)$ ή $D_f = [\alpha, \beta] \cup (\gamma, \delta)$

- Το σύνολο B, που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$ ονομάζεται *πεδίο ή σύνολο τιμών* και συμβολίζεται με $R(f)$ ή R_f ή $f(A)$. Η μαθηματική του έκφραση είναι :
  $R_f = f(A) = \{\psi | \ \psi \in B \ \text{και υπάρχει} \ \alpha \in A \ \text{με} \ f(a) = \psi \}$

- Με την πρόταση «Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο Γ» θα εννοείται ότι το Γ είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή με $f(\Gamma)$ θα συμβολίζεται το σύνολο των τιμών της f για κάθε $x \in \Gamma$. Είναι δηλαδή : $f(\Gamma) = \{y \mid y = f(x)\ για\ κάποιο\ x \in \Gamma\}$

Ένα πλήρης ορισμός μια συνάρτησης f απαιτεί τα εξής στοιχεία:

- Το πεδίο ορισμού της D_f
- Η τιμή της f(x) για κάθε x του πεδίου ορισμού της

Συνήθως η αναφορά σε μια συνάρτηση f γίνεται δίνοντας μόνο τον μαθηματικό τύπο με τον οποίο εκφράζεται η απεικόνιση f(x). Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε συμβατικά ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x , για τους οποίους το f(x) έχει νόημα. Έτσι για παράδειγμα αντί της έκφρασης «δίνεται η συνάρτηση $f: [-0,2] \to R\ με\ f(x) = \sqrt{4-2x}$ » θα χρησιμοποιηθεί μία απ' τις εξής εναλλακτικές:

- *δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x) =* $\sqrt{4-2x}$ *» ή*
- *δίνεται η συνάρτηση f(x) =* $\sqrt{4-2x}$ *» ή*
- *δίνεται η συνάρτηση y =* $\sqrt{4-2x}$ *».*

1.1.2 Είδη συναρτήσεων

a) *Πολυωνυμική συνάρτηση* είναι κάθε πραγματική συνάρτηση της μορφής: $f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,\ f(x): R \to R$

όπου οι συντελεστές είναι δεδομένοι πραγματικοί αριθμοί: $a_o, \dots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$. Ο αριθμός *n* λέγεται *βαθμός* της πολυωνυμικής συνάρτησης. Αν $a_n = \cdots = a_1 = 0$, δηλαδή $f(x) = a_o,\ x \in R$, η συνάρτηση αποκαλείται σταθερά κι ο βαθμός της είναι 0, ενώ αν $a_o = 0$ δεν ορίζεται βαθμός. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις πρώτου βαθμού, δηλαδή $f(x) = a_1x + a_0$, αποκαλούνται γραμμικές κι οι γραφικές τους παραστάσεις αποτελούν ευθεία, Ο συντελεστής a_1 ορίζεται ως η κλίση της ευθείας.

b) *Ρητή συνάρτηση*: είναι συνάρτηση της μορφής $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου P(x) , Q(x) πολυώνυμα του x με $Q(x) \neq 0$

c) *Συνάρτηση της μορφής* $g(x) = \sqrt{f(x)}$ με $f(x) \geq 0$

d) *Τριγωνομετρικές συναρτήσεις* : Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο ημίτονό του εκφρασμένο σε rad, δηλαδή $\sin(x)$, λέγεται *συνάρτηση ημίτονο* και συμβολίζεται με sin ορίζουμε δηλαδή ότι $\sin(x) = \eta\mu(x\ rad)$.

Ομοίως ορίζεται και η *συνάρτηση συνημίτονο*, που συμβολίζεται με $\cos(x)$ και ορίζεται $\cos(x) = \sigma\upsilon\nu(x\ rad)$.

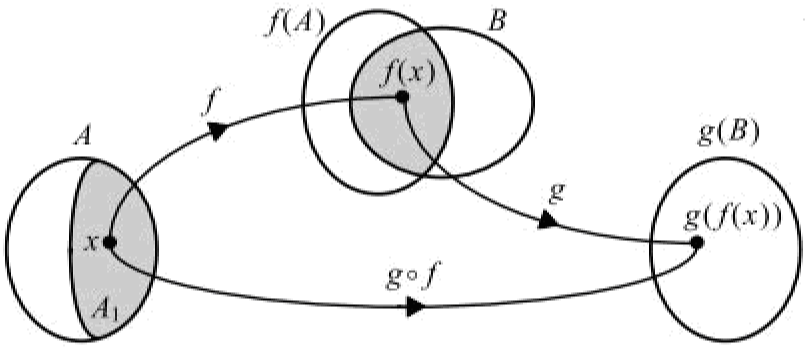
Η *συνάρτηση εφαπτόμενη* που συμβολίζεται με $\tan(x)$, ορίζεται ως εξής ως ο λόγος του ημιτόνου του αριθμού x, διαιρούμενο με το συνημίτονο του x: $\tan(x) = \varepsilon\varphi(x\ rad) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Το πεδίο ορισμού της είναι σύνολο για το οποίο δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής της, δηλαδή $R_1 = \{x \mid \cos(x) \neq 0\}$.

Η *συνάρτηση συνεφαπτόμενη* που συμβολίζεται με $\cot(x)$ορίζεται ως $\cot(x) = \sigma\varphi(x\ rad) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο για το οποίο το ημιτόνο, που βρίσκεται στον παρονομαστή της, είναι μη μηδενικό $R_2 = \{x|\ \sin(x) \neq 0\}$

e) *Εκθετική συνάρτηση* : έστω α ένας θετικός αριθμός. Για κάθε $x \epsilon R$ ορίζεται η δύναμη a^x. Επομένως αντιστοιχίζοντας κάθε $x \epsilon R$ στη δύναμη a^x ορίζεται η συνάρτηση με $f(x) = a^x$ η οποία στην περίπτωση που η βάση α είναι διάφορη της μονάδας, δηλαδή $\alpha \neq 1$, λέγεται *εκθετική συνάρτηση με βάση α*. Σε πολλές πραγματικές εφαρμογές εμφανίζονται εκθετικές συνάρτηση με βάση τον αριθμό e, όπου $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται απλώς *εκθετική*.

f) *Η λογαριθμική συνάρτηση:* έστω α ένας θετικός αριθμός διαφορετικός της μονάδας: $\alpha \neq 1$. Για κάθε $x > 0$ ορίζεται ο λογάριθμος με βάση α του x: $\log_a x$. Επομένως, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ μπορεί να οριστεί η αντιστοίχιση στο $\log_a x$, δηλαδή μπορεί να οριστεί η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to R$ με $f(x) = \log_a x$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται *λογαριθμική συνάρτηση με βάση α*. Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται *φυσικοί λογάριθμοι*. Ο φυσικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, συμβολίζεται με $\ln\theta$ και η αντίστοιχη συνάρτηση ορίζεται $f(\theta) = \ln\theta$.

g) *Σύνθεση συναρτήσεων:* Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A,B αντιστοίχως , τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g και την συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



Σχήμα 1.1: Αναπαράσταση της σύνθετης συνάρτησης $g \circ f$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της fγια τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της $g(x)$. Δηλαδή είναι το σύνολο : $A_1 = \{x \epsilon A|\ f(x) \epsilon B\}$. Είναι φανερό ότι $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq 0$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq 0$.

Γενικά ισχύει ότι:

- § Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι πιθανές συνθέσεις τους $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες. Δηλαδή $g \circ f \neq f \circ g$
- § Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$, και ισχύει: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- § Τη συνάρτηση αυτή την ονομάζουμε σύνθεση των *f, g* και *h* και συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$. Η σύνθεση συναρτήσεων μπορεί να γενικευτεί και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

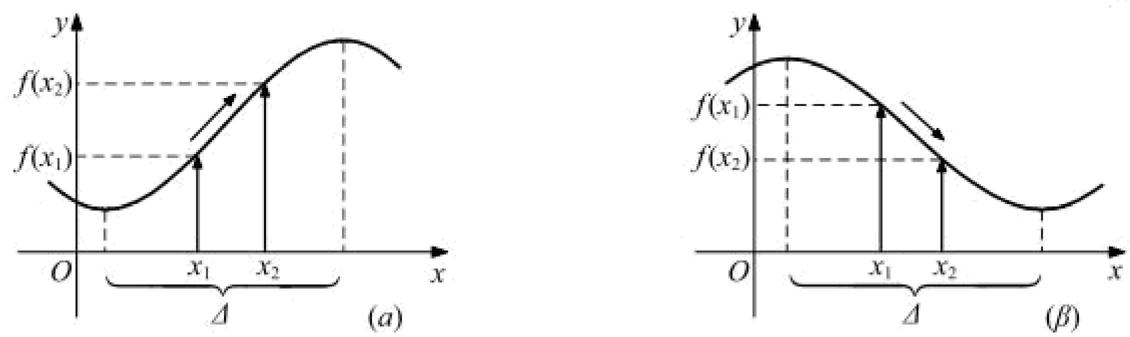
1.1.3 Μονοτονία συναρτήσεων

Έστω συνάρτηση $f: A \to R$ με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών: $A \subseteq R$. Έστω επίσης ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της: $\Delta \subseteq A$. Η συνάρτηση f λέγεται:

- § *γνησίως αύξουσα,* όταν για οποιαδήποτε $x_1,\ x_2 \in \Delta\ \mu\varepsilon\ x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) < f(x_2)$. Αυτή η ιδιότητα μονοτονίας συμβολίζεται f- Δ
- § *γνησίως φθίνουσα* όταν για οποιαδήποτε $x_1,\ x_2 \in \Delta\ \mu\varepsilon\ x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) > f(x_2)$. Αυτή η ιδιότητα μονοτονίας συμβολίζεται f¯Δ
- § *αύξουσα,* όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta\ \mu\varepsilon\ x_1 \leq x_2$ ισχύει : $f(x_1) \leq f(x_2)$
- § *φθίνουσα,* όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta\ \mu\varepsilon\ x_1 \leq x_2$ ισχύει : $f(x_1) \geq f(x_2)$

Χαρακτηριστικά παραδείγματα συναρτήσεων που είναι γνησίως αύξουσες αποτελούν μεταξύ άλλων οι λογαριθμικές: $f(x) = \log_a x\ \mu\varepsilon\ \alpha > 1$ και $f(x) = \ln x$, καθώς κι η εκθετική $f(x) = a^x, \mu\varepsilon\ \alpha > 1$

Αντίστοιχα, παραδείγματα γνησίως φθινουσών συναρτήσεων αποτελούν οι $f(x) = \log_a x\ \mu\varepsilon\ 0 < \alpha < 1$ και η παραβολική $f(x) = \alpha\, x\ \mu\varepsilon\ 0 < \alpha < 1$



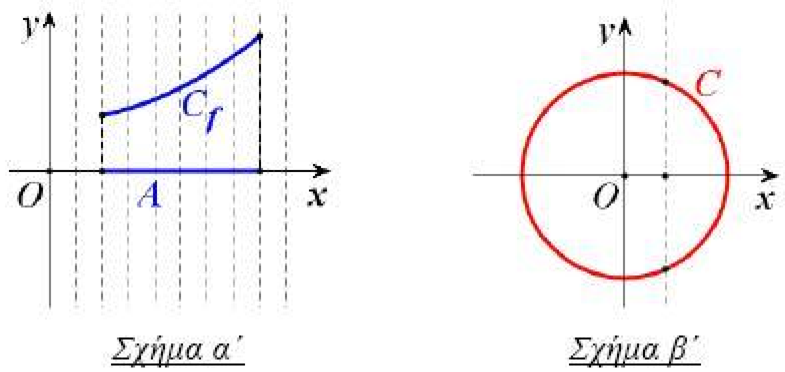
Σχήμα 1.2: Γραφικές παραστάσεις (α) γνησίως αύξουσας συνάρτησης και (β) γνησίως φθίνουσας συνάρτησης

Αν μια συνάρτηση f είναι *γνησίως αύξουσα* ή *γνησίως φθίνουσα* σένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , τότε λέμε ότι η f είναι *γνησίως μονότονη* στο Δ. Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της *f* είναι ένα διάστημα *Δ* και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό , τότε θα λέμε απλώς ότι η f είναι *γνησίως μονότονη*.

1.1.4 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο καρτεσιανό επίπεδο. Το σύνολο των σημείων (x, y) για τα οποία ισχύει $y = f(x), x \in A$, λέγεται *γραφική παράσταση* της f και συμβολίζεται με C_f. Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται *μόνο* από τα σημεία της C_f. Επομένως η $y = f(x)$ είναι εξίσωση της γραφικής παράστασης της f

Απ' τους ορισμούς της συνάρτησης και του γραφήματος προκύπτει ότι κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in R$, τέτοιο ώστε $(x, y) \in C_f$, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη y. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ευθεία παράλληλη με τον άξονα Oy έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο. Συνεπώς, η εξίσωση του κύκλου δεν αποτελεί συνάρτηση και η αναπαράστασή του στο καρτεσιανό επίπεδο δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.



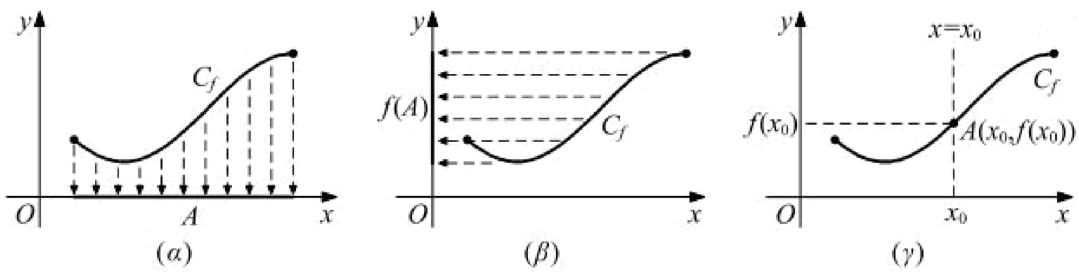
Σχήμα 1.3: (α) Γραφική παράσταση συνάρτησης και (β) Γραφική απεικόνιση κύκλου

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f τότε:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.

β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f

γ) Η τιμή της f στο x_o, είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_o$ και της C_f.

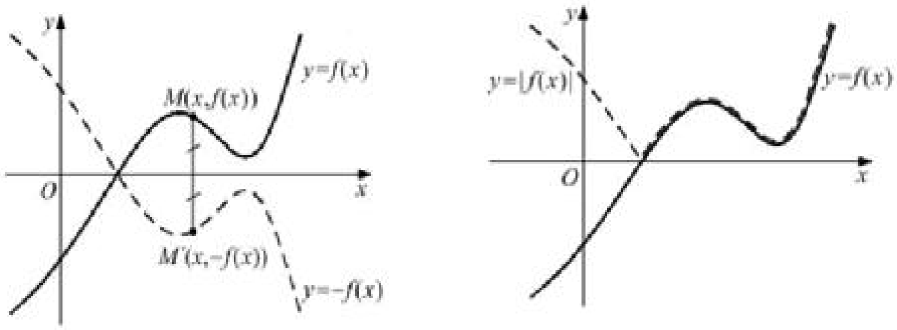


Σχήμα 1.4: (α) Απεικόνιση των τετμημένων της f (β) Απεικόνιση των τεταγμών της f (γ) Τομή της $x = x_o$ με την f(x)

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μια συνάρτησης f μπορούμε , επίσης να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις της αντίθετης συνάρτησης $-f$ και της απόλυτης τιμή της συνάρτησης, $|f|$ που είναι επίσης συνάρτηση:

a) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράσταση της f γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$.

b) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$ των τμημάτων της που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.



Σχήμα 1.5: Γραφική σχεδίαση της (a) $-f(x)$ (b) $|f|$

1.1.5 Συνάρτηση 1-1

Για μια συνάρτηση $f: A \to B$ είναι δυνατό δύο διαφορετικά στοιχεία του A να έχουν την ίδια τιμή στο πεδίο τιμών B, αν και το αντίστροφο απαγορεύεται απ' τον ορισμό της συνάρτησης, δηλαδή ένα στοιχείο του A να αντιστοιχίζεται σε πάνω από μία τιμές του B. Υπάρχει ωστόσο η περίπτωση δύο οποιαδήποτε στοιχεία του A να έχουν διαφορετικές τιμές, μέσω της f, στο B. Τότε η συνάρτηση αποκαλείται *αμφιμονοσήμαντη* ή *1-1* κι ο αυστηρός ορισμός της είναι:

Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται συνάρτηση $1-1$, όταν για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή : αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύετε ότι μια συνάρτηση $\mathrm{f}: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε x_1, $\mathrm{x}_2 \in \mathrm{A}$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) \neq \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)$, τότε $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$ αν και μόνο αν:

- Για κάθε στοιχείο y του συνόλου των τιμών της εξίσωσης $y = f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς το x.

- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ευθεία παράλληλη με τον άξονα *Ox* τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα 1-1 συνάρτησης αποτελεί η γραμμική εξίσωση f(x) = ax + b

- Μια συνάρτηση που είναι γνησίως μονότονη θα είναι συνάρτηση $1 - 1$. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι παρακάτω γνησίως μονότονες συναρτήσεις που είναι και $1 - 1$:

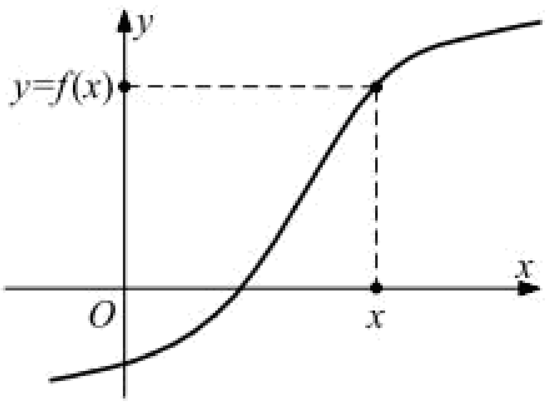
  $f(x) = ax^3$ με $\alpha \neq 0$,

  $f(x) = \alpha^x$με $\alpha \neq 1$ $\kappa\alpha\iota$ $\alpha > 0$,

  $f(x) = \log_a x$ με $\alpha \neq 1$ $\kappa\alpha\iota$ $\alpha > 0$

1.1.6 Αντίστροφη συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow R$ που είναι $1 - 1$. Τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της $f(A)$, υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.



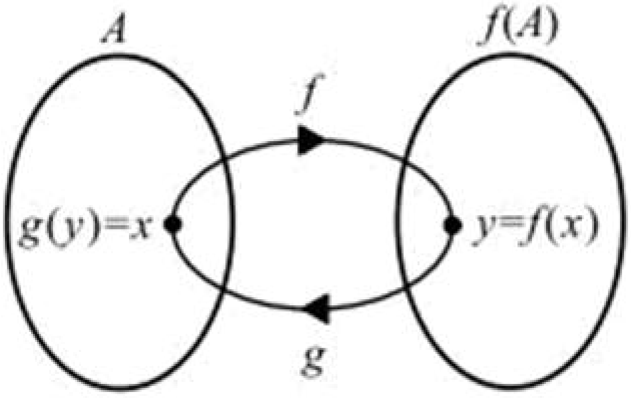
Σχήμα 1.6: Γραφική σχεδίαση της (a) $-f(x)$ (b) $|f|$

Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση g με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f: $f(A)$

- Έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A $\tau\eta\varsigma$ f και ισχύει η ισοδυναμία : $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$



Σχήμα 1.7: Γραφική σχεδίαση της (a) $-f(x)$ (b) $|f|$

Αυτό σημαίνει ότι αν η f αντιστοιχίζει το x στο y τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g ορίζει την αντίστροφη διαδικασία απεικόνισης σε σχέση με την f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται *αντίστροφη συνάρτηση της* f και συμβολίζεται με f^{-1}. Επομένως έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, οπότε $f^{-1}(f(x)) = x$, $\mu\varepsilon\ x \in A$ και $f^{-1}(f(y)) = y$, $\mu\varepsilon\ y \in f(A)$.

Οι γραφικές παραστάσεις $C_f\ \kappa\alpha\iota\ C'_f$ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $xO'y'$.

Η εκθετική $f(x) = \alpha^x$ με $\alpha \neq 1\ \kappa\alpha\iota\ \alpha > 0$ έχει ως αντίστροφη την λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$.

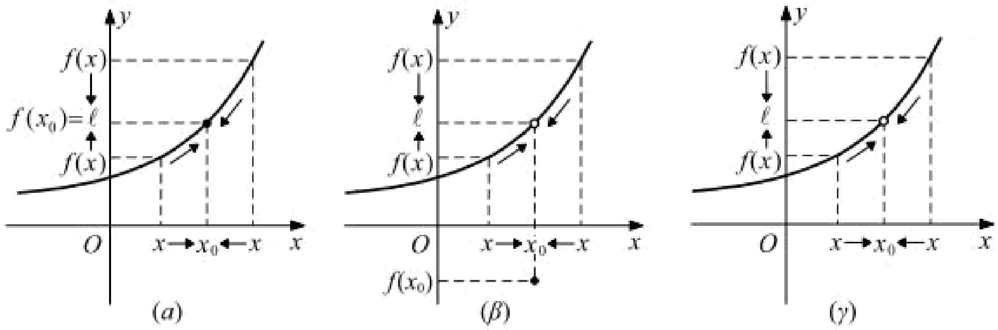
1.2. Όριο συνάρτησης

Η έννοια του ορίου γεννήθηκε στη προσπάθεια των μαθηματικών να απαντήσουν σε ερωτήματα όπως:

- Τι ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού ;
- Τι ονομάζουμε εφαπτομένη μιας καμπύλης σε ένα σημείο της;
- Τι ονομάζουμε εμβαδό ενός μικτόγραμμου χωρίου.

1.2.1. Πεπερασμένο όριο $x_o \to R$

Όταν οι τιμές μια συνάρτησης f προσεγγίζουν «όσο θέλουμε» έναν πραγματικό αριθμό l, εννοώντας σε με μικρή περιοχή γύρω από ένα σημείο x_o, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_o, τότε ορίζεται ότι *το όριο της συνάρτησης $f(x)$ στο x_o είναι l*, που γράφεται $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$



Σχήμα 1.8: Γραφική σχεδίαση προσέγγισης της f(x) σε μια τιμή l

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρείται ότι:

Για να αναζητηθεί το όριο της f στο x_o, πρέπει η f να ορίζεται σε περιοχή κοντά στο x_o, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σένα σύνολο της μορφής :

- (α, x_o)
- (x_o, β)
- $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$.

Το x_o μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή να μην ανήκει σε αυτό.

Η τιμή της f στο x_o, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριο της στο x_o ή να είναι διαφορετική από αυτό.

Ø $\varepsilon - \delta$ ορισμός ορίου κατά Cauchy

Ο $\varepsilon - \delta$ ορισμός του ορίου αποτελεί τον 1ο αυστηρό μαθηματικό ορισμό του ορίου και τον διατύπωσε για πρώτη φορά ο μαθηματικός Augustin-Louis Cauchy.

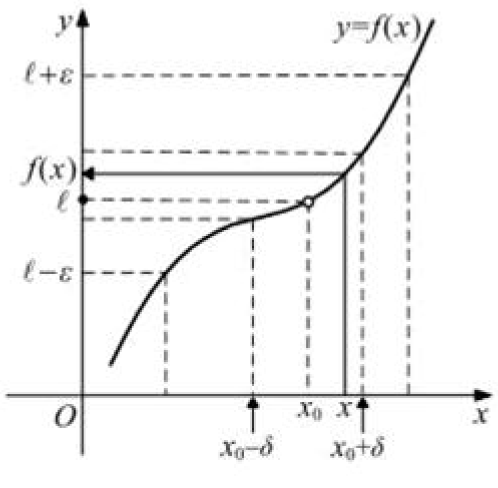
Η φράση *«οι τιμές μια συνάρτησης f προσεγγίζουν «όσο θέλουμε» έναν πραγματικό αριθμό l»* σημαίνει ότι η συνάρτηση f(x) ανήκει στο διάστημα $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, όπου ε οποιοσδήποτε θετικός αριθμός και αντικαθίσταται απ'την μαθηματική έκφραση: $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Η φράση *«σε μια μικρή περιοχή γύρω απ' το x_o»*, σημαίνει ότι τα x βρίσκονται αρκούντως κοντά x_o και αντικαθίσταται απ'την ανισότητα: $0 < |x - x_o| < \delta$, όπου δ ένας θετικός αριθμός.

Το 1^{ο} μέρος της ανισότητας $0 < |x - x_o|$ δηλώνει ότι: $x_o \neq 0$. Η 2^{η} ανισότητα $|x - x_o| < \delta$ δηλώνει ότι το x βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη του δ απ' το x_o.

Απ' τη σύνδεση των δύο αυτών φράσεων προκύπτει ο παρακάτω ορισμός του ορίου:

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$.
Θα λέμε ότι **η $\boldsymbol{f}$ έχει στο $\boldsymbol{x_o}$ όριο $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{R}$,** όταν
για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε
για κάθε $x \in (\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$, με $0 < |x - x_o| < \delta$,
να ισχύει: $|f(x) - l| < \varepsilon$.



***Σχήμα 1.9**: Το όριο της f(x) στο* x_o *είναι l*

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_o τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $lim_{x \to x_o} f(x)$.

Συνέπεια του ορισμού είναι οι παρακάτω ισοδυναμίες:

- $lim_{x \to x_o} f(x) = l \Leftrightarrow lim_{x \to x_o}(f(x) - l) = 0$

- $lim_{x \to x_o} f(x) = l \iff lim_{k \to 0}(f(x) + k) = l$
- Υπάρχει περίπτωση η f να ορίζεται είτε σε διάστημα $A = (\alpha, x_o)$ είτε σε διάστημα $B = (x_o, \beta)$. Τότε το όριο στο x_o ορίζεται ως πλευρικό όριο και συμβολίζεται $lim_{x \to x_o^-} f(x)$ αν η f ορίζεται σε διαστημα Α και $lim_{x \to x_o^+} f(x)$ αν η f ορίζεται σε διαστημα Β. Αν το πεδίο ορισμό της είναι η ένωση διαστημάτων, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$lim_{x \to x_o} f(x) = l \iff lim_{x \to x_o^-} f(x) = lim_{x \to x_o^+} f(x)$$

  - Το όριο της ταυτοτικής συνάρτησης είναι: $lim_{x \to x_o} x = x_o$
  - Το όριο της σταθερής συνάρτησης είναι: $lim_{x \to x_o} c = c$

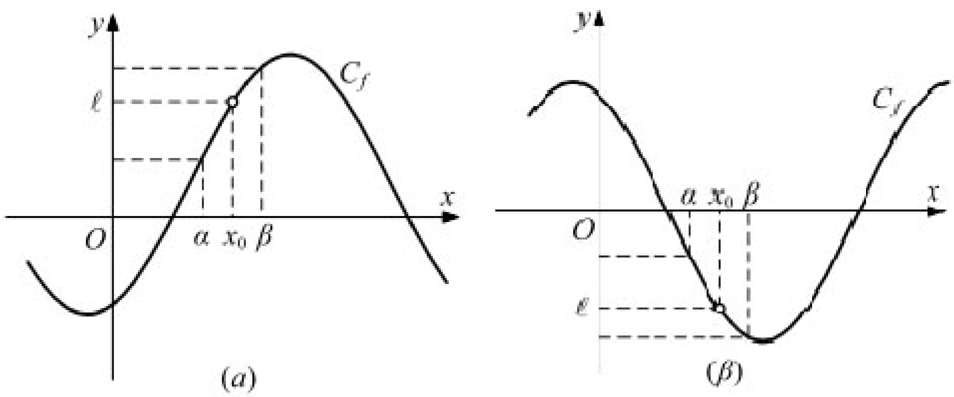
1.2.2. Ιδιότητες ορίων

1.2.2.1. Όριο και διάταξη

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

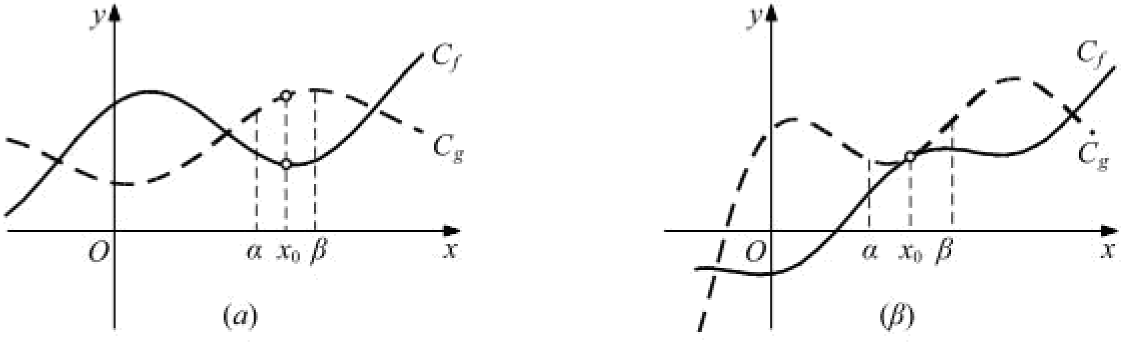
§ Αν $lim_{x \to x_o} f(x) > 0$, τότε το $f(x) > 0$ κοντά στο x_o

§ Αν $lim_{x \to x_o} f(x) < 0$, τότε το $f(x) < 0$ κοντά στο x_o



Σχήμα 1.10: (α) Όριο f(x) θετικής στο x_o (β)) Όριο f(x) αρνητικής στο x_o

§ Αν οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ έχουν όριο στο x_o και ισχύει $f(x) \neq g(x)$ κοντά στο x_o, τότε $lim_{x \to x_o} f(x) \neq lim_{x \to x_o} g(x)$



***Σχήμα 1.11**: (α) Όριο f(x), g(x) όταν* $f(x) \neq g(x)$ κοντά *στο* x_o
(β) Όριο f(x), g(x) όταν $f(x) = g(x)$ κοντά *στο* x_o

1.2.2.2. Όρια και πράξεις

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ κοντά στο x_o, τότε:

- $lim_{x \to x_o}(f(x) + g(x)) = lim_{x \to x_o} f(x) + lim_{x \to x_o} g(x)$
- $lim_{x \to x_o}\big(kf(x)\big) = k\, lim_{x \to x_o} f(x)$, για κάθε σταθερά $k \in R$
- $lim_{x \to x_o}(f(x) + kg(x)) = lim_{x \to x_o} f(x) + k\ lim_{x \to x_o} g(x)$
- $lim_{x \to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{lim_{x \to x_o}f(x)}{lim_{x \to x_o}g(x)}$, μόνο αν $lim_{x \to x_o}g(x) \neq 0$
- $lim_{x \to x_o}|f(x)| = \left|lim_{x \to x_o} f(x)\right|$
- $lim_{x \to x_o} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{lim_{x \to x_o} f(x)}$, εφ' όσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_o
- $lim_{x \to x_o}[f(x)]^{\nu} = \left[lim_{x \to x_o} f(x)\right]^{\nu}$, αν $\nu \in N$
- $lim_{x \to x_o} x^{\nu} = {x_o}^{\nu}$
- Για $x_o \in R$ το όριο ενός πραγματικού πολυωνύμου της μορφής

  $p(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, είναι

  $lim_{x \to x_o} p(x) = p(x_o)$
- Για ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_o \in R$ με $Q(x_o) \neq 0$ τότε:

  $lim_{x \to x_o} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_o)}{Q(x_o)}$

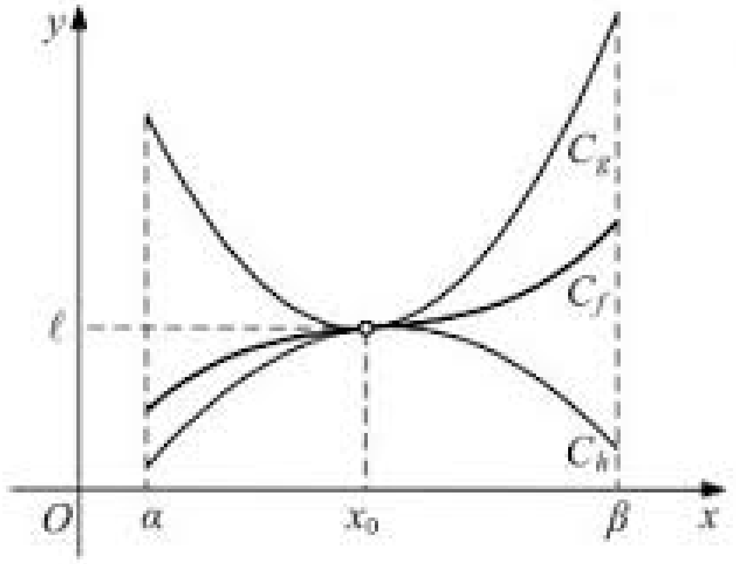
1.2.2.3. Κριτήριο παρεμβολής

Θεώρημα Κριτηρίου Παρεμβολής (Squeeze Theorem)

Έστω σύνολο $A \subseteq R$ και οι συναρτήσεις $f, g, h : A \rightarrow R$ κι ένα σημείο του πεδίου ορισμού $x_o \in A$. Αν κοντά στο x_o:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ *για κάθε* $x \in A$ *με* $x_o \neq 0$
- $lim_{x \to x_o} h(x) = lim_{x \to x_o} g(x) = l$

Τότε $lim_{x \to x_o} f(x) = l$



Σχήμα 1.12: *Γραφική αναπαράσταση κριτηρίου παρεβολής για συναρτήσεις g(x), f(x), h(x)*

1.2.2.4. Τριγωνομετρικά όρια

- Για την συνάρτηση ημίτονο πραγματικού αριθμού x σε rad, ισχύει: $|\sin x| \leq |x|$, για κάθε $x \in R$

  όπου η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$

- $lim_{x \to x_o} \sin x = \sin x_o$ και $lim_{x \to x_o} \cos x = \cos x_o$
- $lim_{x \to x_o} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $lim_{x \to x_o} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

1.2.2.5. Όριο σύνθετης συνάρτησης

Για τον υπολογισμό του ορίου $lim_{x \to x_o} f(g(x))$ της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_o, τότε ακολουθείται η εξής διαδικασία αντικατάστασης μεταβλητών:

- τίθεται $u = g(x)$
- υπολογίζεται, αν υπάρχει, το όριο $k_o = lim_{x \to x_o} g(x)$
- υπολογίζεται, αν υπάρχει, το όριο $l = lim_{k \to k_o} f(k)$

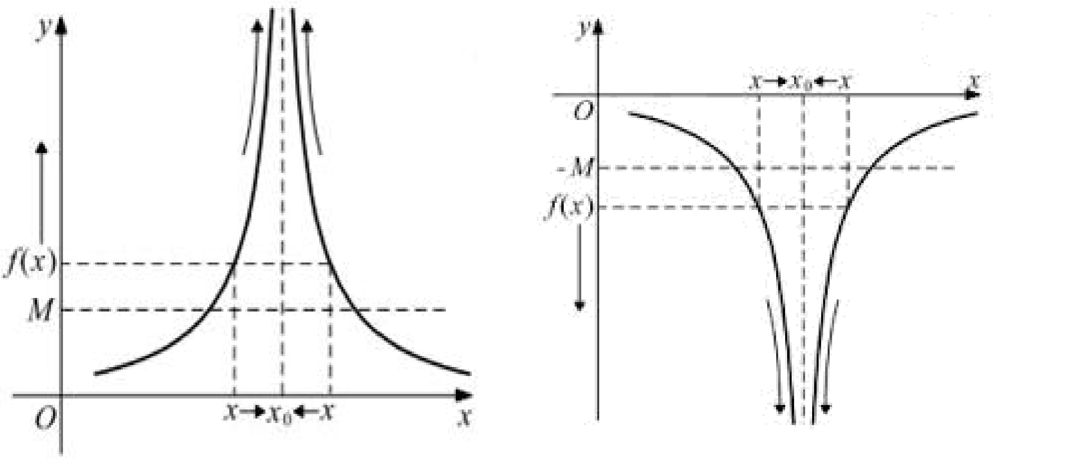
Αποδεικνύεται ότι αν $g(x) \to k_o$ κοντά στο x_o, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με l, δηλαδή ισχύει:

$$lim_{x \to x_o} f(g(x)) = lim_{k \to k_o} f(k)$$

1.2.3. Μη πεπερασμένο όριο $x_o \to R$

Εκτός απ' την περίπτωση το όριο l μιας συνάρτησης $f(x)$ σ'έναν πραγματικό x_o να είναι πραγματικός αριθμός, υπάρχει και το ενδεχόμενο η $f(x)$ να απειρίζεται. Όπως φαίνεται στο παράδειγμα του σχήματος *1.13(α)*, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$ πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_o, οι τιμές της $f(x)$ αυξάνονται και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι *η συνάρτηση f έχει στο x_o όριο $+\infty$* και γράφουμε $\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty$



Σχήμα 1.13: *Γραφική αναπαράστασης μη πεπερασμένων ορίων (α) $f(x) \to +\infty$ (β) $f(x) \to -\infty$*

Στο σχήμα *1.13(β)*, αντίστοιχα, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$ πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_o, οι τιμές της

$f(x)$ ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητκό αριθμό $-M$, θεωρώντας $M > 0$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι *η συνάρτηση f έχει στο x_o όριο* $-\infty$ και γράφουμε $\lim_{x\to x_o} f(x) = -\infty$.

Ο ορισμός για το ένα μη πεπερασμένο όριο είναι ο εξής:

- Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_o) \cup (x_{o,}\beta)$. Ορίζουμε :
  - $\lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_o) \cup (x_{o,}\beta)$, με $0 < |(x - x_o)| < 0$, να ισχύει $f(x) > M$
  - $\lim_{x\to x_o} f(x) = -\infty$ όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_o) \cup (x_{o,}\beta)$, με $0 < |(x - x_o)| < 0$, να ισχύει $f(x) < -M$

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν όταν για την $f(x)$ ορίζονται μόνο τα πλευρικά όρια: $x \to {x_o}^+$ και $x \to {x_o}^-$, για τα οποία ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

- $\lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o^-} f(x) = \lim_{x\to x_o^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to x_o} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o^-} f(x) = \lim_{x\to x_o^+} f(x) = -\infty$

Για τα μη πεπερασμένα όρια ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_o, ενώ

  αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_o
- Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x\to x_o}\big(-f(x)\big) = -\infty$, ενώ

  αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x\to x_o}\big(-f(x)\big) = +\infty$
- Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = \pm\infty$ τότε $\lim_{x\to x_o} \frac{1}{f(x)} = 0$
- Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_oτότε $\lim_{x\to x_o} \frac{1}{f(x)} = +\infty$,
  αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_oτότε $\lim_{x\to x_o} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
- Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = \pm\infty$ τότε $\lim_{x\to x_o}|f(x)| = +\infty$
- Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x\to x_o} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$
- $\lim_{x\to x_o} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x\to x_o} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty, \nu \in N$
- $\lim_{x\to x_o} \frac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim_{x\to x_o} \frac{1}{x^{2\nu}} = -\infty, \nu \in N$

· Για το άθροισμα και γινόμενο δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_o \in A$						
$\lim_{x\to x_o} f(x)$	$a \in R$	$a \in R$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to x_o} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to x_o} f(x)+g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

Θεώρημα 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_o \in R$										
$\lim_{x\to x_o} f(x)$	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to x_o} g(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to x_o} f\cdot g$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων όπου υπάρχει ερωτηματικό σημαίνει ότι έχουμε απροσδιόριστη μορφή. Οι περιπτώσεις αυτές είναι:

$(+\infty)+(-\infty)$ και $0\cdot(\pm\infty)$

Απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$ και $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Στις περιπτώσεις αυτές που υπάρχει απροσδιοριστία, το όριο, αν υπάρχει, εξαρτάται απ’ τις συναρτήσεις που θεωρούμε.

1.2.4. Όρια συνάρτησης στο άπειρο , $x_o \to \infty \pm$

Έστω σύνολο $A = (\alpha, +\infty) \subseteq R$ το πεδίο ορισμού τριών συναρτήσεων f, g, h κι έστω ένα σημείο του πεδίου ορισμού $x_o \in A$. Αν κοντά στο x_o. Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο:

- το $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό l. Στην περίπτωση αυτή η $f(x)$ έχει στο $+\infty$ όριο το l και γράφεται:

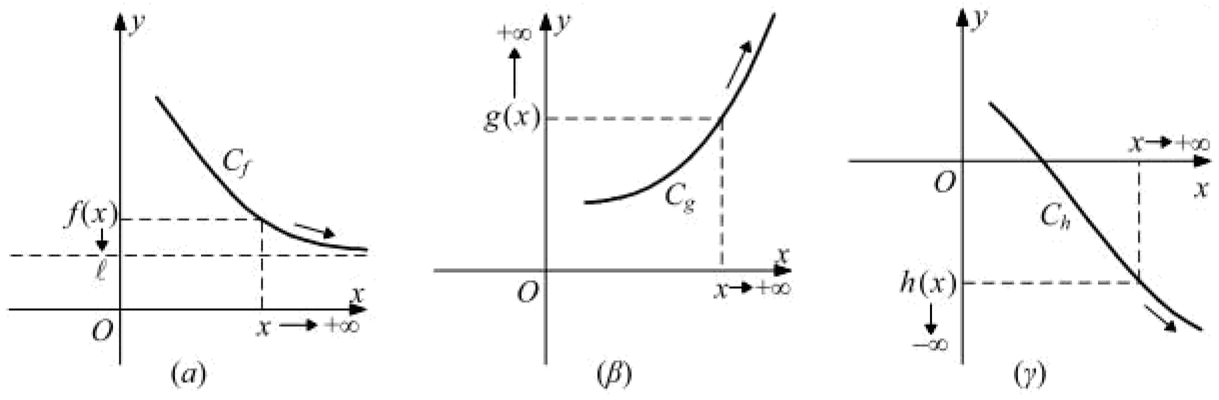
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

- το $g(x)$ αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή η $g(x)$ έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφεται:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

- το $h(x)$ μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή ότι η $h(x)$ έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφεται:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$



Σχήμα 1.14: *Γραφική αναπαράσταση ορίων (α) $f(x) \to l$ (β) $f(x) \to +\infty$ (γ)) $h(x) \to -\infty$*

Για να προσδιοριστεί το όριο μιας συνάρτησης f(x) στο $x_o \to +\infty$, πρέπει η f(x) να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν όταν $x_o \to -\infty$.

Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων, είναι πολύ χρήσιμες οι εξής σχέσεις ορίων:

- $\lim_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0$, όπου $\nu \in N^*$
- $\lim_{x\to+\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty, \alpha\nu\ \nu\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \\ -\infty, \alpha\nu\ \nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \end{cases}$ και $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0$, όπου $\nu \in N^*$
- Για την πολυωνυμική συνάρτηση, το όριο υπολογίζεται θεωρώντας ότι ο μεγιστοβάθμιος όρος καθορίζει την οριακή τιμή της συνάρτησης:

  $P(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, με $a_n \neq 0$ ισχύει

  $lim_{x\to+\infty} P(x) = lim_{x\to+\infty} (a_nx^n)$ και
  $lim_{x\to-\infty} P(x) = lim_{x\to-\infty} (a_nx^n)$
- Για τη ρητή συνάρτηση, ομοίως :

  $f(x) = \frac{a_o+a_1x+ a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{\beta_o+\beta_1x+ \beta_2x^2+\cdots+\beta_kx^k}$, με $a_n \neq 0$, $\beta_k \neq 0$, ισχύει

  $lim_{x\to+\infty} f(x) = lim_{x\to+\infty} (\frac{a_nx^n}{\beta_kx^k})$ και

  $lim_{x\to-\infty} f(x) = lim_{x\to-\infty} (\frac{a_nx^n}{\beta_kx^k})$
- Για το όριο εκθετική και της λογαριθμικής συνάρτησης, αποδεικνύετε ότι:

  § Αν $\alpha > 1$, τότε:

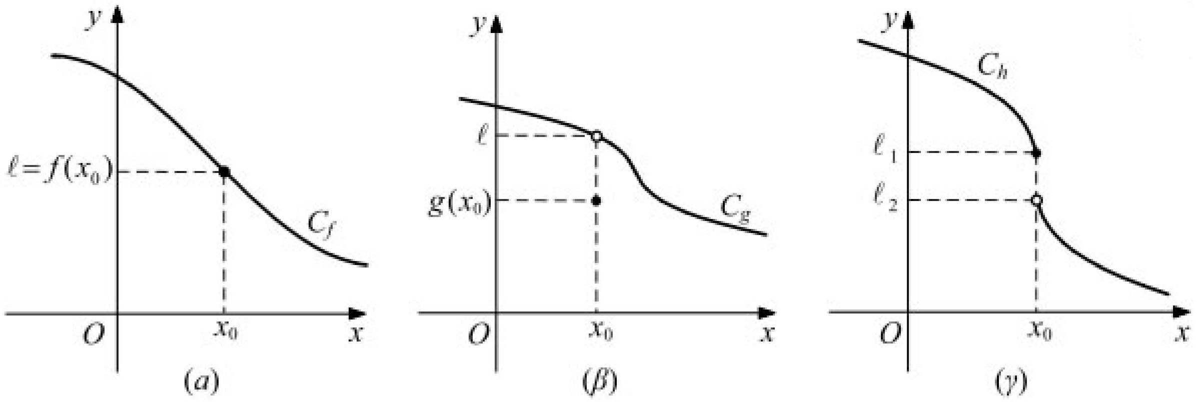
  - $lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$
  - $lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$
  - $lim_{x\to0}(\log_a x) = -\infty$
  - $lim_{x\to+\infty}(\log_a x) = +\infty$

  § Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

  - $lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$
  - $lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$
  - $lim_{x\to0}(\log_a x) = +\infty$
  - $lim_{x\to+\infty}(\log_a x) = -\infty$

1.3. Συνέχεια Συνάρτησης

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 1.15: *Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων (α) $f(x)$ (β) $g(x)$ (γ) $h(x)$*

Παρατηρούμε ότι:

- Η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη στο x_o και ισχύει:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

- Η συνάρτηση $g(x)$ είναι ορισμένη στο x_o , αλλά :

$$\lim_{x \to x_o} g(x) \neq g(x_o)$$

- Η συνάρτηση $h(x)$ είναι ορισμένη στο x_o, αλλά δεν υπάρχει το όριο της, γιατί τα πλευρικά της όρια δεν είναι ίσα μεταξύ τους:

$$\lim_{x \to x_o^+} h(x) \neq \lim_{x \to x_o^-} h(x)$$

Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις του σχήματος 1.15 μόνο η γραφική παράσταση της $f(x)$ δεν διακόπτεται στο x_o. Συνεπώς, μόνο η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο x_o.

1.3.1. Ορισμός Συνέχειας

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ και x_o ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

Η f είναι συνεχής στο x_o, όταν $lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

Μια συνάρτηση f είναι *συνεχής* σε *όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού* της, θα λέγεται απλά *συνεχής συνάρτηση*.

Για παράδειγμα:

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής αφού για κάθε $x_o \in R$, ισχύει $\lim_{x \to x_o} P(x) = P(x_o)$
- Κάθε ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι συνεχής αφού για κάθε x_o του πεδίου ορισμού της D_f ισχύει $\lim_{x \to x_o} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_o)}{Q(x_o)}$
- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $f(x) = \sin(x)$ και $g(x) = \cos(x)$ είναι συνεχείς στο R.
- Η εκθετικής $f(x) = \alpha^x$ κι η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_\alpha x$, με $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$ είναι συνεχείς

Η συνέχεια μιας συνάρτησης ορίζεται είτε στο πεδίο ορισμού της D_f, είτε σ' ένα σημείο του x_o, αλλά μπορεί επίσης να οριστεί και σε οποιοδήποτε άλλο διάστημα $A \subseteq D_f$.

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι *συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα* (α, β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x του διαστήματος $x \in (\alpha, \beta)$.

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι *συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα* $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x του διαστήματος $x \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$

1.3.2. Πράξεις

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς x_o, τότε είναι συνεχείς στο x_o και οι εξής συναρτήσεις, αν κι εφ'οσον το πεδίο ορισμού τους περιέχει το x_o:

- Ο γραμμικός συνδυασμός τους: $\kappa f(x) + \lambda g(x)$, όπου $\kappa, \lambda \in R$
- Το γινόμενο τους $f(x) \cdot g(x)$
- Το πηλίκο τους: $\frac{f(x)}{g(x)}$, εφ' όσον $g(x) \neq 0$
- Η απόλυτη τιμή της: $|f(x)|$
- Η ρίζα της: $\sqrt{f(x)}$
- Η εκθετική τους σύνθεση: $\left(f(x)\right)^{g(x)}$, αν $f(x) > 0$

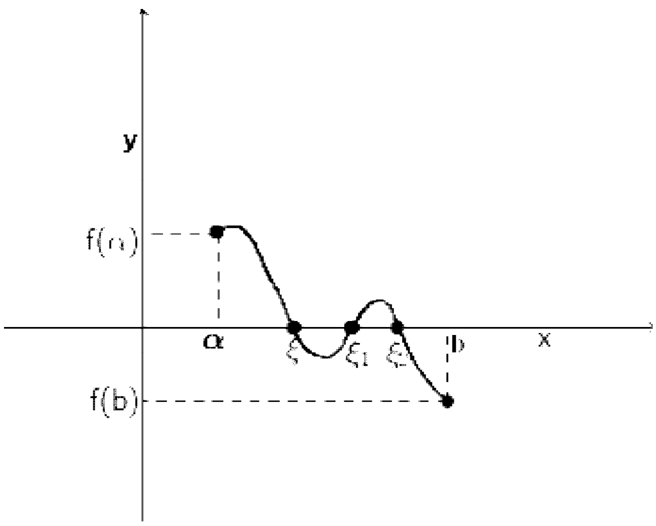
Θεώρημα Συνέχειας Σύνθετης Συνάρτησης

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής x_o και η συνάρτηση $g(x)$ είναι συνεχείς στο $f(x_o)$, τότε η σύνθεση τους $f \circ g$ είναι συνεχής x_o.

1.3.3. Θεωρήματα Συνέχειας Συνάρτησης

Θεώρημα του Bolzano

Έστω η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτηση f σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A[\alpha, f(\alpha)]$ *και* $B[\beta, f(\beta)]$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σ' ένα τουλάχιστον σημείο $x_o = \xi$, για το οποίο δηλαδή $f(\xi) = 0$. Το σχήμα 1.16 δείχνει την γραφικής παράσταση C_f μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ και περιγράφει γεωμετρικά την προσέγγιση μιας τέτοιας σειράς λύσεων ξ, ξ_1, ξ_2



Σχήμα 1.16: *Γραφικές παραστάσεις συνάρτησης $f(x)$ και εύρεση σημείων* $f(\xi) = 0$

Θεώρημα Bolzano

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow R,$ με πεδίο ορισμού ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, για την οποία αληθεύουν οι εξής συνθήκες:

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f\ (a) \cdot f(\beta) < 0$

Τότε *υπάρχει ένα τουλάχιστον* $x_o \in [\alpha, \beta]$ *τέτοιο ώστε* $f\ (x_o) = 0$

Δηλαδή η εξίσωση$f\ (x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης στο ανοικτό διάστημα (α, β).

Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει :

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ'ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ΄ αυτό , τότε αυτή διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα Δ. Δηλαδή η f είναι είτε:
    - θετική για κάθε $x \in \Delta$, ή
    - αρνητική για κάθε $x \in \Delta$.

Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών γενικεύει το θεώρημα του Bolzano.

Έστω συνεχής συνάρτηση $f\colon [\alpha, \beta] \rightarrow R$, με πεδίο ορισμού ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, για την οποία αληθεύουν οι εξής συνθήκες:

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

Τότε για κάθε αριθμό λ που είνια μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_o) = \lambda$

Θεώρημα Μέγιστης κι Ελάχιστης Τιμής

Έστω συνεχής συνάρτηση $f\colon A \rightarrow R$ με πεδίο ορισμού το κλειστό σύνολο $A = [\alpha, \beta]$, μέσα στο οποίο λαμβάνει μια μέγιστη τιμη y_{max}και μια ελάχιστη τιμή y_{min}.

Τότε υπάρχουν $x_{1,}\ x_2 \epsilon [\alpha, \beta]$, τέτοια ώστε αν $y_{max} = f(x_{1,})$ και $y_{min} = f(x_2)$, ισχύει $y_{max} < f(x) < y_{min}$ για κάθε $x \epsilon [\alpha, \beta]$.

2

Οικονομική Επιστήμη

2.1. Εισαγωγή

Μικροοικονομική είναι ο κλάδος της οικονομικής επιστήμης που αναλύει την συμπεριφορά “μικρών” οικονομικών μονάδων, όπως οι καταναλωτές, τα νοικοκυριά, οι εργαζόμενοι, οι εταιρίες, μεμονωμένοι κλάδοι κ.τ.λ. Μελετά τον τρόπο κατανομής του εισοδήματος των ατόμων ή των νοικοκυριών μεταξύ των διαφόρων αγαθών και των υπηρεσιών. Επίσης, μελετά τον τρόπο λήψης αποφάσεων των επιχειρήσεων για τα συγκεκριμένα αγαθά και τις ποσότητες που θα παράγουν, καθώς και τον συνδυασμό των παραγωγικών συντελεστών που θα χρησιμοποιήσουν.

Κάθε άτομο, άσχετα με το φύλο, την ηλικία, την οικονομική και την κοινωνική του κατάσταση ή οποιοδήποτε άλλο χαρακτηριστικό του, καταναλώνει αγαθά και υπηρεσίες γιατί χωρίς κατανάλωση δεν μπορεί να επιβιώσει. Επομένως η γενική κατηγορία των καταναλωτών, αφού περιλαμβάνει ολόκληρο τον πληθυσμό, είναι η πολυπληθέστερη από τις κατηγορίες των ατόμων που εκτελούν κάποια οικονομική λειτουργία, γιατί όλες οι κατηγορίες αποτελούν υποομάδες του πληθυσμού. Για παράδειγμα τέτοιες υποομάδες αποτελούν οι κατηγορίες των εργαζομένων, των επενδυτών, των φορολογούμενων, των επιχειρηματιών κ.ο.κ. Η ανάγκη δε για κατανάλωση ιδιωτικών και κοινωνικών αγαθών είναι η σημαντικότερη αιτία για την οποία ασκούνται οι υπόλοιπες οικονομικές δραστηριότητες. Γιατί αν εργάζονται τα άτομα το κάνουν κυρίως για να αποκτήσουν το εισόδημα που τους χρειάζεται για την ικανοποίηση των καταναλωτικών τους αναγκών, αν πληρώνουν φόρους στο κράτος το κάνουν πάλι κυρίως γιατί υπάρχει η ανάγκη ικανοποίησης ορισμένων αναγκών με κρατική παραγωγή ή χρηματοδότηση αγαθών και υπηρεσιών κ.ο.κ.

Το πιο βασικό αξίωμα της οικονομικής επιστήμης είναι η ύπαρξη στενότητας αγαθών και υπηρεσιών, η οποία οφείλεται στη στενότητα παραγωγικών μέσων που χρειάζονται για την παραγωγή τους. Όσο και να αναπτύσσεται μια οικονομία και όσο και να αυξάνονται τα χρηματικά εισοδήματα των ατόμων, αυτά θα είναι ανεπαρκή για την πλήρη ικανοποίηση όλων των καταναλωτικών αναγκών τους. Είναι επομένως τα άτομα υποχρεωμένα να κάνουν συνεχώς επιλογές σχετικά με το ποια αγαθά και υπηρεσίες θα καταναλώνουν σε κάθε χρονική περίοδο και σε ποιες ποσότητες, για να μπορούν να επιτυγχάνουν τη μέγιστη δυνατή ικανοποίηση των καταναλωτικών τους αναγκών την οποία τους επιτρέπουν τα οικονομικά τους μέσα.Για να εξασφαλίζεται η ικανοποίηση του ενλόγω στόχου είναι απαραίτητο οι επιλογές αυτές να γίνονται με βάση ορισμένους κανόνες ορθολογικής οικονομικής συμπεριφοράς.

Έτσι λοιπόν η βασική υπόθεση συμπεριφοράς πάνω στην οποία στηρίζεται η όλη θεωρία του καταναλωτή είναι ότι ο τυπικός καταναλωτής συμπεριφέρεται σαν να μεγιστοποιεί μία συνάρτηση χρησιμότητας

$$U(\, x_1 \dots\, x_n)$$

όπου $x_1 \dots x_n$ είναι οι ποσότητες των αγαθών που καταναλώνει ο καταναλωτής και $U(\, x_1 \dots\, x_n)$ είναι η υποκειμενική του εκτίμηση για την προσωπική του χρησιμότητα από την κατανάλωση αυτών των αγαθών.

Ο λογικός περιορισμός που υπάρχει είναι ότι ο καταναλωτής δεν μπορεί να καταναλώσει απεριόριστες ποσότητες αγαθών. Έτσι λοιπόν η δαπάνη του περιορίζεται από το συνολικό δαπανώμενο εισόδημά του ,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$$

όπου, $p_i, \dots, p_n$ είναι οι τιμές στις οποίες μπορεί να αγοράσει τα αγαθά και M είναι ο προϋπολογισμός του για κατανάλωση στην σχετική περίοδο. Το κλασικό λοιπόν πρόβλημα της θεωρίας του καταναλωτή είναι το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της χρησιμότητας :

$$\max U(\, x_1 \dots\, x_n) \quad (1)$$

υπό τον περιορισμό $p_1 x_1 + p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n = M.$

Το πρόβλημα (1) παριστάνει μια υπόθεση για το πώς συμπεριφέρεται ο λογικός καταναλωτής. Επειδή η πραγματικότητα μπορεί να είναι διαφορετική, αυτό που έχει σημασία είναι να βρεθούν τι επαληθεύσιμες σχέσεις προκύπτουν από την (1) και να τα συγκρίνουμε με πραγματικά στοιχεία. Η έννοια της συνάρτησης χρησιμότητας έχει εμφανιστεί απ’ τον 19^{ο} αιώνα, οπότε οι οικονομολόγοι την φανταζόντουσαν σαν ένα αντικειμενικό μέτρο ικανοποίησης. Δηλαδή η κατανάλωση, π.χ. ενός πιάτου φαγητού, παρέχει ικανοποίηση ίση με κάποιο αριθμό μονάδων χρησιμότητας. Τότε ανακαλύφθηκε, κυρίως από τον Pareto, ότι όλες οι επαληθεύσιμες σχέσεις που συνεπάγετο μια απόλυτη συνάρτηση χρησιμότητας, μπορούσαν να εξαχθούν χρησιμοποιώντας μια πιο ευρεία έννοια χρησιμότητας που απλά κατατάσσει προτιμήσεις. Δηλαδή όλες οι χρήσιμες σχέσεις της θεωρίας του καταναλωτή μπορούν να εξαχθούν από την υπόθεση ότι οι καταναλωτές απλά μπορούν να κατατάξουν στην προτίμησή τους διάφορους συνδυασμούς αγαθών, χωρίς να αναφερόμαστε στην απόλυτη τιμή της χρησιμότητας απο την κατανάλωση ενός συγκεκριμένου συνδυασμού.

Δεν είναι δυνατή η μέτρηση της χρησιμότητας που δίνει σε έναν καταναλωτή κάθε συγκεκριμένη ποσότητα του κάθε αγαθού, όπως π.χ. είναι ο δείκτης με τον οποίο μετράμε τη θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου, δηλαδή δεν υπάρχει κάποιος επιστημονικά αποδεκτός δείκτης που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μέτρηση της απόλυτης τιμής χρησιμότητας. *Η μόνη εκτίμηση χρησιμότητας που δεχόμαστε ότι μπορεί να γίνει είναι σχετική, δηλαδή ο κάθε καταναλωτής μπορεί να ιεραρχήσει τις καταναλωτικές του προτιμήσεις.*

Το βασικό λοιπόν αξίωμα της θεωρίας είναι ότι όταν δίνονται δύο ομάδες διαφορετικών ποσοτήτων κάποιων αγαθών

$$x^1 = (x_1{}^1 \ldots x_n{}^1) \text{ και } x^2 = (x_1{}^2 \ldots x_n{}^2)$$

ο καταναλωτής πάντοτε μπορεί να τις συγκρίνει, δηλαδή για οποιεσδήποτε ποσότητες $x_j{}^i$. Πρέπει να τονιστεί πως αυτό προκύπτει απ' την υπόθεση ότι ο καταναλωτής έχει πλήρη γνώση των διαθέσιμων αγαθών, των ιδιοτήτων τους και των τιμών τους.

Ειδικότερα, για δύο τυχαίες ομάδες αγαθών x^iκαι x^j μόνο μια από τις ακόλουθες σχέσεις μπορεί να συμβαίνει :

1. Το x^i είναι προτιμότερο από το x^j
2. Το x^i είναι προτιμότερο από το x^j
3. Το x^i και το x^j προτιμούνται το ίδιο, δηλαδή ο καταναλωτής είναι αδιάφορος μεταξύ τους.

Οι οπαδοί της απόλυτης χρησιμότητας εκτός από αυτές τις ιδιότητες ήθελαν να προσδώσουν και ένα μέτρο σε κάθε ομάδα x^i, δηλαδή $\varphi(x^i) = \alpha_\iota$ όπου α_ι ήταν το μέτρο, αυτό όμως αποδείχτηκε ότι δεν οδηγούσε σε πρόσθετες επαληθεύσιμες σχέσεις. Η συνάρτηση χρησιμότητας που αντικατοπτρίζει τις ιδιότητες 1 έως 3, είναι απλά ένας δείκτης που μεγαλώνει όταν μεγαλώνει η προτίμηση. Μια συνάρτηση χρησιμότητας $U(\, x_1 \ldots x_n)$ που ενσωματώνει την βασική υπόθεση της συγκρισιμότητας μεταξύ δύο ομάδων αγαθών x^iκαι x^j πρέπει να έχει τις εξής ιδιότητες.

α) $U(x^i) > U(x^j)$ αν και μόνον αν το x^i είναι προτιμότερο του x^j
β) $U(x^i) < U(x^j)$ αν και μόνον αν το x^j είναι προτιμότερο του x^i
γ) $U(x^i) = U(x^j)$ αν και μόνον αν τα x^iκαι x^j προτιμώνται το ίδιο.

2.2. Εισοδηματικός Περιορισμός

Η ανάλυση που ακολουθεί παρακάτω περιγράφει τη διαδικασία επιλογής του ιδανικού επιπέδου κατανάλωσης, με τη βοήθεια ενός απλοποιημένου μικροοικονομικού υποδείγματος. Η χρήση εργαλείων της μικροοικονομίας κρίνεται προτιμότερη από τη μελέτη υποπεριπτώσεων marketing για την ανάλυση της συμπεριφοράς του καταναλωτή, αφού επίκεντρο είναι το προϊόν (ενώ στο marketing, ο καταναλωτής. Για λόγους υπεραπλούστευσης, θα θεωρηθεί ότι στην υποτιθέμενη αγορά παράγονται, προσφέρονται και ζητώνται μονάχα δύο αγαθά, έστω 1 και 2. Επίσης θα χρησιμοποιηθεί για τη διαγραμματική ανάλυση, το γνωστό σύστημα των δύο αξόνων, όπου στον οριζόντιο άξονα μετράται η ποσότητα κατανάλωσης για το αγαθό 1, x_1 και στον κάθετο η ποσότητα για το αγαθό 2, x_2.

Ο εισοδηματικός περιορισμός ουσιαστικά εκφράζει το τι μπορεί να αποκτήσει ο καταναλωτής σε μία δεδομένη χρονική στιγμή και σύμφωνα πάντα με την αγοραστική δύναμη που διαθέτει.Εάν οι καταναλωτές είχαν ένα απεριόριστο εισόδημα ή το ίδιο, εάν τα αγαθά δίνονταν δωρεάν (δεν είχαν τιμή), τότε δεν θα υπήρχε το πρόβλημα της δυνατότητας της πραγματοποιήσεως μιας επιθυμίας, και κατά συνέπεια δεν θα υπήρχε καν λόγος δημιουργίας μιας οικονομικής θεωρίας περί τιμών. Επειδή όμως αυτό δεν συμβαίνει ακόμη και στις πλουσιότερες εισοδηματικές τάξεις μιας κοινωνίας, ο απεριόριστος αριθμός των επιθυμιών των καταναλωτών αντιμετωπίζεται πάντοτε από τον περιορισμό του εισοδήματος τους.

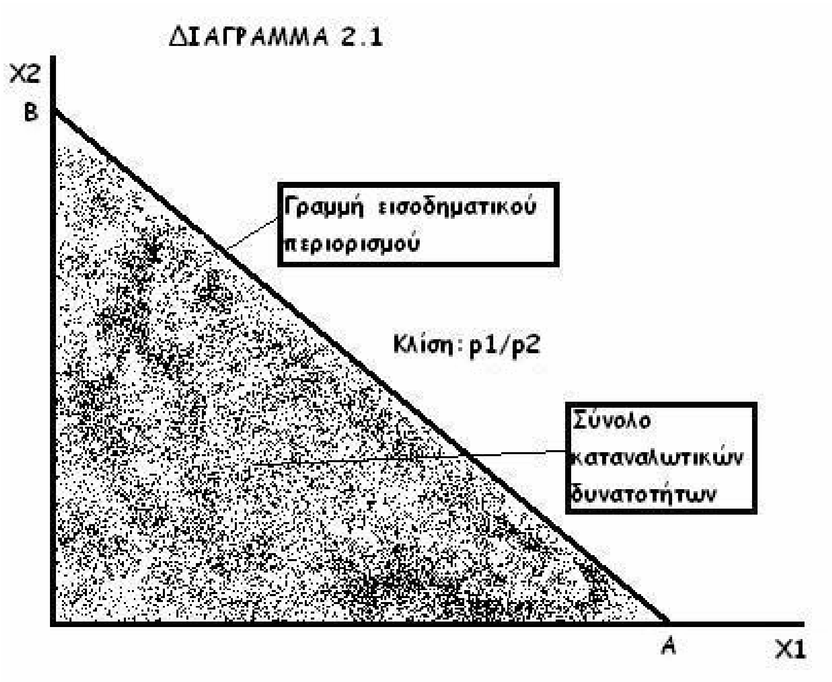
Ο εισοδηματικός αυτός περιορισμός του καταναλωτή αποτελεί την προϋπόθεση της πραγματοποίησης ορισμένων από τις επιθυμίες του.Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο καταναλωτής είναι η διάθεση του περιορισμένου εισοδήματός του ώστε να πετύχει την μέγιστη χρησιμότητά του. Με άλλα λόγια η έννοια αυτή περιγράφει το ‘τι είναι προσιτό’ για τον καταναλωτή. Ο συνδυασμός των δύο αγαθών (x_1, x_2) μας πληροφορεί για την ποσότητα από το αγαθό 1 και την ποσότητα από το αγαθό 2 που αποκτά ο καταναλωτής.

Έστω τώρα ότι ο συνδυασμός τιμών για τα αγαθά 1 και 2, αντίστοιχα είναι (p_1, p_2) και ότι το ποσό πο μπορεί να δαπανήσει ο καταναλωτής συνολικά, συμβολίζεται με m. Τότε ο εισοδηματικός περιορισμός ορίζεται ως εξής:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$$

Το $p_1 x_1$ είναι το ποσό που ο καταναλωτής δαπανά για το αγαθό 1 και το $p_2 x_2$ το ποσό που δαπανά για το αγαθό 2. Ο εισοδηματικός περιορισμός περιγράφει απλά ότι το ποσό που ο καταναλωτής δαπανά συνολικά για τα αγαθά 1 και 2 που υπάρχουν στην αγορά δεν μπορεί να υπερβαίνει το συνολικό ποσό που μπορεί να δαπανήσει. Η ισότητα της σχέσης (1) ορίζει την γραμμή εισοδηματικού περιορισμού όπως αυτή φαίνεται στο διάγραμμα, δηλαδή:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq m$$



Σχήμα 2.1: *Γραφική παραστάσεις εισοδηματικού περιορισμού, συνάρτησης* $x_2(x_1)$

Η γραμμή εισοδηματικού περιορισμού, ή αλλιώς *γραμμή καταναλωτικών δυνατοτήτων*, συμβολίζει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς (x_1, x_2) που εξαντλούν ακριβώς το εισόδημα του καταναλωτή, ενώ οι συνδυασμοί στη νοητή περιοχή κάτω από τη γραμμή, αποτελούν όλους τους εφικτούς συνδυασμούς (x_1, x_2) και οι οποίοι κοστίζουν λιγότερο από m.

Η *κλίση της γραμμής εισοδηματικού περιορισμού* είναι p_1/p_2. Ο λόγος αυτός έχει μια ιδιαίτερη οικονομική ερμηνεία αφού *υποδηλώνει το ρυθμό με τον οποίο η αγορά υποκαθιστά το αγαθό 1 με το αγαθό 2,* δηλαδή μία εκτίμηση της αξίας του κάθε προϊόντος που καθορίζεται αποκλειστικά από της δυνάμεις της αγοράς, την προσφορά και την ζήτηση. Διαφορετικά, *ο λόγος* p_1/p_2 *παριστά το κόστος ευκαιρίας κατανάλωσης του αγαθού 1 έναντι του αγαθού 2,* ή την ποσότητα του αγαθού 1 που η αγορά ‘υπολογίζει’ ότι αξίζει να θυσιαστεί ώστε να αποκτηθεί περισσότερο από το αγαθό 2.

2.3. Δυνάμεις της Αγοράς: Ζήτηση – Προσφορά

Η λειτουργία των αγορών προσδιορίζεται από δύο βασικές δυνάμεις, την *ζήτηση* και την *προσφορά*. Οι καμπύλες ζήτησης και προσφοράς είναι αναγκαίες για να προσδιορίσουν την τιμή στην αγορά. Η *εξομοίωσή τους καθορίζει την τιμή* και τη *ποσότητα ισορροπίας*, δηλαδή την τιμή όπου οι αγοραστές και οι πωλητές του προϊόντος ή της υπηρεσίας αγοράζουν και πουλούν την ποσότητα που μεγιστοποιεί την χρησιμότητα των καταναλωτών και τα κέρδη των παραγωγών. Άπαξ και βρεθεί το σημείο ισορροπίας δεν υπάρχει λόγος να μετατοπιστούμε από αυτό, εκτός εάν επέλθουν σημαντικές αλλαγές σε μια από τις μεταβλητές που επηρεάζουν είτε τη ζήτηση είτε τη προσφορά. Εάν π.χ. η τιμή ισορροπίας στην αγορά υπολογιστών είναι 1200 ευρώ για ένα συγκεκριμένο μοντέλο και η ζήτηση και η προσφορά είναι 5000 υπολογιστές, δεν υπάρχει λόγος να μετατοπιστούμε από το σημείο αυτό εκτός εάν οι προτιμήσεις των καταναλωτών αλλάξουν ή η τιμή ενός εξαρτήματος του υπολογιστή αυξήθηκε και αυτό επηρέασε το κόστος των υπολογιστών, κτλ.

2.3.1. Νόμος της Ζήτησης

Στα οικονομικά ο όρος ζήτηση (demand) αναφέρεται στην επιθυμία για ένα αγαθό που υποστηρίζεται από τη θέληση - προθυμία, αλλά και την ικανότητα των αγοραστών να πληρώσουν το τίμημα απόκτησης του εν λόγω αγαθού ή της υπηρεσίας. Εδώ το σημαντικό σημείο είναι ότι οι επιχειρήσεις θα συνεχίσουν να παρέχουν αγαθά και υπηρεσίες, μόνο αν μπορούν να τα πωλούν σε τιμές που καλύπτουν το κόστος τους. Με άλλα λόγια,, *θα υπάρξει προσφορά ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας μόνο αν υπάρχει ζήτηση γι' αυτό σε τιμή πάνω από το κόστος του*, αλλιώς οι επιχειρήσεις δεν θα το παράγουν.

Η ζήτηση ορίζεται ως *η συνολική ποσότητα ενός αγαθού που απαιτείται σε οποιαδήποτε δεδομένη τιμή για κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα*.

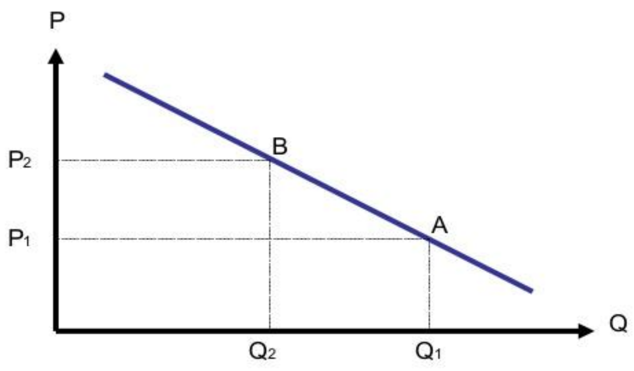
Το σημείο εκκίνησης για την κατανόηση της λειτουργίας των αγορών είναι η εμπειρική παρατήρηση ότι, με ελάχιστες εξαιρέσεις, η ζητούμενη ποσότητα ενός αγαθού αυξάνει καθώς μειώνεται η τιμή. Το γεγονός αυτό συνήθως αναφέρεται με τη μορφή ενός «νόμου» της ζήτησης:

«Με τους άλλους παράγοντες σταθερούς, μεγαλύτερη ποσότητα ενός αγαθού θα ζητηθεί σε χαμηλότερες τιμές από ό,τι σε υψηλότερες τιμές».

Η έκφραση, «Με τους άλλους παράγοντες σταθερούς», είναι ένα πολύ σημαντικό μέρος αυτής της δήλωσης. Σε πολυπαραμετρικά συστήματα δεν μπορούμε να διατυπώσουμε νόμους όταν όλες οι παράμετροι αλλάζουν ταυτόχρονα. Εν προκειμένω, αν όταν η τιμή ενός αγαθού μειώνεται τα εισοδήματα των καταναλωτών πέφτουν, ή οι επιθυμίες τους αλλάζουν, ή οι τιμές άλλων παρόμοιων αγαθών αλλάζουν, τότε οι επιπτώσεις της πτώσης των τιμών είναι αβέβαιες. Μόνο όταν οι υπόλοιποι παράγοντες δεν αλλάζουν είναι βέβαιο ότι θα συμβεί αύξηση της ζήτησης στις μειωμένες τιμές.

Για παράδειγμα, η επίδραση της πτώσης της τιμής του βοείου κρέατος στη ζητούμενη ποσότητα δεν μπορεί να προβλεφθεί αν πτώσεις στις τιμές του χοιρινού κρέατος και αρνιού ελάμβαναν χώρα την ίδια στιγμή. Αν, όμως, οι τιμές των άλλων τύπων κρέατος δεν αναμένεται να αλλάξουν, η πτώση θα επιφέρει υψηλότερη ζήτηση. Είναι σημαντικό να θυμάστε ότι κάθε φορά που μια δήλωση γίνεται για την επίδραση της μεταβολής των τιμών στην ζητούμενη ποσότητα, πάντα υποθέτουμε ότι οι λοιποί παράγοντες δεν αλλάζουν.

Καμπύλη Ζήτησης είναι η γραφική παράσταση της *τιμής P* ενός προϊόντος, οταν ζητείται σε *ποσότητα* Q_d



Σχήμα 2.2: Γραφική παράστασης συνάρτησης ζήτησης $P(Q_d)$

Αν η τιμή ενός αγαθού μειώνεται, ενώ τα εισοδήματα των καταναλωτών και οι τιμές των άλλων αγαθών παραμένουν αμετάβλητες, οι καταναλωτές θα έχουν μεγαλύτερη συνολική αγοραστική δύναμη. Μπορούν να αγοράζουν τώρα περισσότερα από κάθε αγαθό άρα και το συγκεκριμένο, χωρίς να χρειάζεται να αγοράσουν λιγότερα από τα υπόλοιπα αγαθά

Τα περισσότερα εμπορεύματα έχουν ανταγωνιστικά στενά υποκατάστατα. Όταν η τιμή ενός αγαθού μειώνεται, γίνεται σχετικά πιο ελκυστική σε σύγκριση με τις τιμές των υποκατάστατων του. Περισσότερο εμπόρευμα θα απαιτηθεί αφού οι καταναλωτές θα το προτιμήσουν έναντι κάποιων από τα υποκατάστατα, τα οποία είναι πλέον σχετικά πιο ακριβά. Για παράδειγμα, εάν η τιμή του βουτύρου πέσει, πολλοί άνθρωποι θα αγοράσουν περισσότερο βούτυρο και λιγότερη μαργαρίνη και το αποτέλεσμα είναι ότι η ζήτηση βουτύρου θα αυξηθεί σε σχέση με πριν την αλλαγή τιμής. Εάν για κάποιο φρούτο έρχεται η εποχή της ωρίμανσης και πέφτει η τιμή του, πολλοί άνθρωποι θα το αγοράσουν έναντι άλλων ακριβότερων φρούτων. Μια αύξηση της τιμής ενός εμπορεύματος θα έχει προφανώς τα αντίθετα αποτελέσματα δηλ. η ζήτηση θα μειωθεί.

Παράγοντες μπορούν να μετακινήσουν την καμπύλη ζήτησης είναι:

- Εισόδημα καταναλωτών
- Τιμές σχετικών προϊόντων
- Διαφήμιση
- Καταναλωτικές προτιμήσεις
- Πληθυσμός
- Προσδοκίες καταναλωτών

Η *συνάρτηση ζήτησης* ενός αγαθού ή υπηρεσίας μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως

$$Q_d = f(P, Y, P_r, T_a, E_x, P_o)$$

όπου

Q_d: η ζητούμενη ποσότητα

P: η τιμή του αγαθού

Y: το εισόδημα του καταναλωτή

P_r: η τιμή σχετικών αγαθών (συμπληρωματικών, υποκατάστατων)

T_a: οι προτιμήσεις του καταναλωτή

E_x: οι προσδοκίες του καταναλωτή

P_o: ο πληθυσμός

Υποθέτοντας ότι όλες οι μεταβλητές παραμένουν σταθερές εκτός από την τιμή του εν λόγω αγαθού τότε η συνάρτηση ζήτησης γίνεται:

$$Q_d = f(P)$$

Εάν υποθέσουμε *γραμμική σχέση* μεταξύ *τιμής* και *ποσότητας*, η συνάρτηση *ζήτησης* μπορεί να γραφτεί :

$$Q_d = \alpha - \beta P$$

όπου,

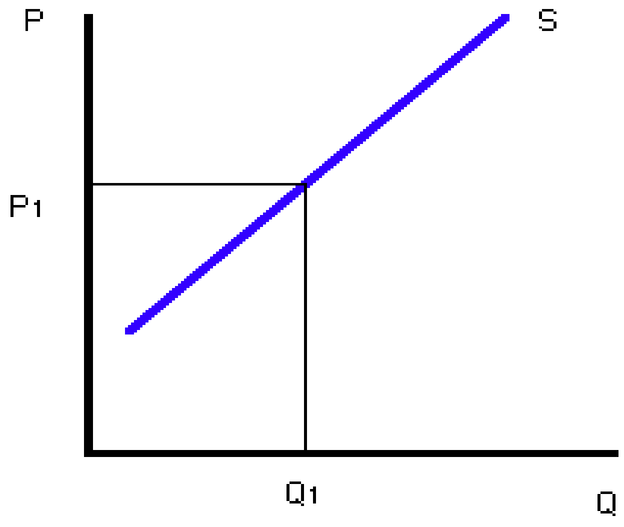
α: η αυτόνομη κατανάλωση, δηλαδή η ζητούμενη ποσότητα όταν η τιμή είναι μηδέν

$-\beta$: είναι η κλίση της καμπύλης ζήτησης, που είναι αρνητική

2.3.2 Νόμος της Προσφοράς

Προσφορά ορίζεται ως *η ποσότητα ενός αγαθού το οποίο διατίθεται στην αγορά προς πώληση σε κάποια δεδομένη τιμή για κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα*. Τα ποσά αγαθών που οι επιχειρήσεις είναι διατεθειμένες να προσφέρουν, εξαρτώνται από τις τιμές που οι άνθρωποι είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν. Όταν οι αγρότες θεωρούν ότι οι τιμές της αγοράς είναι πολύ χαμηλές, οργώνουν τα λαχανικά μερικές φορές πίσω στο έδαφος ή τα πετούν σε χωματερές, αντί να τα πάνε στην αγορά, διότι ίσως το περαιτέρω κόστος μεταφοράς και διάθεσης δεν καλύπτει το επί πλέον κόστος. Έτσι αναγκάζονται να μειώσουν την προσφορά ώστε να συγκρατηθούν οι τιμές. Σύμφωνα με άλλο νόμο της οικονομίας, "όσο μεγαλύτερη η ποσότητα στην οποία προσφέρεται ένα αγαθό, τόσο υψηλότερη η τιμή του". Αυτό απεικονίζεται στο γράφημα της καμπύλης προσφοράς.

Καμπύλη Προσφοράς: είναι η γραφική παράσταση της *τιμής P* ενός προϊόντος, οταν προσφέρεται σε *ποσότητα* Q_s



Σχήμα 2.3: Γραφική παράστασης συνάρτησης προσφοράς $P(Q_s)$

Το σχήμα της καμπύλης προσφοράς βασίζεται στην ιδέα ότι *οι επιχειρήσεις θα προσπαθούν πάντα να κερδίσουν το μέγιστο κέρδος*. Η υπόθεση αυτή εξηγεί την ανοδική κλίση από τα αριστερά προς τα δεξιά της καμπύλης προσφοράς κι η προφανής εξήγηση είναι ότι οι επιχειρήσεις είναι έτοιμες να προσφέρουν περισσότερα αγαθά σε υψηλότερες τιμές.

Η αύξηση της ζήτησης ενός εμπορεύματος το κάνει πιο περιζήτητο και η τιμή του θα αυξηθεί. Αυτό θα καταστήσει πιο κερδοφόρα την παραγωγή του και η προσφορά επίσης θα αυξηθεί, καθώς η αύξηση της κερδοφορίας θα ενθαρρύνει τις επιχειρήσεις να αυξήσουν την παραγωγή τους και θα δελεάσουν περισσότερες επιχειρήσεις να εισέλθουν σε αυτό τον κλάδο παραγωγής.

Αντίθετα, η *πτώση της ζήτησης* για ένα προϊόν θα *τείνει να μειώσει την τιμή του* και *στην υπάρχουσα τιμή θα υπάρξει πλεόνασμα στην αγορά*. Οι επιχειρήσεις θα υποχρεωθούν να μειώσουν την τιμή προκειμένου να διαθέσουν τα πλεονάσματα και σαν επακόλουθο οι επιχειρήσεις θα μειώσουν την παραγωγή τους οδηγώντας σε μείωση της προσφοράς. Η πτώση των τιμών μπορεί επίσης να αναγκάσει ορισμένες λιγότερο αποδοτικές επιχειρήσεις να εγκαταλείψουν τον κλάδο.

Παράγοντες που μπορούν να μετακινήσουν την καμπύλης Προσφοράς αποτελούν:

- Τιμές εισροών
- Τεχνολογία και κυβερνητικές πολιτικές
- Αριθμός επιχειρήσεων
- Υποκατάστατα στην παραγωγή
- Φορολογία, επιδοτήσεις
- Φυσικοί παράγοντες

Η *συνάρτηση προσφοράς* ενός αγαθού ή υπηρεσίας μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως :

$$Q_s = f(P, Y, P_r, T, E_x, P_i)$$

όπου,

Q_s: η προσφερόμενη ποσότητα

P: η τιμή του αγαθού

Y: το εισόδημα του καταναλωτή

P_r: η τιμή σχετικών αγαθών (συμπληρωματικών, υποκατάστατων)

T_a: η τεχνολογία

E_x: οι προσδοκίες των παραγωγών

P_i: οι τιμές των συντελεστών παραγωγής

Εάν υποθέσουμε ότι όλες οι μεταβλητές παραμένουν σταθερές εκτός από την τιμή του εν λόγω αγαθού, η συνάρτηση προσφοράς γίνεται:

$$Q_s = f(P)$$

Εάν υποθέσουμε *γραμμική σχέση* μεταξύ *τιμής* και *ποσότητας*, η συνάρτηση *ζήτησης* μπορεί να γραφτεί :

$$Q_s = \gamma + \delta P$$

όπου,

γ: η αυτόνομη προσφορά, δηλαδή η προσφερόμενη ποσότητα όταν η τιμή είναι μηδέν

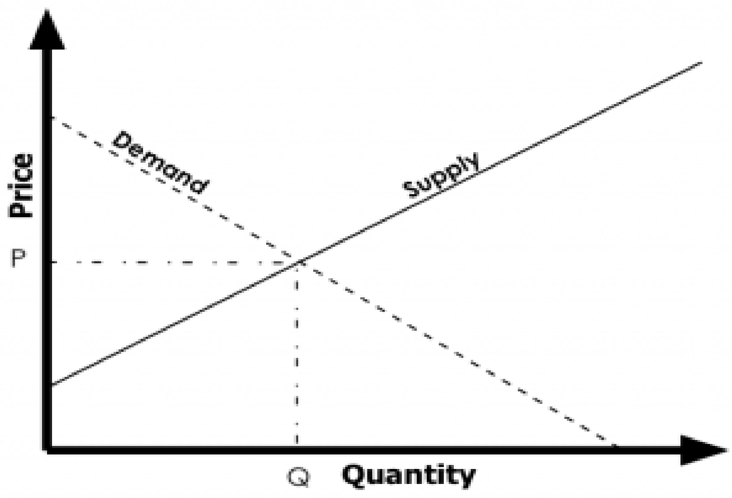
δ: είναι η κλίση της καμπύλης προσφοράς, που είναι θετική

2.3.3. Ισορροπία Αγοράς

Η ισορροπία αγοράς επέρχεται όταν η προσφορά είναι ίση με την ζήτηση, $Q_d = Q_s$

Αν σχεδιαστούν μαζί οι καμπύλες προσφοράς και ζήτησης για ένα αγαθό, παρατηρείται ότι τέμνονται σε μία μόνο τιμή. Πρόκειται για την *τιμή ισορροπίας ή τιμή αγοραπωλησίας*. Μόνο σε αυτή την τιμή η ζητούμενη ποσότητα ισούται με την προσφερόμενη ποσότητα. Η τιμή ισορροπίας προκύπτει από μια σταδιακή διαδικασία.

Αν οι συναλλαγές πραγματοποιούνταν σε τιμές εκτός από την τιμή της αγοράς, θα υπάρχει είτε έλλειψη είτε πλεόνασμα, με αποτέλεσμα η τιμή να κινηθεί μέχρι να φτάσει στο επίπεδο ισορροπίας. *Σε υψηλότερη τιμή* δημιουργούνται πλεονάσματα που αναγκάζουν τους πωλητές να ρίξουν την τιμή για να αποφύγουν τα απούλητα αποθέματα. *Σε χαμηλότερη τιμή*, η ζητούμενη ποσότητα υπερβαίνει κατά πολύ την προσφερόμενη ποσότητα. Θα υπάρξει μια έλλειψη, γεγονός που θα παρασύρει την τιμή προς τα πάνω. *Στην τιμή ισορροπίας δεν υπάρχει ούτε έλλειψη ούτε πλεόνασμα στην αγορά.*



Σχήμα 2.4: Γραφική παράσταση συνάρτησης προσφοράς $P(Q_s)$ *και ζήτησης* $P(Q_d)$

Από τις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για το σημείο ισορροπίας και την λύση του συστήματος προκύπτει η μοναδική λύση στο πρόβλημα, δηλαδή η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας:

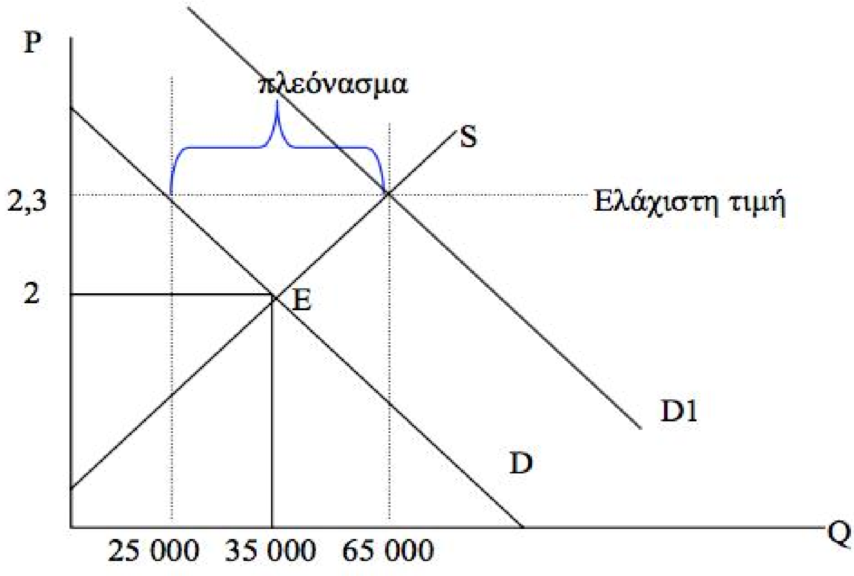
$$\begin{cases} Q_d = \alpha - \beta P \\ Q_s = \gamma + \delta P \\ Q_d = Q_s \end{cases} \text{, άρα } P = \frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}$$

2.3.4 Εφαρμογές Προσφοράς – Ζήτησης: Κρατική Παρέμβαση

Πολλές φορές οι κυβερνήσεις χρησιμοποιούν ορισμένες πολιτικές για να βοηθήσουν ορισμένες ομάδες παραγωγών ή καταναλωτών. Η σταφίδα, το λάδι, τα ενοίκια, κτλ είναι μερικά παραδείγματα επέμβασης της ελληνικής κυβέρνησης. Σε μερικές περιπτώσεις η κυβέρνηση καθορίζει μια μέγιστη τιμή (πλαφόν) και σε άλλες περιπτώσεις μια ελάχιστη τιμή. Η εκάστοτε καθορισμένη τιμή μετατρέπει τα κριτήρια αποφάσεως των καταναλωτών και των παραγωγών και η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας είναι εντελώς διαφορετικές από τις αντίστοιχες τιμές σε κατάσταση ελεύθερης αγοράς.

Α) Ελάχιστη Τιμή (price floor)

Η ελάχιστη τιμή τίθεται όταν η κυβέρνηση θέλει να προστατεύσει τους παραγωγούς ενός προϊόντος όπως της σταφίδας και του λαδιού. Ο ελεύθερος ανταγωνισμός καθορίζει τη τιμή ισορροπίας του αγαθού η οποία θεωρείται πολύ χαμηλή. Εάν η τιμή ισορροπίας είναι 2 € το λίτρο, η ζητούμενη εβδομαδιαία ποσότητα είναι 35 000 λίτρα την εβδομάδα. Εάν όμως η κυβέρνηση καθορίζει την τιμή στα 2,30 €, σε αυτή τη τιμή η ζητούμενη ποσότητα είναι 25 000 λίτρα ενώ η προσφορά είναι 65 000 λίτρα. Υπάρχει λοιπόν ένα πλεόνασμα στην αγορά ίσον με 40 000 λίτρα τα οποία πρέπει η κυβέρνηση να τα αγοράσει για να "καθαρίσει" την αγορά.



Σχήμα 2.5: Γραφική παράσταση μετακινησης ισορροπιας αγοράς, λόγω επιβολής πλαφόν

Οι παραγωγοί εισπράττουν $2{,}3 \cdot 65\,000 = 149\,500$ €.

Οι καταναλωτές πληρώνουν 2,3 αντί 2 ευρώ και η κυβέρνηση έχει ένα κόστος ίσο με $2{,}3 \cdot 40\,000 = 92\,000$ €

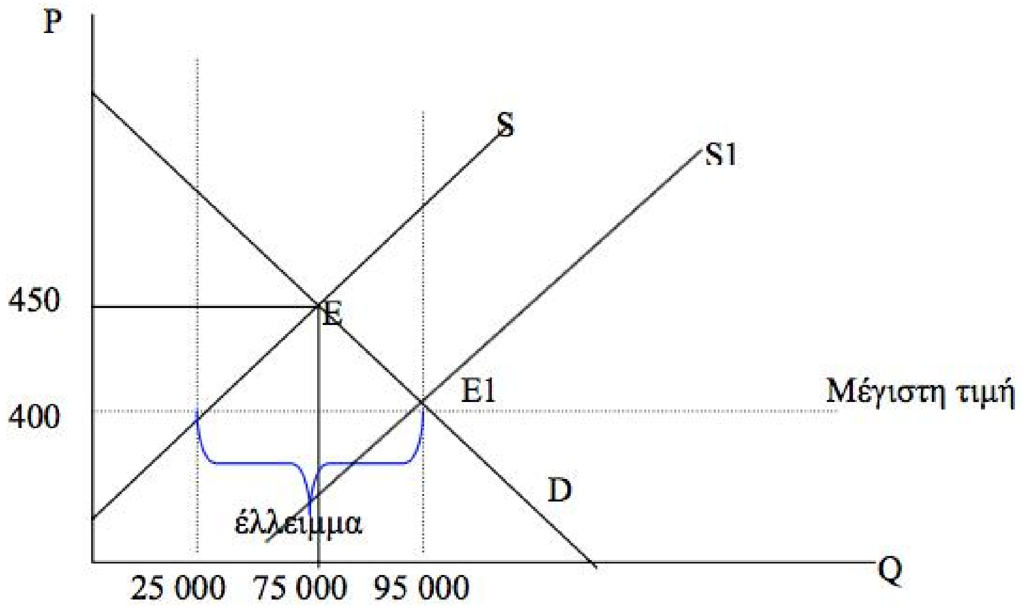
ή πιο ολοκληρωμένα:

Έσοδα παραγωγών = δαπάνες καταναλωτών + κόστος της κυβέρνησης

$$149\,500 \text{ €} = (2{,}3 \cdot 25\,000) + (2{,}3 \cdot 40\,000) \text{ €}$$

B) Μέγιστη τιμή (price ceilings)

Η μέγιστη τιμή τίθεται *όταν η κυβέρνηση θέλει να προστατεύσει τους καταναλωτές ενός προϊόντος ή υπηρεσίας* όπως τα ενοίκια. Ο ελεύθερος ανταγωνισμός καθορίζει τη τιμή ισορροπίας του αγαθού ή της υπηρεσίας σε ένα επίπεδο το οποίο θεωρείται πολύ υψηλό. Εάν η τιμή ισορροπίας του ενοικίου στην ελεύθερη αγορά είναι 450 ευρώ το μήνα, η ζητούμενη και η προσφερόμενη ποσότητα ετησίως είναι 75.000 διαμερίσματα. Εάν όμως η κυβέρνηση καθορίσει την τιμή στα 400 ευρώ, σε αυτή τη τιμή η ζητούμενη ποσότητα είναι 95.000 διαμερίσματα ενώ η προσφορά είναι 45.000 διαμερίσματα.Υπάρχει λοιπόν ένα έλλειμμα στην αγορά ίσο με 70.000 διαμερίσματα.



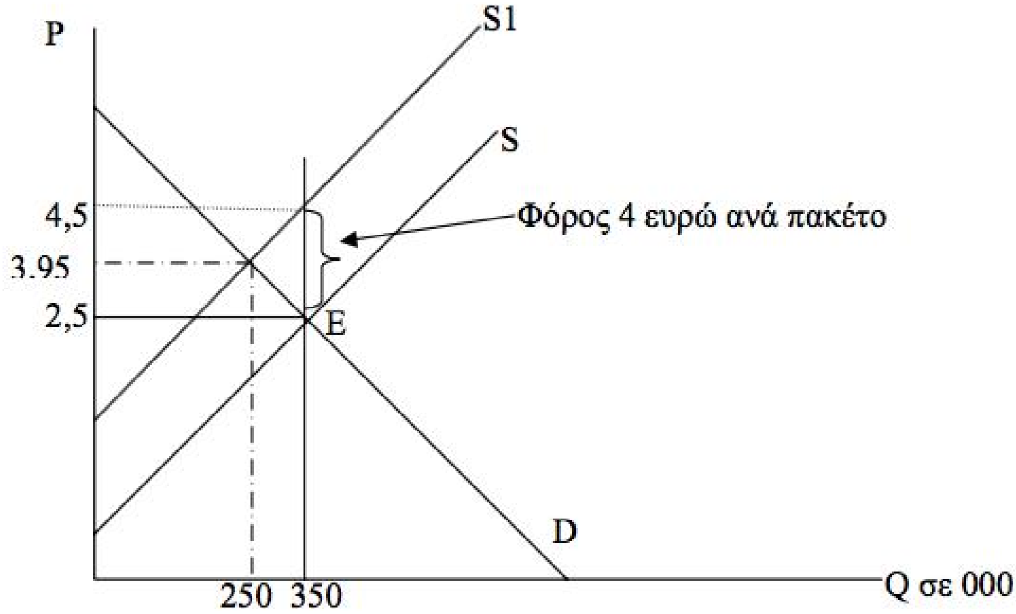
Σχήμα 2.6: Γραφική παράσταση μετακινησης ισορροπίας αγοράς, λόγω επιβολής μέγιστης τιμής

Γ) Το αποτέλεσμα των φόρων

Η κυβέρνηση επιβάλει φορολογία σε πολλά είδη και μπορεί να πάρει πολλές μορφές. Ο φόρος μπορεί να είναι μοναδιαίος , πχ 5 ευρώ ανά μονάδα, ή ποσοστιαίος, πχ 18% επί της τιμής. Το αποτέλεσμα της φορολογίας εξαρτάται από το είδος του φόρου και από την ελαστικότητα των συναρτήσεων της ζήτησης και της προσφοράς.

Ένας συνηθισμένος φόρος είναι αυτός που η κυβέρνηση βάζει σε ορισμένα είδη, π.χ. 2 ευρώ σε κάθε πακέτο τσιγάρων. Ο ελεύθερος ανταγωνισμός καθορίζει τη τιμή ισορροπίας ενός πακέτου τσιγάρων στα 2,50 ευρώ. Στην τιμή αυτή η ζητούμενη εβδομαδιαία ποσότητα είναι 350.000 πακέτα την εβδομάδα. Εάν όμως η κυβέρνηση βάλει ένα φόρο των 2 ευρώ ανά πακέτο τότε η καμπύλη προσφοράς μετατίθεται προς τα πάνω κατά 4 ευρώ. Η ζητούμενη ποσότητα όμως καθορίζεται από την τομή της νέας καμπύλης προσφοράς και της καμπύλης ζήτησης. Η νέα τιμή στην αγορά είναι 3,95 το πακέτο και όχι 4,5, ενώ η ζητούμενη ποσότητα πέφτει στα 250.000 πακέτα.

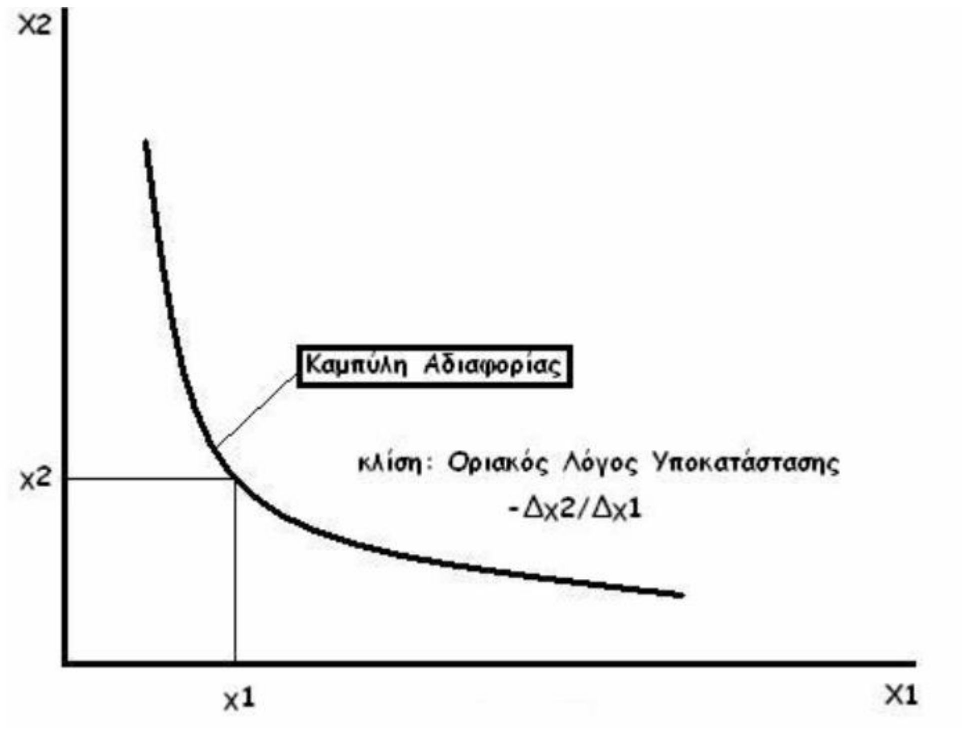
Τα έσοδα της κυβέρνησης είναι $2 \cdot 250\,000 = 500\,000$ €. Ο καταναλωτής πληρώνει 3.95 €, δηλ, 1.45 €, από τα 2 € του φόρου και ο παραγωγός απορροφά τα υπόλοιπα 55 λεπτά του φόρου.



Σχήμα 2.7: Γραφική παράσταση μετακινησης ισορροπίας αγοράς, λόγω επιβολής φορολογίας

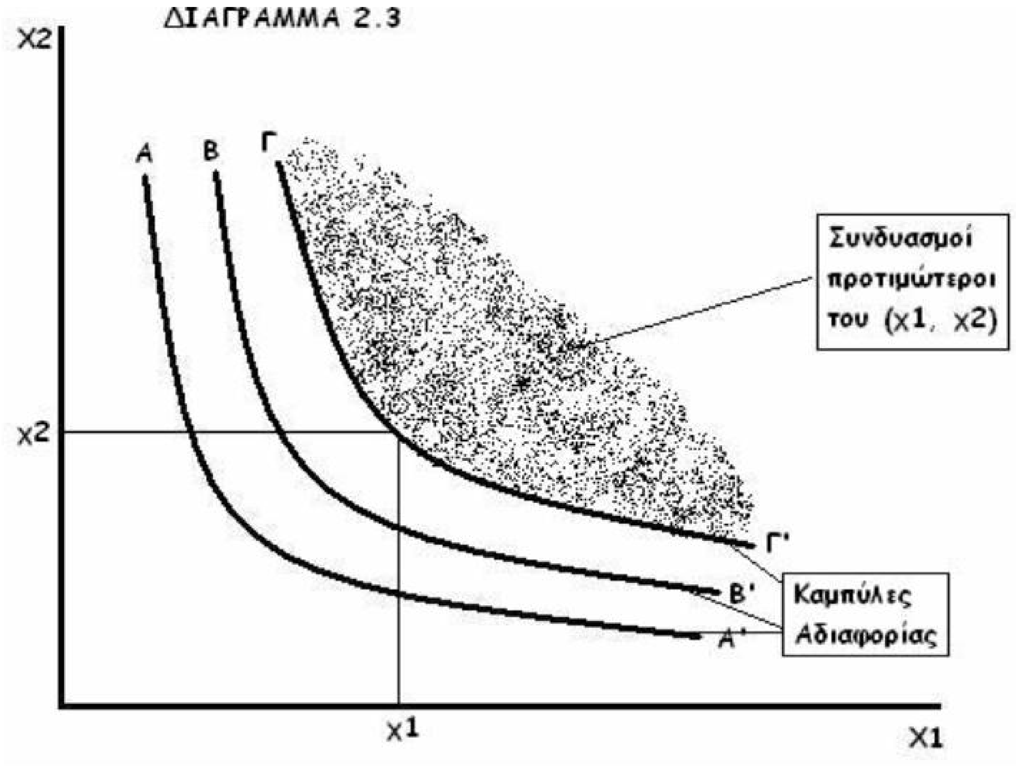
2.4. Καμπύλες αδιαφορίας

Οι καμπύλες αδιαφορίας *ορίζουν* τους *συνδυασμούς* δύο ή περισσοτέρων *αγαθών* που δίνουν στον καταναλωτή την *ίδια χρησιμότητα. Κάθε επίπεδο χρησιμότητας αντιστοιχεί και σε μια καμπύλη αδιαφορίας*. Στο παρακάτω διάγραμμα οι δύο άξονες απεικονίζουν τα μεγέθη κατανάλωσης για τα προϊόντα 1 και 2. Έστω όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί (x_1, x_2) για τους οποίους ο εν λόγω καταναλωτής είναι εντελώς αδιάφορος μεταξύ τους, όσον αφορά το τι θα καταναλώσει. Με άλλα λόγια, *όλοι οι συνδυασμοί πάνω στη συγκεκριμένη καμπύλη αδιαφορίας έχουν την ίδια σημασία για τον καταναλωτή αφού οποιονδήποτε και να επιλέξει θα έχει ακριβώς την ίδια αξία που θα είχε επιλέγοντας έναν άλλο*. Δηλαδή είναι αδιάφορος μεταξύ των δυνατών συνδυασμών. Όποιον και να επιλέξει θεωρεί – υποκειμενικά πάντα – ότι θα του προσφέρει την ίδια ακριβώς χρησιμότητα με έναν άλλο επί της ίδιας καμπύλης αδιαφορίας.



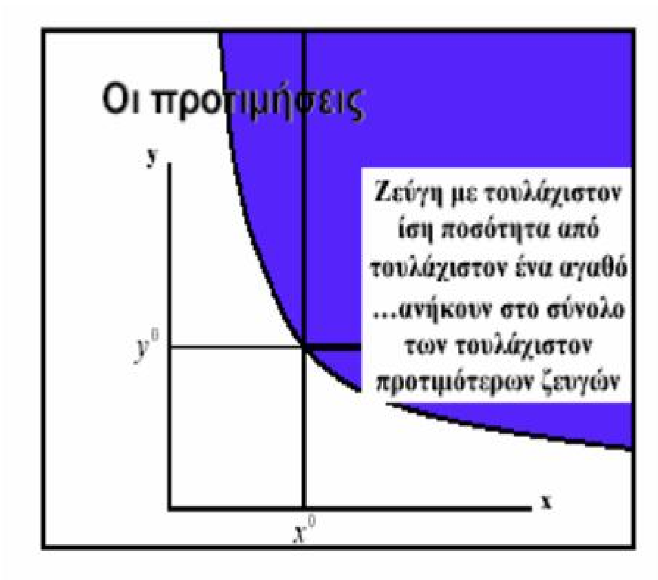
Σχήμα 2.8: Παράδειγμα καμπύλης αδιαφορίας ενός καταναλωτή

Αξίζει να σημειωθεί ότι ένας ορθολογικός καταναλωτής, είναι προφανές ότι προτιμά συνδυασμούς που βρίσκονται δεξιότερα της καμπύλης αδιαφορίας αφού έτσι καταναλώνει περισσότερο και από τα δύο αγαθά, ενώ αντιθέτως θεωρεί χειρότερους τους συνδυασμούς αριστερά της καμπύλης που απεικονίζουν λιγότερη ποσότητα και για τα δύο αγαθά. Υπάρχει και η περίπτωση να υπάρχουν πολλές καμπύλες αδιαφορίας για έναν καταναλωτή, όπως στο σχήμα 2.9. Σκεφτόμενος ορθολογικά, ο καταναλωτής προτιμά να βρίσκεται στην καμπύλη ΓΓ΄ παρά στις ΑΑ΄ και ΒΒ΄ οι οποίες εμφανώς του προσφέρουν συνδυασμούς με λιγότερη κατανάλωση και για το αγαθό 1 αλλά και για το 2. Με αυτόν τον τρόπο μελετώνται όχι μόνο οι συνδυασμοί για τους οποίους ο καταναλωτής είναι αδιάφορος, αλλά και εκείνους τους οποίους θεωρεί καλύτερους ή χειρότερους.



Σχήμα 2.9: Καμπύλες αδιαφορίας ΑΑ’ , ΒΒ΄, ΓΓ’ για τον ίδιο καταναλωτή

Η απεικόνιση των καμπυλών αδιαφορίας έγινε κατά τέτοιον τρόπο ώστε να δείχνει ότι οι χρησιμότητες αυτών συνδέονται. Όσο απομακρυσμένη από την αρχή των αξόνων είναι μια καμπύλη αδιαφορίας τόσο η χρησιμότητα, την οποία αντιπροσωπεύει, γίνεται μεγαλύτερη, αφού ο καταναλωτής καταναλώνει μεγαλύτερες ποσότητες και από τα δύο αγαθά.



Σχήμα 2.10: Αναπαράσταση χάρτη αδιαφορίας του ίδιου καταναλωτή

Το σύνολο όλων των καμπυλών αδιαφορίας, το οποίο γεμίζει το πρώτο τεταρτημόριο, ονομάζεται χάρτης αδιαφορίας. *Κάθε καταναλωτής έχει τις δικές του καμπύλες αδιαφορίας και επομένως τον δικό του χάρτη αδιαφορίας.*

Με την μεταβολλή των προτιμήσεων του καταναλωτή μεταβάλλεται και ο χάρτης αδιαφορίας του. Για την κατασκευή ενός χάρτη αδιαφορίας κανένα ρόλο δεν παίζουν το εισόδημα του καταναλωτή και οι τιμές των αγαθών. Αυτό γιατί υποτέθηκε ότι οι προτιμήσεις αυτού, όπου βασίζεται ο χάρτης αδιαφορίας, κατατάσσονται ανεξάρτητα του εισοδήματός του και των τιμών των αγαθών. Η ύπαρξη των περιοριστικών παραγόντων του εισοδήματος και των τιμών κάνει δυνατή την πραγματοποίηση ορισμένων μόνο από τις προτιμήσεις του καταναλωτή.

Χαρακτηριστικά καμπυλών αδιαφορίας αποτελούν:

- Η κλίση τους πρέπει να είναι αρνητική
- Κάθε σημείο στο διάστημα αγαθών πρέπει να ανήκει σε καμπύλη αδιαφορίας
- Δεν πρέπει να τέμνονται
- Πρέπει να είναι κυρτές προς την αρχή των αξόνων

Η κλίση μιας καμπύλης αδιαφορίας ονομάζεται *οριακός λόγος υποκατάστασης*. Ο λόγος αυτός *εκφράζει το βαθμό με τον οποίο ο καταναλωτής είναι διατεθειμένος να υποκαταστήσει το αγαθό 1 με το αγαθό 2* στη συγκεκριμένη περίπτωση. Ο λόγος αυτός είναι *αρνητικός* γιατί η αύξηση της ποσότητας προς κατανάλωση του ενός αγαθού συνεπάγεται την μείωση της ποσότητας του άλλου, αυτό προκύπτει εξ'άλλου και από την αρνητική κλίση των καμπυλών αδιαφορίας.

Έστω λοιπόν ότι ο καταναλωτής πρόκειται να θυσιάσει μία ποσότητα ίση με $\Delta\chi_1$ από το αγαθό 1 ώστε να καταναλώσει επιπλέον ποσότητα $\Delta\chi_2$ για το αγαθό 2 (όπου Δ υποδηλώνει μεταβολή).

Τότε η εξίσωση εισοδηματικού περιορισμού γράφεται:

$$p_1(x_1 - \Delta x_1) + p_2(x_2 - \Delta x_2) \leq m$$

Στην παραπάνω εξίσωση ο λόγος $\frac{-\Delta x_2}{-\Delta x_1}$ είναι ο οριακός λόγος υποκατάστασης του καταναλωτή για τα αγαθά 1 και 2 και συγχρόνως *η κλίση της καμπύλης αδιαφορίας του*. Εκφράζει δηλαδή την υποκειμενική προτίμησή του ανάμεσα στα αγαθά 1 και 2.

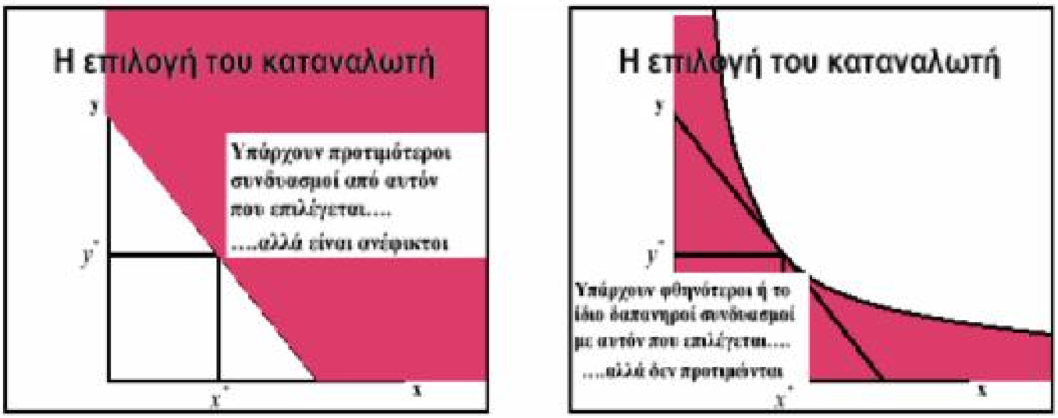
2.5. Επιλογή του προϊόντος

Η αγορά αποτιμά τα δύο προϊόντα 1 και 2, μέσω της γραμμής εισοδηματικού περιορισμού και ο καταναλωτής τα αξιολογεί μέσω των καμπυλών αδιαφορίας. *Αυτό που τελικά καθορίζει την επιλογή του είναι ένας συνδυασμός την δυνάμεων της αγοράς, προσφοράς και ζήτησης, με τις προτιμήσεις και τις επιθυμίες του.* Είναι προφανές ότι η επιλογή του θα εξαρτηθεί αφενός μεν από τη δικιά του εκτίμηση, αφετέρου δε και από τις δυνάμεις της αγοράς που επηρεάζουν σημαντικά τον ιδανικό συνδυασμό που τελικά επιλέγει, μέσω της διαμόρφωσης των τιμών των αγαθών 1 και 2, (p_1, p_2).

Ο συνδυασμός αυτός απεικονίζεται στο διάγραμμα και είναι ακριβώς το *μοναδικό σημείο* που εφάπτεται η *καμπύλη αδιαφορίας* με τη *γραμμή εισοδηματικού περιορισμού του καταναλωτή*.

Ο στόχος είναι να εντοπιστεί ο συνδυασμός εκείνος που βρίσκεται στην υψηλότερη δυνατή καμπύλη αδιαφορίας αλλά και συγχρόνως που να ανήκει και στο σύνολο των καταναλωτικών δυνατοτήτων, δηλαδή ή πάνω στη γραμμή εισοδηματικού περιορισμού ή στην περιοχή κάτω από αυτή και προς την αρχή των αξόνων.

Αν ο καταναλωτής σκέπτεται ορθολογικά, δηλαδή επιθυμεί να καταναλώσει το περισσότερο δυνατό, τότε είναι προφανές ότι το ιδανικό σημείο θα βρίσκεται ακριβώς πάνω στη γραμμή εισοδηματικού περιορισμού. Είναι λογικό ότι πάνω στη γραμμή, όλοι οι συνδυασμοί είναι για τον καταναλωτή αφενός εφικτοί και αφετέρου αυτοί που του προσφέρουν περισσότερη κατανάλωση και για τα δύο αγαθά πάντα μέσα στις καταναλωτικές δυνατότητές του. Με άλλα λόγια απολαμβάνει την καλύτερη δυνατή ωφέλεια για αυτόν, ικανοποιώντας παράλληλα και τους περιορισμούς που του επιβάλει η αγορά.



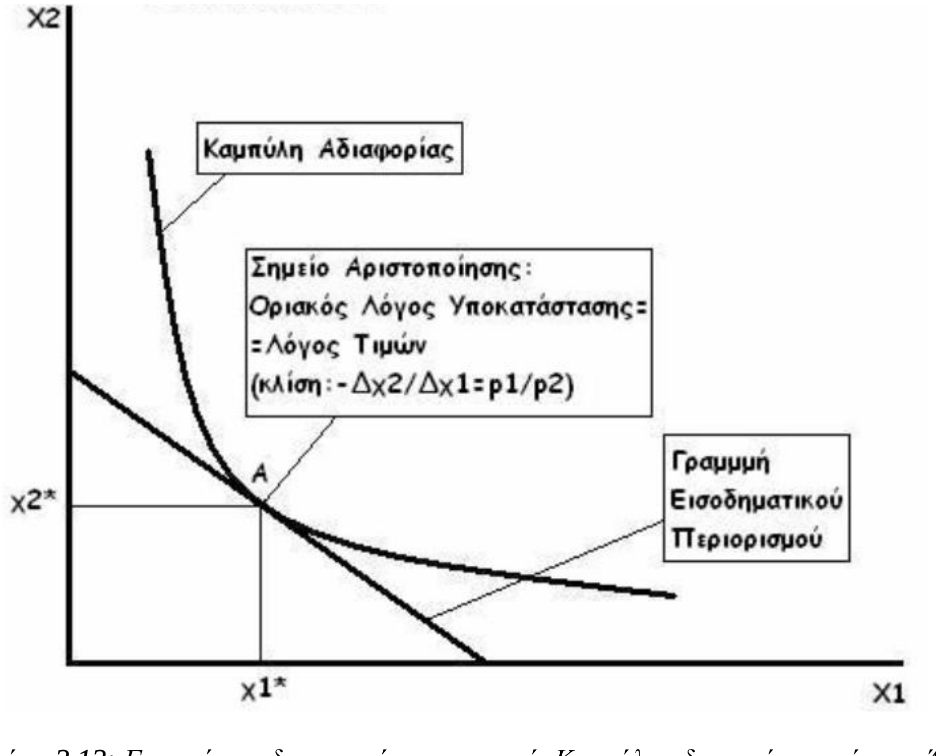
Σχήμα 2.11: Γραμμή εισοδηματικού περιορισμού και Χάρτης αδιαφορίας του ίδιου καταναλωτή

Το άριστο σημείο θα βρίσκεται σίγουρα πάνω στη γραμμή εισοδηματικού περιορισμού. Για την εύρεση του ακριβούς σημείου θα χρειαστούμε τη βοήθεια καμπυλών αδιαφορίας.

Ακολουθώντας μια νοητή πορεία από την αρχή τον αξόνων σε διάγραμμα καμπυλών αδιαφορίας και προσπαθώντας να καταλήξουμε στην καλύτερη δυνατή καμπύλη που θα προσφέρει στον καταναλωτή την υψηλότερη δυνατή χρησιμότητα, δηλαδή όσο το δυνατόν δεξιότερα και βορειότερα στο διάγραμμα. Κινούμενοι λοιπόν όλο και δεξιότερα, *η καμπύλη αδιαφορίας που θα περιλαμβάνει το άριστο σημείο*, που πρέπει να βρίσκεται και πάνω στη γραμμή εισοδηματικού περιορισμού και η οποία είναι όσο δεξιότερα της επιτρέπει ο καταναλωτικός περιορισμός, *είναι αυτή που εφάπτεται στην γραμμή εισοδηματικού περιορισμού*.

Το άριστο σημείο που τελικά επιλέγει ο καταναλωτής είναι το Α, όπου καταναλώνεται ${x_1}^*$ ποσότητα για το αγαθό 1 και ${x_2}^*$ ποσότητα για το αγαθό 2.

Το Α είναι και το σημείο που η καμπύλη αδιαφορίας εφάπτεται με τη γραμμή καταναλωτικών δυνατοτήτων και η επιλογή $({x_1}^*, {x_2}^*)$ είναι η άριστη επιλογή για τον καταναλωτή.



Σχήμα 2.12: Γραμμή εισοδηματικού περιορισμού, Καμπύλη αδιαφορίας κι εύρεση Άριστου Σημείου

Είναι επίσης προφανές ότι στο σημείο Α ο Οριακός Λόγος Υποκατάστασης ισούται με τον λόγο των τιμών. Αυτό συμβαίνει γιατί στο Α, η κλίση της γραμμής εισοδηματικού περιορισμού, δηλαδή ο λόγος τιμών, είναι ίση με την κλίση της καμπύλης αδιαφορίας, δηλαδή τον Οριακό Λόγο Υποκατάστασης.

Δηλαδή:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$$

Το παραπάνω έχει και οικονομική ερμηνεία. Υπενθυμίζουμε ότι *ο Οριακός Λόγος Υποκατάστασης είναι ο βαθμός που ο καταναλωτής είναι διατεθειμένος να ανταλλάξει τα δύο προσφερόμενα αγαθά*, ενώ ο *λόγος των τιμών είναι ο βαθμός ανταλλαγής που τους προσδίδει η αγορά*. Οπότε απαιτείται η εξίσωση των δύο έτσι ώστε η αγορά να βρεθεί σε ισορροπία, να ικανοποιηθεί δηλαδή ο καταναλωτής αλλά συγχρόνως να τηρούνται κι οι περιορισμοί της αγοράς. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο καταναλωτής πετυχαίνει το μέγιστο της συνολικής χρησιμότητας του εισοδήματος του στο σημείο εκείνο όπου η γραμμή του εισοδηματικού του περιορισμού εφάπτεται μιας καμπύλης αδιαφορίας.

2.6. Κόστος και Παραγωγή Επιχείρησης

Το μεγαλύτερο μέρος των ανθρώπινων αναγκών ικανοποιούνται με τη χρήση οικονομικών αγαθών.Τα αγαθά αυτά δεν βρίσκονται ελεύθερα στη φύση αλλά δημιουργούνται τεχνητά από τον άνθρωπο.Για να παραχθεί οποιοδήποτε υλικό αγαθό ή υπηρεσία, πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι *παραγωγικοί συντελεστές*.

Οι συντελεστές παραγωγής, που περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων *κεφαλαιουχικά αγαθά, εργασία,γη, επιχειρηματικότητα*, μετά από μια διαδικασία, μετασχηματίζονται σε αγαθά και υπηρεσίες. *Η συνολική παραγωγή είναι η συνολική ποσότητα που παράγουν οι συντελεστές παραγωγής*. Απ' την διαίρεση της συνολικής παραγωγής με το σύνολο των συντελεστών παραγωγής, προκύπτει η *συνολική παραγωγικότητα των συντελεστών παραγωγής* ***(TFP, total factor productivity).***

Για την εύρεση της παραγωγικότητα ενός συγκεκριμένου συντελεστή όπως της εργασίας διαρείται η παραγωγικότητα αυτού του συντελεστή με τον αριθμό εργατών που εργάστηκαν για να παράξουν την ποσότητα αυτή. Πρόκειται για την *παραγωγικότητα της εργασίας* ***(TLP, total labor productivity)***. Για να μπορέσουμε όμως να υπολογίσουμε την παραγωγικότητα της εργασίας θα πρέπει να απομονώσουμε τον παράγοντα αυτόν από τους άλλους παράγοντες κρατώντας τους σταθερούς και μεταβάλλοντας μόνο τον συντελεστή εργασίας. Βραχυπρόθεσμα η επιχείρηση το μόνο που μπορεί να κάνει, για να αυξήσει την παραγωγή της, είναι να αλλάξει τον συντελεστή εργασίας, που μεταβάλλεται πιο εύκολα από τούς άλλους παράγοντες. Μακροπρόθεσμα όμως η επιχείρηση είναι ικανή να μεταβάλλει όλους τους συντελεστές παραγωγής

Σην οικονομία ο χρονικός ορίζοντας δεν συνδέεται με μια ορισμένη χρονική περίοδο αλλά έχει να κάνει με τον αν οι συντελεστές παραγωγής είναι σταθεροί ή μεταβλητοί.

Το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο η επιχείρηση δεν μπορεί να μεταβάλλει την ποσότητα ενός ή περισσοτέρων συντελεστών παραγωγής το αποκαλούμε *βραχυπρόθεσμο*. *Κατά την περίοδο αυτή η εταιρεία δεν μπορεί να μεταβάλλει όλους τους συντελεστές*, παρά μόνο την εργασία και τις πρώτες ύλες. Αντιθέτως, *το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο η επιχείρηση μπορεί να μεταβάλλει την ποσότητα όλων των συντελεστών παραγωγής το αποκαλούμε μακροπρόθεσμο*. Κατά την περίοδο αυτή η εταιρεία μπορεί να μεταβάλλει όλους τους συντελεστές, ακόμα και τα κεφαλαιουχικά αγαθά.

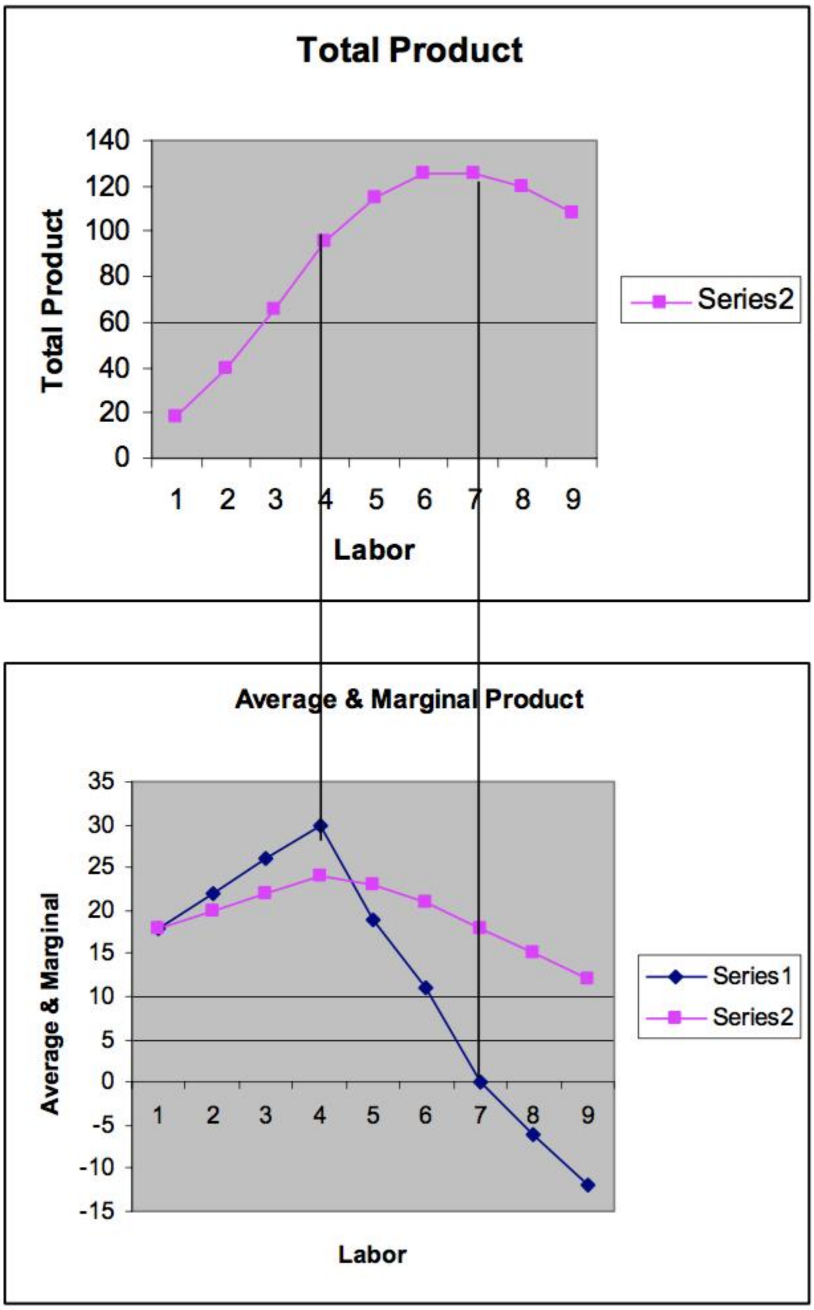
Ø Η Συνολική Παραγωγή

Αν και μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλοι οι εργάτες είναι εξίσου αποτελεσματικοί , η συνεισφορά του κάθε ενός στην συνολική παραγωγή δεν είναι η ίδια. Στο παράδειγμα του σχήματος 2.13. ενώ ο πρώτος εργάτης παράγει 18 μονάδες, ο δεύτερος συνεισφέρει 22, ο τρίτος 26 ενώ ο τέταρτος 30. Μετά από αυτόν η συνολική παραγωγή συνεχίζει να αυξάνεται αλλά με χαμηλότερο ρυθμό. Αυτό συμβαίνει γιατί στην αρχή ο αριθμός των εργατών είναι πολύ λίγος σε σύγκριση με τους σταθερούς συντελεστές, ιδιαίτερα το κεφάλαιο.

Ø Ο Νόμος της Φθίνουσας Οριακής Παραγωγικότητας

Ο *νόμος της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας* περιορίζει τις δυνατότητες παραγωγής μιας επιχείρησης βραχυπρόθεσμα. Η επιχείρηση για να μπορέσει να αυξήσει την παραγωγή της χρειάζεται να επενδύσει σε κεφαλαιουχικό εξοπλισμό. Αυτό το επιτυγχάνει μακροπρόθεσμα. Εν τω μεταξύ, μετά από ένα ορισμένο σημείο η οριακή παραγωγή μειώνεται κάθε φορά που αυξάνονται οι ποσότητες του μεταβλητού συντελεστή παραγωγής ενώ παραμένουν σταθερούς τους άλλους συντελεστές.

Αυτή η σχέση ισχύει κάθε φορά που ένας συντελεστής μένει σταθερός και αυξάνουμε συνεχώς τον αριθμό των μεταβλητών συντελεστών. Αυτός είναι ο *νόμος της φθίνουσας οριακής χρησιμότητας*. Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.13, ο νόμος της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας ισχύει βραχυπρόθεσμα και αρχίζει να εμφανίζεται από το σημείο όπου το οριακό προϊόν είναι στο υψηλότερο επίπεδο.



Σχήμα 2.13: Γραφικές παραστάσεις ολικού και οριακού προϊόντος

Ø Αποτελεσματική χρήση των συντελεστών παραγωγής

Εάν η επιχείρηση χρησιμοποιεί δυο συντελεστές παραγωγής, κεφάλαιο και εργασία, το κόστος παραγωγής ελαχιστοποιείται και το κέρδος μεγιστοποιείται, όταν ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\frac{MP_K}{P_K} = \frac{MP_L}{P_L}$$

όπου, MP_L και MP_K είναι το οριακό προϊόν της εργασίας και του κεφαλαίου αντίστοιχα.

Όπως στην θεωρία του καταναλωτή έτσι και στην θεωρία παραγωγής το οριακό προϊόν ισούται με τον λόγο:

$$MP_L = \frac{\Delta Q}{L} \;\; \kappa\alpha\iota \; MP_K = \frac{\Delta Q}{K}$$

και το μέσο προϊόν της εργασίας και του κεφαλαίου είναι :

$$AP_L = \frac{Q}{L} \;\; \kappa\alpha\iota \; MP_K = \frac{Q}{K}$$

Ø Η Συνάρτηση Παραγωγής και οι Αποδόσεις Παραγωγής

Η *συνάρτηση παραγωγής*, δηλαδή η τεχνική ή μηχανική σχέση ανάμεσα στις εισροές και εκροές της επιχείρησης είναι:

$$Q = f\ (K, L, M, T, E)\ ,\ Q = f\ (\bar{K}, L)$$

Στην βραχυχρόνια περίοδο υποθέτουμε ότι όλοι οι συντελεστές, όπως το κεφάλαιο K , είναι σταθεροί εκτός από την εργασία. *Μακροπρόθεσμα, η παραγωγή μπορεί να αυξηθεί όταν όλοι οι παράγοντες παραγωγής αυξηθούν.*

Στην περίπτωση που η συνολική παραγωγή Q διπλασιάζεται όταν όλοι οι συντελεστές διπλασιάζονται, ορίζεται ότι η *απόδοση παραγωγής είναι σταθερή*.

Στην περίπτωση που η συνολική παραγωγή Q διπλασιάζεται όταν όλοι οι συντελεστές αυξάνονται κατά ήμισυ $1/_2$, τότε η απόδοση παραγωγής είναι αυξημένη.

Στην περίπτωση που η συνολική παραγωγή Q διπλασιάζεται όταν όλοι οι συντελεστές τετραπλασιάζονται, τότε ότι η απόδοση παραγωγής είναι μειωμένη.

Φυσικά όταν οι αποδόσεις παραγωγής αυξάνονται, το κόστος παραγωγής μειώνεται. Η επιχείρηση έχει συμφέρον να χρησιμοποιεί μια τεχνολογία που επιτρέπει τις αυξημένες αποδόσεις. Αυτό είναι δυνατόν σε ορισμένες περιπτώσεις, δηλαδή εκεί που η τεχνολογία το επιτρέπει.

Ø Το Κόστος Παραγωγής της Επιχείρησης

Η παραγωγή συνεπάγεται κόστος και ο έλεγχος του κόστους είναι μια από τις πιο σημαντικές λειτουργίες του επιχειρηματία. Βραχυπρόθεσμα, το κεφάλαιο είναι σταθερό ενώ οι άλλοι παράγοντες μεταβάλλονται. *Το κόστος παραγωγής που συνδέεται με τους σταθερούς παράγοντες ονομάζεται σταθερό κόστος (TFC,* fixed costs or overhead costs), ενώ το *κόστος* που *συνδέεται με τους μεταβλητούς παράγοντες* ονομάζεται *μεταβλητό κόστος (TVC).* Το *άθροισμα* του *σταθερού* κόστους και του *μεταβλητού κόστους*, είναι το *συνολικό κόστος* (*TC*).

$$TC = TFC + TVC$$

Στην οικονομία περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιαζουν τα μέσα και τα οριακά μεγέθη.

Έτσι το συνολικό κόστος διαιρούμενο με την συνολική παραγόμενη ποσότητα μας δίνει το μέσο ή το *μέσο συνολικό κόστος* (AC or *ATC*).

Ομοίως, το συνολικό μεταβλητό κόστος διαιρούμενο με την συνολική παραγόμενη ποσότητα μας δίνει το μέσο μεταβλητό ή *το μέσο μεταβλητό κόστος (AVC*).

Ομοίως, το συνολικό σταθερό κόστος διαιρούμενο με την συνολική παραγόμενη ποσότητα μας δίνει το *μέσο σταθερό κόστος (AFC).*

$$AC \text{ ή } ATC = AFC + AVC$$

$$AC = ATC = \frac{TC}{Q}$$

$$AVC = \frac{TVC}{Q}$$

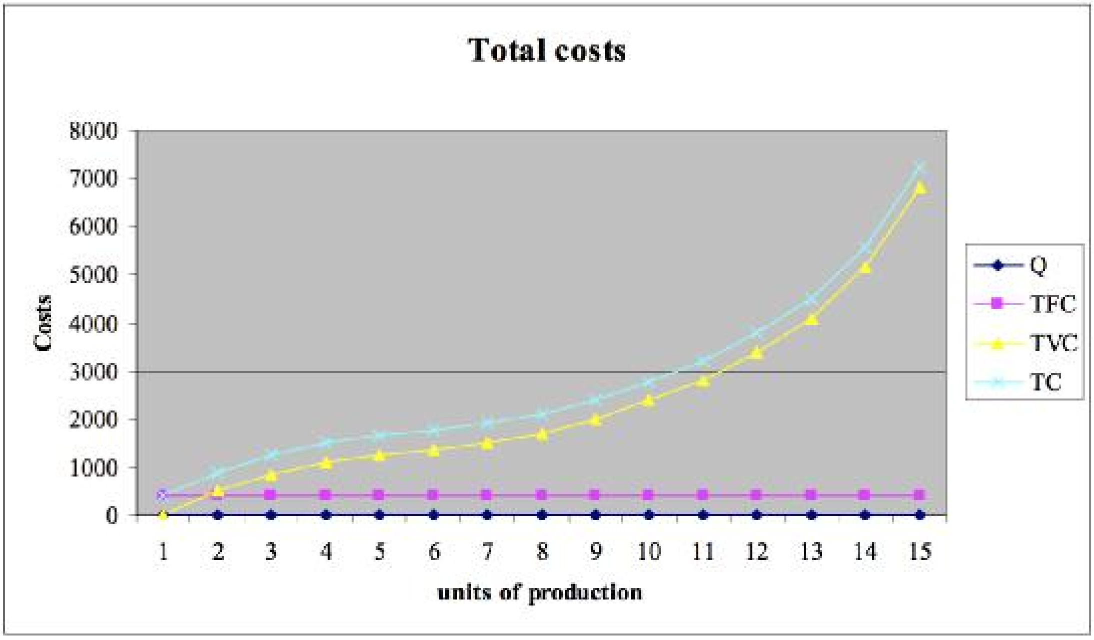
$$AFC = \frac{TFC}{Q}$$

Το οριακό κόστος (MC or incremental cost) είναι η αύξηση του συνολικού κόστους που προέρχεται από την αύξηση της παραγωγής κατά μια μονάδα, δηλαδή:

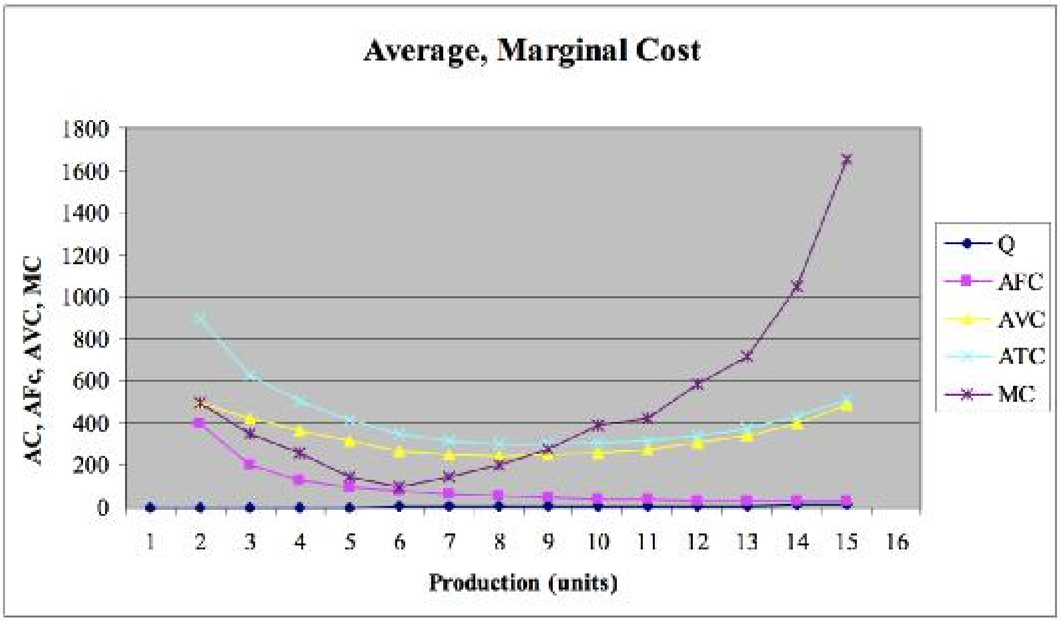
$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}$$

Q	TFC	TVC	TC	AFC	AVC	ATC	MC
0	400	0	400				
1	400	500	900	400,00	500,00	900,00	500
2	400	850	1250	200,00	425,00	625,00	350
3	400	1110	1510	133,33	370,00	503,33	260
4	400	1260	1660	100,00	315,00	415,00	150
5	400	1360	1760	80,00	272,00	352,00	100
6	400	1510	1910	66,67	251,67	318,33	150
7	400	1710	2110	57,14	244,29	301,43	200
8	400	1990	2390	50,00	248,75	298,75	280
9	400	2380	2780	44,44	264,44	308,89	390
10	400	2800	3200	40,00	280,00	320,00	420
11	400	3390	3790	36,36	308,18	344,55	590
12	400	4110	4510	33,33	342,50	375,83	720
13	400	5160	5560	30,77	396,92	427,69	1050
14	400	6810	7210	28,57	486,43	515,00	1650

Σχήμα 2.14: Πίνακας μεγεθών συνολικού κι οριακού κόστους



Σχήμα 2.14: Γραφική παράσταση μεγεθών ολικού κόστους



Σχήμα 2.15: Γραφική παράσταση μεγεθών μέσου κι οριακού κόστους

3

Επίλυση Οικονομικών προβλημάτων με το πρόγραμμα EXCEL

3.1. Το πακέτο EXCEL

Τα λογιστικά φύλλα (spreadsheets) του προγράμματος Excel είναι εφαρμογές στις οποίες τα αριθμητικά δεδομένα είναι οργανωμένα σε γραμμές και στήλες, που επιτρέπουν την εύκολη και γρήγορη εκτέλεση υπολογισμών. Το Excel είναι τμήμα του πακέτου Office της εταιρίας Microsoft και αποτελεί σήμερα το πλέον διαδεδομένο πρόγραμμα λογιστικών φύλλων της αγοράς. Παρέχει εκτεταμένες δυνατότητες αριθμητικών υπολογισμών και διαγραμμάτων, συνεργασίας με άλλα προγράμματα, καθώς και κάποιες δυνατότητες προγραμματισμού, μέσω ενός ενιαίου υπολογιστικού περιβάλλοντος.

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής χρησιμοποιήθηκε αγγλόφωνη έκδοση του πακέτου Microsoft Office 2011, εγκατεστημένο σε υπολογιστή Mac.

Στο παράθυρο εφαρμογής εμφανίζεται ένα κενό βιβλίο εργασίας με την ονομασία *Βιβλίο1 (Workbook1)*, το οποίο αλλάζει ανάλογα με το όνομα που θα δώσει ο χρήστης στο αρχείο κατά την «Αποθήκευση». Το *Βιβλίο1* είναι ένα αρχείο στο οποίο εισάγονται δεδομένα και μπορεί να περιέχει πολλά φύλλα εργασίας, που ο χρήστης προσθέτει ή αφαιρεί κατά βούληση.

Η τομή μιας γραμμής με μία στήλη ορίζει ένα κελί, μέσα στο οποίο ο χρήστης εισάγει δεδομένα και το οποίο προσδιορίζεται μοναδικά από το συνδυασμό του γράμματος της στήλης και τον αριθμό της γραμμής. Στην αρχή κάθε φύλλου εργασίας υπάρχει μπάρα- γραμμή τύπων (formula builder), η οποία δείχνει το περιεχόμενο κάθε επιλεγμένου και συνεπώς ενεργού κελιού .

Στο Excel υπάρχουν δύο κατηγορίες δεδομένων: σταθερές και τύποι. Οι σταθερές διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:

- Κείμενο: Είναι ένας συνδυασμός γραμμάτων ή αριθμών που δεν παίρνουν μέρος σε υπολογι σμούς
- Αριθμητικές τιμές: Τα αριθμητικά δεδομένα αποτελούνται από ψηφία και διάφορους ειδικούς χαρακτήρες όπως σύμβολα πράξεων: + , -, *, / , (), συνήθη σύμβολα μεγεθών $, %

· Τιμές ημερομηνίας - ώρας. Η εισαγωγή ημερομηνίας πρέπει να γίνεται με συγκεκριμένο τρόπο, έτσι ώστε το Excel να είναι σε θέση να την αναγνωρίζει π.χ. 16/05/15.

Το Excel περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό συναρτήσεων φύλλου εργασίας, οι οποίες εκτελούν υπολογισμούς με συγκεκριμένη σειρά και δομή. Οι συναρτήσεις δέχονται τιμές *εισόδου* οι οποίες ονομάζονται ορίσματα της συνάρτησης και επιστρέφουν το *αποτέλεσμα* απλών ή πολύπλοκων *υπολογισμών*.

Η εισαγωγή συνάρτησης σε φύλλο εργασίας επιτυγχάνεται με δύο τρόπους:

• Στο επιλεγμένο κελί, με το σύμβολο ισότητας ‘=’, ακολουθούμενο από το όνομα της συνάρτησης και τα ορίσματά της ή τον τύπο της.

• Μέσω του πλήκτρου συντόμευσης της εφαρμογής *Εισαγωγή συνάρτησης (Insert Function*).

Οι συναρτήσεις φύλου εργασίας του Excel είναι οργανωμένες στις εξής κατηγορίες:

• Ημερομηνίας και ώρας (Date & Time)
• Μηχανικής (Engineering)
• Οικονομικές (Financial)
• Πληροφοριών (Information)
• Λογικές (Logical)
• Αναζήτησης και αναφοράς (Lookup & Reference)
• Μαθηματικών και τριγωνομετρίας (Math & Trig)
• Στατιστικές (Statistical)
• Κειμένου (Text)

Για την εύρεση όλων των επιλογών μίας κατηγορίας συναρτήσεων, ο χρήστης επιλέγει “Formulas” > “Insert” > ¨*Κατηγορία*¨ .

Αν, για παράδειγμα θέλει να δει όλες τις επιλογές των στατιστικών συναρτήσεων: “Formulas” > “Insert” > ”Statistical”, όπου θα δει μια εκτενή λίστα με επιλογές. Αν αυτό που θέλει να υπολογίσει συμπεριλαμβάνει και υπολογισμο μέσου όρου, υπάρχει η επιλογή της συνάρτησης *AVERAGE()*, που παίρνει ορίσματα είτε αριθμούς ορισμένους απ’ τον χρήστη είτε δεδομένα από κελιά, με αναφορά στη θέση τους.

Δηλαδή, όταν ο χρήστης πληκτρολογεί στο κελί *D3* $= AVERAGE(C1{:}C10)$, το Excel υπολογιζει και εμφανίζει στο κελί αυτό, το *D3*, τον μέσο όρο των 10 τιμών των αντίστοιχων πεδίων στην στήλη *C*.

Στα πλαίσια των εφαρμογών που θα υλοποιηθούν, οι συναρτήσεις που θα χρησιμοποιηθούν θα οριστούν κυρίως ιδιόχειρα απ’ τον χρήστη, καθώς πρόκειται για γραμμικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής ή αλλιώς πολυώνυμα 1^{ου} βαθμού, για τα οποία είναι χρήσιμοι ως επί των πλείστων οι τελεστές: Πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης: “ $+, -, *, /$ “

Μία απ’ τις εξυπηρετικές δυνατότητες που παρέχει το Excel είναι οι οδηγίες Βοήθειας . Με τις επιλογές

- Help > Search: πληκτρολόγηση όρου αναζήτησης , ο χρήστης μπορεί να κάνει αναζήτηση με στοχευμένες λέξεις-κλειδιά
- Help > “Get started with EXCEL”, στο οποίο η Microsoft καθοδηγεί τον χρήστη να αποκτήσει την πρώτη του επαφή με την λειτουργικότητα του πακέτου.

3.2. Παράδειγμα: Εύρεση Νεκρού Σημείου Επιχείρησης

Έστω ότι μια επιχείρηση έχει να επιλύσει το εξής πρόβλημα:

Η συνάρτηση κόστους παραγωγής για: 10 000, 20 000, 30 000, 40 000, 50 000, 60 000, 70 000, 80 000 και 90 000 μονάδων προϊόντος (x) είναι:

$$C\,(q) = 800\,000 + 100\,\text{q}$$

Ενώ τα έσοδα από την πώληση του προϊόντος περιγράφονται από τη συνάρτηση:

$$R\,(q) = 120\,\text{q}$$

Να βρεθεί το νεκρό σημείο για την επιχείρηση μέσω της ανάλυσης εσόδων-κόστους όπως και της ανάλυσης κέρδους.

Επίλυση: Η εύρεση του νεκρού σημείου αντιστοιχεί στην ποσότητα για την οποία τα κέρδη της επιχείρησης είναι μηδενικά.

Μαθηματικά, το σημείο αντιστοιχεί σε εκείνο το q για το οποίο *τα κέρδη* ***(profit) P(q)*** *της εταιρίας*, δηλαδή *η διαφορά των εξόδων απ’ τα έσοδα μηδενίζεται*:

$$P(q) = C\,(q) - R\,(q) = 0,$$

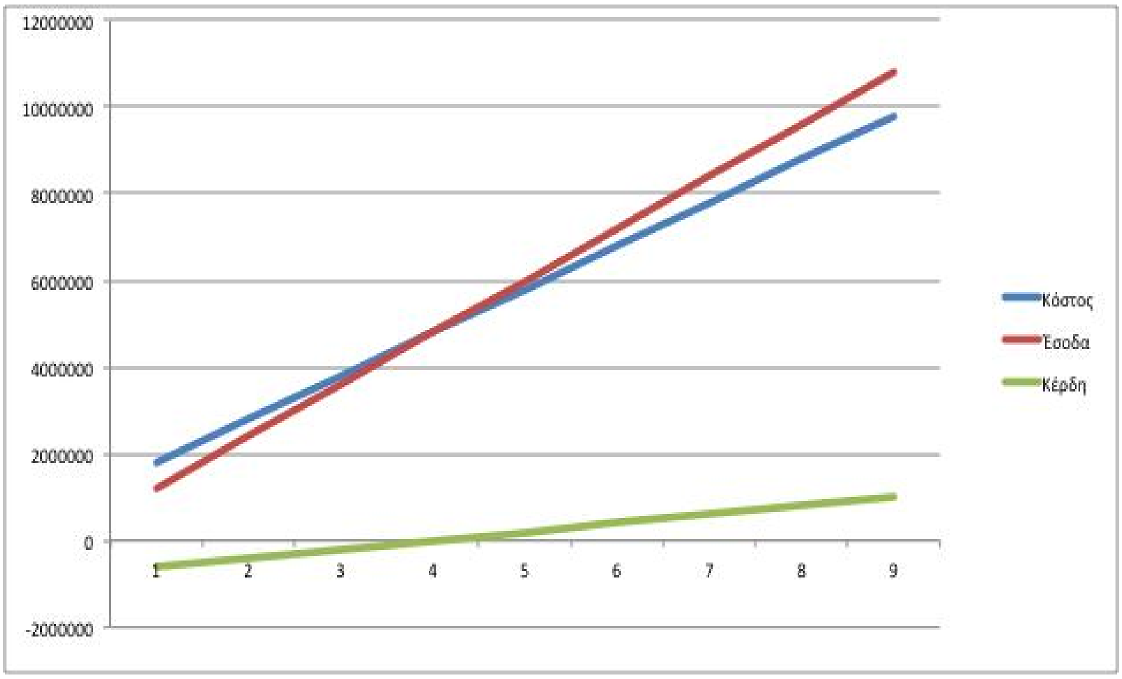
όπου κάνοντας αντικατάσταση των συναρτήσεων και πράξεις, προκύπτει η τιμή $C\,(q) - R\,(q) = 800\,000 + 100q - 120q = 800\,000 - 20q = 0,$

$$20q = 800\,000, \qquad q = 40\,000\ \mu ονάδες$$

Ωστόσο, είναι ακόμα πιο εύκολο να αναπαρασταθεί η λύση αυτή γραφικά, με περνόντας τα αριθμητικά δεδομένα στο EXCEL εισάγοντάς τις αντίστοιχες λύσεις σε γραφήματα:

Q	TC	TR	TP
10 000	1 800 000	1 200 000	-600 000
20 000	2 800 000	2 400 000	-400 000
30 000	3 800 000	3 600 000	-200 000
40 000	4 800 000	4 800 000	0
50 000	5 800 000	6 000 000	200 000
60 000	6 800 000	7 200 000	400 000
70 000	7 800 000	8 400 000	600 000
80 000	8 800 000	9 600 000	800 000
90 000	9 800 000	10 800 000	1 000 000

Πίνακας 1: Ποσότητα αγαθού q, Συνολικό Κόστος TC (q), Συνολικά Έσοδα TR (q), Συνολικά Κέρδη TP (q)



*Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση: Συνολικό Κόστος TC (q), Συνολικά Έσοδα TR (q), Συνολικά Κέρδη TP (q) , συναρτήσει q * 10 000 (μονάδες)*

Το νεκρό σημείο της αγοράς στις 40 000 μονάδες είναι ορατό τόσο στην στήλη του πίνακα όπου υπολογίζεται το μέγεθος του κέρδους όσο και στο αντίστοιχο γράφημα.

Επίσης, φαίνεται κι η εξάρτηση των των εσόδων και τον εξόδων απ' τον ποσότητα, καθώς και η εξέλιξή τους πριν και μετά το νεκρό σημείο: Πριν το νεκρό σημείο, όπου το έσοδα είναι αρνητικά, τα έξοδα της επιχείρησης είναι περισσότερα απ' τα έσοδα, κάτι που αντιστρέφεται για $q\ >\ 40\ 000\ μονάδες$.

3.3. Παράδειγμα: Ισορροπία Αγοράς

Έστω ότι για ένα αγαθό υπάρχουν τέτοιες συνθήκες, ώστε οι αγοραίες καμπύλες ζήτησης και προσφοράς περιγράφονται από τις ακόλουθες συναρτήσεις:

$$P_d = 100 - 5\,Q$$

$$P_s = 10 + 4\,Q$$

Οι ποσότητες που μπορεί να ζητηθούν ή να προσφερθούν στην αγορά είναι 1, 2, ..., 20. Να βρεθεί η ισορροπία στη συγκεκριμένη αγορά (τιμή και ποσότητα) και να γίνει η γραφική απεικόνισή της.

Η αλγεβρική επίλυση, δίνει εύκολα τη σχέση που εξισώνει τις τιμές προφοράς και ζήτησης, ώστε να βρεθεί η αντίστοιχη ποσότητα Q:

$$P_d = P_s$$

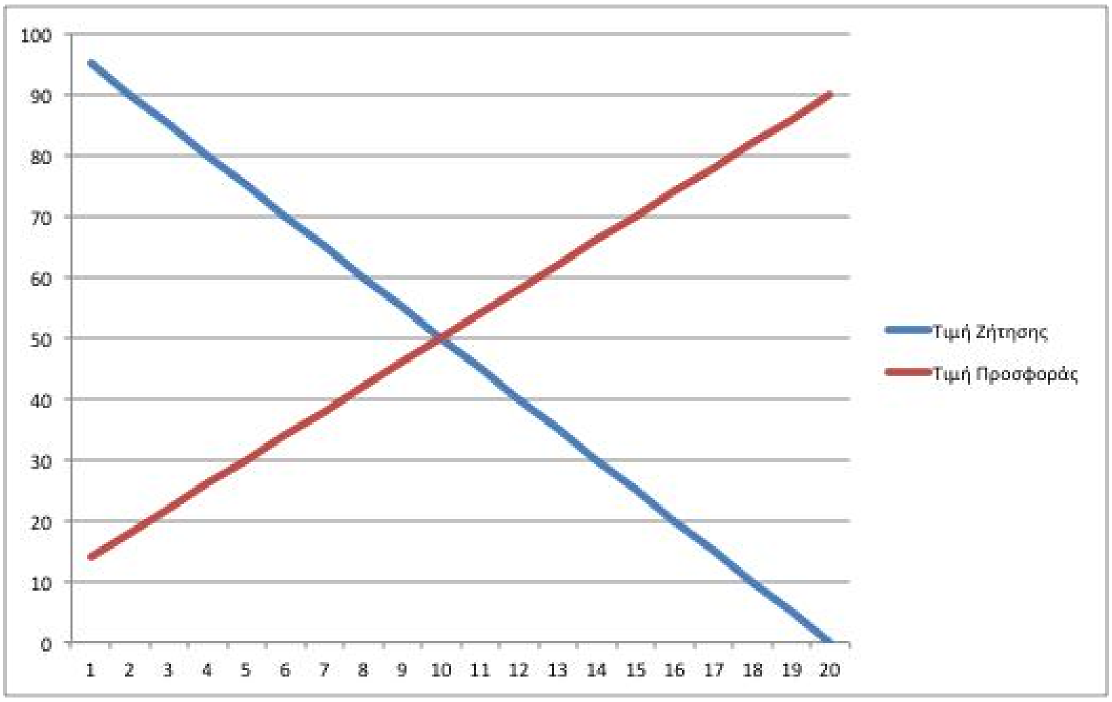
$$100 - 5\,Q = 10 + 4\,Q,$$

$$9\,Q = 90, \qquad Q = 10\ \mu o\nu \acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$$

Τοποθετώντας στο EXCEL τα αντίστοιχα δεδομένα προκύπτει εξής πίνακας και το αντίστοιχο γράφημα, με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων προσφοράς και ζήτησης:

Q	P_d	P_s
1	95	14
2	90	18
3	85	22
4	80	26
5	75	30
6	70	34
7	65	38
8	60	42
9	55	46
10	50	50
11	45	54
12	40	58
13	35	62
14	30	66
15	25	70
16	20	74
17	15	78
18	10	82
19	5	86

Πίνακας 2: Ποσότητα αγαθού q, Τιμή Ζήτησης P_d (q) και Τιμή Προσφοράς P_s (q)



*Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση Συναρτήσεων Ζήτησης P_d (q) και Προσφοράς P_ss (q), συναρτήσει q * 10 000 (μονάδες)*

3.4. Παράδειγμα: Ισορροπία Αγοράς μετά την επιβολή φορολογίας

α. Έστω οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς ενός προϊόντος στην ελεύθερη αγορά είναι:

$$Q_d = 120 - 4P$$

$$Q_s = -45 + 15P$$

Σε κατάσταση ισορροπίας, $Q_d = Q_s$, επομένως η τιμή και η ποσότητα για τις οποίες η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία:

$$120 - 4P = -45 + 15P \iff 19P = 65 \iff P_{eq} = 8{,}68$$

$$Q_s = Q_d = 120 - 4 \cdot 8.68 \iff Q_{eq} = 85{,}26$$

β. Η κυβέρνηση επιβάλλει ένα ειδικό φόρο 3 ευρώ ανά μονάδα. Αυτό έχει ως αποτεέλεσμα να μετατοπιστεί η καμπύλη προσφοράς, καθώςη συνάρτηση προσφοράς αυξάνεται κατά 3 ευρώ:

$$Q_s{}' = -45 + 15(P - 3) \iff P_s' = \frac{Q}{15} + 3 + 3 = \frac{Q}{15} + 6$$

Ενώ η συνάρτηση ζήτησης παραμένει σταθερή:

$$Q_d = 120 - 4P \iff P_d = -\frac{Q}{4} + 30$$

Εξισώνοντας τις 2 εξισώσεις, $Q_s = Q_d$ σε κατάσταση ισορροπίας, προκύπτει:

$$\frac{Q}{15} + 6 = -\frac{Q}{4} + 30$$

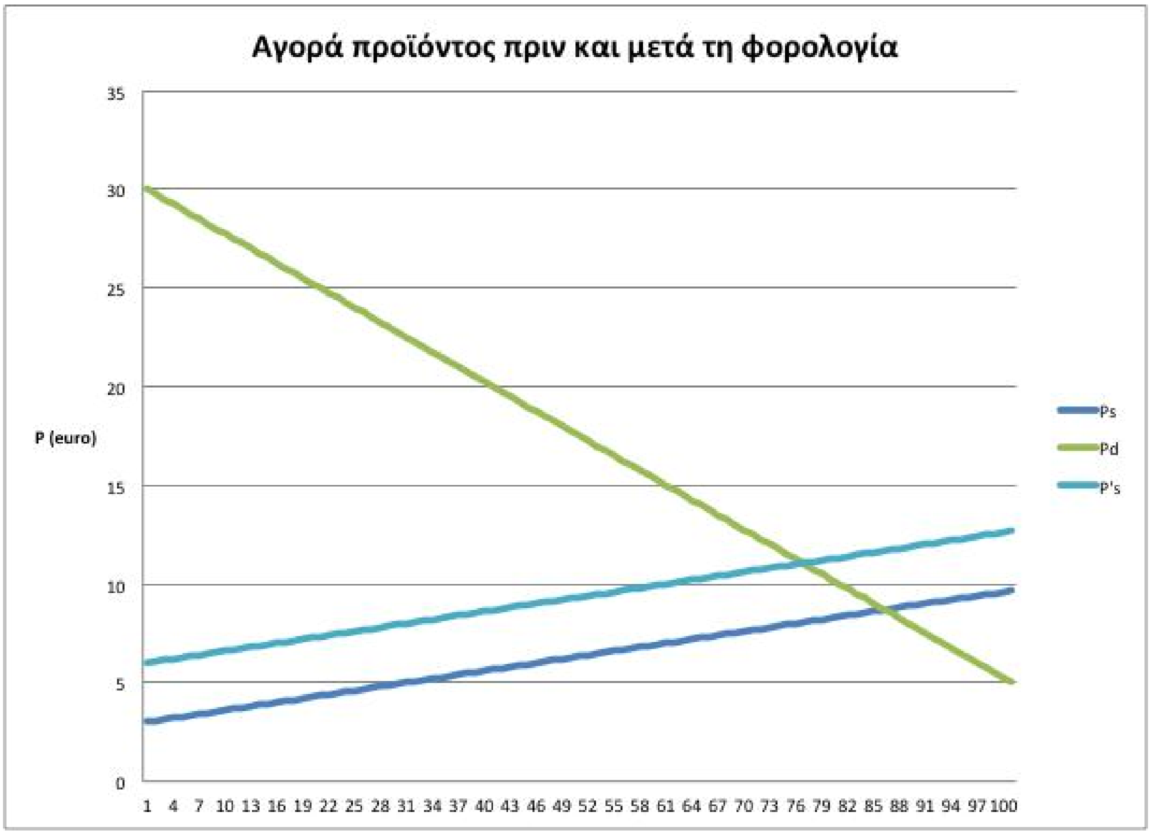
Άρα, τα νέα μεγέθη ισορροπίας μεταβάλλονται:

$$P_{eq}{}' = 11{,}05 \text{ και } Q_{eq}{}' = 75{,}78$$

Τοποθετώντας στο EXCEL τα αντίστοιχα δεδομένα προκύπτει εξής πίνακας και το αντίστοιχο γράφημα, με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων προσφοράς και ζήτησης:

Q	P_d	P_s	P_s'
0	30.00	3.00	6.00
5	28.75	3.33	6.33
10	27.50	3.67	6.67
15	26.25	4.00	7.00
20	25.00	4.33	7.33
25	23.75	4.67	7.67
30	22.5	5.00	8.00
35	21.25	5.33	8.33
40	20.00	5.67	8.67
45	18.75	6.00	9.00
50	17.50	6.33	9.33
55	16.25	6.67	9.67
60	15.00	7.00	10.00
65	13.75	7.33	10.33
70	12.50	7.67	10.67
75	11.25	8.00	11.00
80	10.00	8.33	11.33
85	8.75	8.67	11.67
90	7.50	9.00	12.00
95	6.25	9.33	12.33
100	5.00	9.67	12.67

Πίνακας 3: Ποσότητα αγαθού q, Τιμή Προσφοράς P_s (q), Τιμή Ζήτησης στην ελεύθερη αγορά P_d (q) και μετά την επιβολή φορολογίας $P_d{}'$ (q)



Σχήμα 3.3: Γραφική παράσταση Συναρτήσεων Προσφοράς P_s (q), Ζήτησης στην ελεύθερη αγορά P_d (q) και μετά την επιβολή φορολογίας $P_d{}'$ (q)

Με τον φόρο οι καταναλωτές πληρώνουν επιπλέον

$$P_{eq}{}' - P_{eq} = 11.05 - 8.68 = 2.37\ ευρώ$$

και οι παραγωγοί πληρώνουν την διαφορά, για να καλύψουν τον φόρο:

$$Φόρος - ΔP_{eq} = 3.00 - 2.37 = 0{,}63\ ευρώ.$$

Η κυβέρνηση εισπράττει συνολικό ποσό ανάλογο τόσο με τον φόρο που επιβάλλει όσο και με την νέα ποσότητα ισορροπίας:

$$Φόρος \cdot Q_{eq}{}' = 3 \cdot 75{,}78 = 227{,}34\ ευρώ$$

3.5. Παράδειγμα: Μέσο και Οριακό προϊόν επιχείρησης συναρτήση μεταβαλλόμενου συντελεστή παραγωγής

- Στις Σειρά Ασκήσεων 1 του καθηγητή Αναστάσιου Γκεντζογλάνη[10] δίνεται το εξής πρόβλημα:

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το συνολικό προϊόν μιας επιχείρησης και τις ποσότητες που προκύπτουν απ' την εργασία , ως μεταβαλλόμενου συντελεστή παραγωγής.

Εργασία (Q_L)	**Συνολικό προϊόν (TC)**
0	0
1	12
2	30
3	51
4	68
5	80
6	84
7	84
8	80
9	72

• Υπολογίστε το οριακό και το μέσο προϊόν
• Κάνετε ένα διάγραμμα και δείξτε τη σχέση αυτών των μεγεθών.

- **Επίλυση**

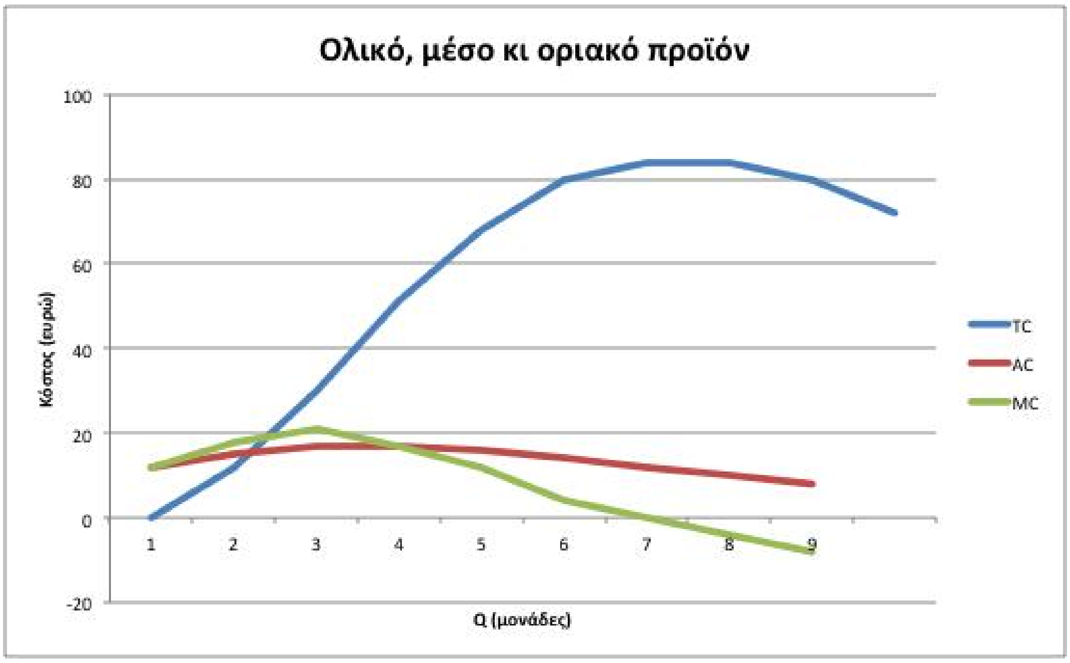
Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 2.6 , η σχέση που δίνει το μέσο προϊόν AC είναι: $AC = A\,TC = \frac{TC}{Q}$
και το οριακό προϊόν MC, είναι: $MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}$

Δεδομένου ότι τα μεγέθη αυτά πρέπει να υπολογιστούν για κάθε τιμή της ποσότητας Q, οι αντίστοιχες πράξεις μπορούν πολύ γρήγορα να γίνουν στο EXCEL, σε 2 επιπλέον στήλες για το κάθε μέγεθος αντίστοιχα.

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας :

$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{TC}$	$\boldsymbol{AC}$	$\boldsymbol{MC}$
0	0	--	--
1	12	12	12
2	30	15	18
3	51	17	21
4	68	17	17
5	80	16	12
6	84	14	4
7	84	12	0
8	80	10	-4
9	72	8	-8

Πίνακας 4: Ποσότητα αγαθού q, Συνολικό Κόστος επιχείρησης TC, Μέσο Κόστος επιχείρησης AC και οριακό κόστος επιχείρησης MC



Σχήμα 3.4: Γραφική παράσταση Συναρτήσεων Συνολικού Κόστους επιχείρησης TC, Μέσου Κόστους επιχείρησης AC και οριακού κόστους επιχείρησης MC συναρτήσει ποσότητας q

Η αναπαράσταση σε γράφημα των σχέσεων στον πίνακα 4, προσφέρει κατανόηση των σχέσεων των μεγεθών μεταξύ τους.

Είναι φανερό ότι το το συνολικό έσοδο δεν μεταβάλλεται γραμμικά με την αύξηση της ποσότητας του προϊόντος λόγω εργασίας, κι ότι από μια τιμή της ποσότητας και πάνω, κοντά στις 6 μονάδες, το προϊόν σταθεροποιείται και έπειτα, μετά τις 8 μονάδες, εμφανίζει μια ήπια πτωτική τάση.

Η συμπεριφορά αυτή παρατηρείται και στην γραφική παράσταση του μέσου προϊόντος, που ακολουθεί την πορεία του συνολικού προϊόντος, με λιγότερο έντονες μεταβολές.

Το οριακό προϊόν αρχίζει να μειώνεται από νωρίς, κοντά στην τιμή της ποσότητας q= 3 μονάδες, απ' όπου και σταματάει το συνολικό προϊόν την απότομη αύξηση του. Ως μέγεθος αποτελεί πολύ αντιπροσωπευτικό δείκτη της συμπεροφοράς του προϊόντος του αντίστοιχου συντελεστή παραγωγής.

4

Επίλογος

Η μαθηματικοποίηση της οικονομικής επιστήμης αποτελεί καινοτομία των τελευταίων δεκαετιών κι έχει συνδράμει στην ανάπτυξη μιας μεγάλης ποικιλίας εργαλείων, όπου και παρουσιάσαμε στην παρούσα διπλωματική.

Αν και η ποσοτικοποίηση μιας κοινωνικής επιστήμης δεν αποτυπώνει πάντα την πραγματικότητα, βοηθάει στην εκ βαθέων κατανόηση μοντέλων κι υποδειγμάτων που περιγράφουν εν μέρη πολύπλοκα συστήματα που αντικατοπτρίζουν την πραγματικότητα.

Η συνδρομή της τεχνολογίας έχει προσθέσει εργαλεία στην φαρέτρα των οικονομολόγων και έχει οδηγήσει σε άμεσα και ασφαλή συμπεράσματα, τα οποία μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν από μικρές εταιρίες μέχρι οικονομικοί θεσμοί και πρόσωπα που διαμορφώνουν την οικονομική πραγματικότητα.

5

Βιβλιογραφία

[1] Θεμιστοκλής Μ. Ρασσιάς , *Μαθηματική Ανάλυση 1*, Εκδόσεις Σαββάλας, 2004

[2] Γιώργος Βασιλειάδης, *Σημειώσεις Μαθηματικής Ανάλυσης 1*, Σχολή Πληροφορικής, http://users.auth.gr/gvasil/chapter2.pdf

[3] Τσαπέρα Χρυσάνθη, Διπλωματική Εργασία *" Θεωρία & Συμπεριφορά Καταναλώτή: Μια Διερεύνηση απέναντι στη Διαφήμιση και στο Ηλεκτρονικό Εμπόριο. Δικαιώματα και Προστασία του Καταναλωτή"*, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών & Μηχανικών Η/Υ και Ηλεκτρολόγων Μηχανικών, Μάιος 2007

[4] Σαρτζετάκης Ευτύχιος, *Μικροοικονομία*, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής http://users.uom.gr/~esartz/teaching/micromain.html

[5] Αγγελόπουλος Ιωάννη, Τεχνικές Οργάνωσης και Οικονομίας, ΤΕΙ Πειραιά, Σχολή Αυτοματισμού http://auto.teipir.gr/sites/default/files/2economa1-4_0.pdf

[6] Παλαιολολόγος Ιωάννης, Μικροοικονομική ΙΙ, Πανεπιστήμιο Πειραιά, Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης, Πειραιάς 2002, http://digilib.lib.unipi.gr/

[7] Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Μαθημα: «Πληροφορικής, Νέες Τεχνολογίες κι Εκπαίδευση», «Σημειώσεις EXCEL» http://www.env-edu.gr/Documents/files/ICT/Excel.pdf

[8] http://www.microsoft.com/mac/excel/getting-started-with-excel

[9] Ευαγγελία Χαλιώτη, Το πακέτο EXCEL: Μαθηματικές κι Οικονομκές Εφαρμογές http://evachalioti.com/chalioti_notes_Intro in IT.pdf

[10] Γκεντζογλάνης Ευτύχιος, *Μικροοικονομία*, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών, http://www.csd.uoc.gr/~hy305