ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΣΠΟΥΔΑΣΤΗ: ΒΡΑΤΣΟΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΑΚΗΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΒΑΣΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ

ΠΑΤΡΑ – 2015

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η συγκεκριμένη πτυχιακή αναφέρεται σε εφαρμογές της θεωρίας των ουρών αναμονής στην οικονομική θεωρία. Περιλαμβάνει την βασική θεωρία των ουρών αναμονής και την εφαρμογή της στην οικονομική θεωρία καθώς και τρείς ασκήσεις εφαρμογών ουρών αναμονής στην οικονομική θεωρία. Στην εισαγωγή αναφέρονται τα χαρακτηριστικά των συστημάτων ουρών αναμονής δηλαδή:

Η πηγή πελατών: Άπειρος/πεπερασμένος πληθυσμός και Κλειστό/Ανοικτό σύστημα.

Η κατανομή των αφίξεων: Τυχαίες, προγραμματισμένες ή αφίξεις κατά ομάδες.

Είδη ουρών αναμονής: FIFO (First in First Out), LIFO (Last In First Out), SIRO (Service In Random Order)…

Η χωρητικότητα (πεπερασμένη, άπειρη).

Η Κωδικοποίηση A/B/s/k/N

Τέλος αναφέρονται τα εκάστοτε μοντέλα (M/M/1, M/M/s κτλ) καθώς και το τυπολόγιο καθενός από αυτά με λυμένα παραδείγματα.

Η πρώτη άσκηση αφορά την ουρά αναμονής που σχηματίζετε στα διόδια. Τα διόδια χωρίζονται σε δυο κατηγορίες αυτά που υπάρχει άνθρωπος εξυπηρετητής και αυτά που έχει εγκατασταθεί σύστημα e-pass. Επίσης η μέρα χωρίζετε σε κατηγορίες αναλόγως με την ώρα της ημέρας και ανάλογα με τον αριθμό των αυτοκινήτων που περνάνε (αιχμής, μη αιχμής, βράδυ). Καλούμαστε να βρούμε, με δεδομένο ότι οι μη αυτόματοι εξυπηρετητές μπορούν να μεταβληθούν κατά την διάρκεια της ημέρας, πόσοι μη αυτόματοι και πόσοι αυτόματοι εξυπηρετητές πρέπει να μπουν στο σύστημα.

Για να βρούμε την λύση πρέπει να υπολογίσουμε το ελάχιστο ημερήσιο κόστος το οποίο αναλύετε σε διαφορετικά ωριαία κόστη ανάλογα με την κίνηση που επικρατεί. Οπότε δοκιμάζουμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς αυτόματων και μη αυτόματων εξυπηρετητών και τέλος επιλέγουμε το μικρότερο ημερήσιο κόστος.

Η δεύτερη άσκηση εξελίσσεται σε ένα σούπερ μάρκετ και έχει σαν αρχικό ερώτημα το πόσοι εξυπηρετητές πρέπει να μπουν για να βελτιστοποιηθεί το κόστος. Στην συνέχεια λέγεται ότι μπορούν να μπουν στην θέση των κανονικών εξυπηρετητών και εξυπηρετητές για λιγότερα από δέκα προϊόντα. Οι εξυπηρετητές αυτοί έχουνε μικρότερο χρόνο εξυπηρέτησης από τους άλλους αλλά δεν μπορούν να πάνε όλοι οι πελάτες σε αυτούς, μπορούν να πάνε μόνο όσοι έχουνε κάτω από δέκα προϊόντα, δηλαδή περίπου το εικοσιπέντε τα εκατό. Έτσι θα υπάρχουν δύο ουρές και δυο διαφορετικοί ρυθμοί εισροής πελατών, ένας για τα κανονικά ταμεία και ένας για τα ταμεία για λιγότερα από δέκα προϊόντα. Στην συνέχεια, με δεδομένο ότι ο μέγιστος αριθμός εξυπηρετητών είναι μέχρι έξι ταμεία, θα δοκιμάσουμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς κανονικών και ταμείων για μικρότερα των δέκα προϊόντων και θα βρούμε το ελάχιστο συνολικό κόστος. Τέλος θα το συγκρίνουμε με το συνολικό κόστος που είχαμε βρει μόνο από τα κανονικά ταμεία.

Στην τρίτη και τελευταία άσκηση αναφερόμαστε σε μια καφετέρια. Οι πελάτες πρέπει πρώτα να πάνε στο ταμείο να πάρουν ένα απόκομμα/απόδειξη και αναλόγως με το τι θέλουν να αγοράσουν: καφέ/τσάι, τρόφιμα (τυρόπιτα, σάντουιτς) ή εμφιαλωμένα είδη (νερό/πορτοκαλάδαα) πηγαίνουν και στην αντίστοιχη ουρά και προσκομίζοντας την απόδειξη παίρνουν το προϊόν που θέλουν. Το 80% των πελατών αγοράζουν καφέ/τσάι, το 70% κάποιο φαγώσιμο και το 50% παίρνουν κάτι εμφιαλωμένο. Με δεδομένο ότι ο μέγιστος αριθμός υπαλλήλων που μπορεί να είναι σε κάθε μια από τις ουρές είναι τρείς τότε θα έχουμε τέσσερις διαφορετικές ουρές με κάθε μία, εκτός της ουράς του ταμείου που κόβει τις αποδείξεις, να έχει ρυθμό εισροής πελατών τον συνολικό ρυθμό πελατών που εισέρχονται στην καφετέρια επί το ποσοστό των πελατών που πηγαίνουν σε αυτήν. Στην συνέχεια προσθέτουμε τα συνολικά κόστη τις εκάστοτε ουράς για να βρούμε το συνολικό ωριαίο κόστος.

Εισαγωγή

Οι ουρές αναμονής δεν είναι τίποτε άλλο από τις ουρές αναμονής που συναντάμε καθημερινά στην ζωή μας. Μπορεί να είναι η ουρά που περιμένουμε για να μπούμε στο αεροπλάνο ή η ουρά που περιμένουμε για να εξυπηρετηθούμε σε μια τράπεζα. Πρόκειται για την περίπτωση που μια διαδικασία δεν μπορεί να εξυπηρετήσει την ζήτηση και αυτό λόγο τυχαίων διακυμάνσεων τόσο στην εξυπηρέτηση όσο και στον ρυθμό αφίξεων. Πρωτοπόρος της θεωρίας των ουρών αναμονής είναι ο Δανός μηχανικός Agner Krarup Erlang (1878 – 1929).

(Γεωργίου, σ. 2)

Θεωρία (1)

Χαρακτηριστικά συστημάτων ουρών αναμονής (1.1)

Πηγή πελατών (1.1.1)

Η πηγή των πελατών χωρίζετε σε δύο κατηγορίες. Στον άπειρο πληθυσμό και στον πεπερασμένο. Άπειρος είναι όταν ο πληθυσμός που εισέρχεται στο σύστημα είναι όπως λέει και η λέξη άπειρος, δηλαδή δεν τελειώνει ποτέ. Παράδειγμα άπειρου πληθυσμού έχουμε στους πελάτες μιας τράπεζας. Πεπερασμένος είναι ο πληθυσμός που το συνολικό πλήθος του είναι συγκεκριμένο π.χ. τα μηχανήματα σε ένα εργοστάσιο που περιμένουν να συντηρηθούν.

Επίσης η πηγή των πελατών χωρίζεται σε ανοιχτό και κλειστό σύστημα. Το ανοιχτό σύστημα απευθύνετε στο ευρύ κοινό ενώ το κλειστό απευθύνετε σε συγκεκριμένα άτομα που έχουν πρόσβαση.

(Νικολαΐδης, 2005, σ. 85)

Κατανομή αφίξεων (1.1.2)

Οι αφίξεις των «πελατών» μπορούν να γίνουν με πολλούς τρόπους. Μπορεί να είναι τυχαίες, προγραμματισμένες ή αφίξεις κατά ομάδες. Ως τυχαίες αφίξεις ορίζουμε όταν οι αφίξεις δεν είναι αλληλοεξαρτώμενες και δεν μπορεί να προβλεφτεί με ακρίβεια η επόμενη άφιξη. Οι προγραμματισμένες αφίξεις γίνονται σε προσυνεννοημένο περιβάλλον ή με σταθερό ρυθμό (πχ αεροδιάδρομος). Το χρησιμότερο εργαλείο στης τυχαίες αφίξεις είναι ο ρυθμός αφίξεων ανά συγκεκριμένο χρονικό διάστημα που το συμβολίζουμε με λ (συνήθως η μονάδα χρόνου που χρησιμοποιούμε είναι η μία ώρα). Πολλές φορές προσεγγίζετε ο ρυθμός των αφίξεων με την κατανομή Poisson. Τότε η μέση τιμή της Poisson είναι ο μέσος ρυθμός αφίξεων την συγκεκριμένη μονάδα χρόνου. Μέσω της κατανομής Poisson μπορούμε τώρα να βρούμε την πιθανότητα να συμβεί μια συγκεκριμένη τιμή αφίξεων σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{\chi}}{\chi!}$$

Με χ ακέραιο.

Στον παραπάνω τύπο το Ρ(χ) είναι η πιθανότητα να εισέλθει κάποιος συγκεκριμένος αριθμός πελατών χ στο σύστημα μέσα σε κάποια χρονική στιγμή, το e είναι ο σταθερός αριθμός 2,7 ενώ το λ όπως προείπαμε είναι πόσοι πελάτες έρχονται σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Δηλαδή εάν έρχονται 50 πελάτες την ώρα και θέλουμε να βρούμε ποια η πιθανότητα να έρθουν πέντε πελάτες σε χρονικό διάστημα 17 λεπτών, στην θέση του λ θα βάλουμε 17/60=0,28 και 0,28*50=14 άρα 14 πελάτες έρχονται σε διάστημα 17 λεπτών και στην θέση του χ θα βάλουμε το πέντε και θα βρούμε την πιθανότητα.

Τέλος όπως είναι λογικό για να βρούμε τον χρόνο μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων θα βάλουμε 1/λ δηλαδή 1/50 στο παράδειγμα μας που βγαίνει 0,02 δηλαδή έρχεται ένας πελάτης κάθε 0,02 ώρες ή κάθε 1,2 λεπτά.

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 24)

Εξυπηρετητές (1.1.3)

Οι εξυπηρετητές είναι αυτοί που εξυπηρετούν τους πελάτες. Μπορεί να είναι οι ταμίες σε μια τράπεζα, οι αεροδιάδρομοι προσγείωσης και γενικά οτιδήποτε εξυπηρετεί τα άτομα που περιμένουν στην ουρά αναμονής. Συνήθως ο πελάτης εξυπηρετείτε από τον πρώτο εξυπηρετητή διαθέσιμο. Υπάρχει όμως και η περίπτωση να πρέπει να περάσει από πολλούς εξυπηρετητές για να πάρει την εκάστοτε έγκριση. Οι πελάτες λοιπόν ποτέ δεν εξυπηρετούνται αμέσως (για αυτό άλλωστε δημιουργείτε και η ουρά αναμονής) αλλά η εξυπηρέτηση τους παίρνει κάποιον χρόνο. Ο χρόνος αυτός ονομάζετε χρόνος εξυπηρέτησης.

Ο χρόνος εξυπηρέτησης μπορεί να είναι είτε σταθερός (πχ πλυντήριο αυτοκινήτων) είτε μεταβλητός (πχ τράπεζα). Σε πολλές περιπτώσεις θεωρούμε ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή. Το μέσο ποσό των πελατών που εξυπηρετούνται σε κάποιο χρονικό διάστημα (μία μονάδα χρόνου) συμβολίζετε με μ, δηλαδή αν ένας εξυπηρετητής εξυπηρετεί 10 πελάτες την ώρα τότε έχουμε μ=10. Επομένως το 1/μ μας δείχνει τον χρόνο εξυπηρέτησης δηλαδή 0,1 ώρες ή 6 λεπτά μέσος χρόνος εξυπηρέτησης. Τον χρόνο εξυπηρέτησης τον παριστούμε με Τ. Εφόσον το Τ είναι τυχαία μεταβλητή τότε μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα το Τ να είναι μικρότερο ή ίσο από μια συγκεκριμένη τιμή t από την σχέση:

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$$

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 25)

Είδη ουρών αναμονής (1.2)

Οι ουρές αναμονής έχουν πολλά είδη ανάλογα με τον τρόπο που περιμένουν οι πελάτες στην ουρά. Ο τρόπος αυτός ονομάζετε πειθαρχία. Τα είδη ουρών αναμονής είναι κυρίως τα παρακάτω:

FIFO: βγαίνει από το αγγλικό First In First Out και σημαίνει ο πρώτος που θα εισέλθει στην ουρά θα εξυπηρετηθεί πρώτος.

LIFO: Σημαίνει Last In First Out και η σειρά προτεραιότητας είναι αντιστρόφως ανάλογη του χρόνου προσέλευσης δηλαδή όσο ποιο νωρίς εισέλθει ένα αντικείμενο στην ουρά τόσο θα αργήσει να εξέλθει π.χ. αυτοκίνητα στο πλοίο.

SIRO: Οι πελάτες επιλέγονται τυχαία για να εξυπηρετηθούν (Service In Random Order).

Προτεραιότητες: Υπάρχουν πολλές κατηγορίες πελατών με διαφορετικές προτεραιότητες. Ανάλογα με την προτεραιότητα του πελάτη, υψηλή ή χαμηλή ο πελάτης θα εξυπηρετηθεί αναλόγως. Π.χ. συνταξιούχοι.

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 25)

Χωρητικότητα (1.2.1)

Η χωρητικότητα μπορεί να είναι ή πεπερασμένη ή άπειρη. Η πεπερασμένη έχει μέγιστο όριο πελατών ενώ η άπειρη όχι.

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 26)

Κωδικοποίηση A/B/s/k/N (1.2.2)

Η κωδικοποίηση A/B/s/k/N είναι εφεύρεση του D.G. Kendall και κωδικοποιεί τα μοντέλα ουρών αναμονής ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους.

Τα ακρωνύμια σημαίνουν:

A: Είναι το σύμβολο της κατανομής εισόδου πελατών. Μπορεί να μπαίνει το γράμμα M εάν έχουμε κατανομή Poisson αλλά και τα γράμματα G και D που σημαίνει γενική κατανομή (General) και προσδιοριστική κατανομή, με γνωστό και σταθερό ρυθμό (Deterministic), αντίστοιχα.

B: Όπως και το A αλλά για την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης. Τα σύμβολα είναι τα ίδια με το A.

S: Μας δείχνει πόσοι εξυπηρετητές υπάρχουν.

K: Είναι το μέγιστο πλήθος που μπορεί να περιμένει στην ουρά. Στο k προσμετρούνται και οι εξυπηρετητές. Όταν το πλήθος είναι άπειρο το k παραλείπετε.

N: Είναι το πλήθος των πελατών στην πηγή όταν αυτό είναι πεπερασμένο.

Εάν έχουμε κατανομή Poisson στην διαδικασία εισόδου με μέση τιμή ίση με λ τότε ο μέσος χρόνος ανάμεσα δυο διαδοχικών αφίξεων ακολουθεί εκθετική κατανομή ίση με 1/λ. Δηλαδή εάν εισέρχονται 50 πελάτες την ώρα τότε ο μέσος χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων θα είναι 1,2 λεπτά. Αντίστοιχα εάν ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/μ τότε ο ρυθμός εξυπηρέτησης θα ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή μ.

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 26)

Βασικά Χαρακτηριστικά Ουρών Αναμονής (1.3)

Παρακάτω ακολουθούν τα βασικά χαρακτηριστικά που χρησιμοποιούμε περισσότερο στις ουρές αναμονής.

P_0 = Είναι η πιθανότητα να μην είναι κανένας στην θέση εξυπηρέτησης.

P_w = Η πιθανότητα ένας πελάτης (w) να περιμένει στην ουρά.

L_q = Ο μέσος αριθμός πελατών που περιμένουν στην ουρά.

L = Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα συνολικά.

W_q = Ο μέσος χρόνος παραμονής στην ουρά.

W = Ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα.

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σσ. 29-30)

Μοντέλο M/M/1 (1.3.1)

Πρόκειται για ένα από τα απλούστερα μοντέλα. Η αφίξεις των πελατών ακλουθούν κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό αφίξεων λ ανά χρονική μονάδα. Ο ρυθμός εξυπηρέτησης ακολουθεί επίσης κατανομή Poisson με ρυθμό μ ανά μονάδα χρόνου. Το σύστημα διαθέτει έναν εξυπηρετητή. Οι πελάτες εξυπηρετούνται με πειθαρχία FIFO ενώ σχηματίζουν άπειρη ουρά και δεν αποχωρούν από αυτήν όσο μεγάλη και αν είναι. Φυσικά πρέπει το λ να είναι πάντα μικρότερο από το μ καθώς εάν ο ρυθμός αφίξεων πελατών είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον ρυθμό εξυπηρέτησης η ουρά θα αυξάνετε για πάντα.

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 27)

Ακολουθεί το βασικό τυπολόγιο που χρησιμοποιούμε στο μοντέλο M/M/1 και κάποια παραδείγματα.

Μέσος αριθμός πελατών που βρίσκονται σε κατάσταση εξυπηρέτησης:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$$

Βαθμός απασχόλησης του συστήματος εξυπηρέτησης:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Μέσο πλήθος πελατών στην ουρά αναμονής

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Για το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα συνολικά θα έχουμε:

$$L = L_s + L_q$$

Οπότε:

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda^2\mu}{\mu^2(\mu-\lambda)} + \frac{\lambda\mu(\mu-\lambda)}{\mu^2(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda^2\mu+\lambda\mu(\mu-\lambda)}{\mu^2(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda^2\mu+\lambda\mu^2-\lambda^2\mu}{\mu^2(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

Εάν σε μια δημόσια υπηρεσία περιμένουν πέντε πελάτες κατά μέσο όρο στην ουρά και ξέρουμε ότι εισέρχονται κατά μέσο όρο πέντε πελάτες την ώρα τότε είναι λογικό να πούμε ότι ο χρόνος αναμονής των πελατών είναι κατά μέσο όρο η μία ώρα. Άρα θα ισχύει:

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Δηλαδή ο μέσος χρόνος αναμονής πελατών στην ουρά είναι ίσος με τον μέσο αριθμό πελατών που περιμένουν στην ουρά προς τον ρυθμό των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα.

Οπότε:

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\mu\lambda(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$<=> w_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Τέλος για να βρούμε τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα αρκεί να προσθέσουμε τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στην ουρά με τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης (που τον έχουμε ορίσει πριν ως $1/\mu$).

Οπότε θα έχουμε:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Δηλαδή θα ισχύει:

$$W = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{(\mu-\lambda)}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda+\mu-\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$<=> W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Η πιθανότητα η ουρά να είναι άδεια στην M/M/1 μας δίνεται από τον τύπο:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Είναι ουσιαστικά το αντίστροφο του βαθμού απασχόλησης του συστήματος

Προφανώς η πιθανότητα κάποιος που μόλις έφτασε στο σύστημα να χρειαστεί να περιμένει είναι:

$$P_w = 1 - P_0$$

Η πιθανότητα να υπάρχουν κάποιοι συγκεκριμένοι «n» πελάτες στο σύστημα είναι:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

Τέλος η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότεροι από k πελάτες στο σύστημα δίνετε από την σχέση:

$$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$$

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σσ. 29-30)

Παράδειγμα M/M/1 (1.3.2)

Σε μια τράπεζα με ένα μόνο ταμείο γνωρίζουμε ότι οι πελάτες καταφτάνουν με ρυθμό 17 την ώρα με κατανομή Poisson και ο χρόνος εξυπηρέτησης του ταμία που ακολουθεί εκθετική κατανομή είναι τρία λεπτά κατά μέσο όρο. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες δεν αποχωρούν όσο μεγάλη και αν είναι η ουρά.

Ερώτηση:

Ποιό είναι το μέσο πλήθος πελατών που βρίσκονται σε κατάσταση εξυπηρέτησης;

Απάντηση:

Θα είναι

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$$

Για το λ θα χρησιμοποιήσουμε το 17 ενώ εφόσον ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης του ταμία είναι τα τρία λεπτά είναι λογικό να μπορεί να εξυπηρετεί περίπου 20 πελάτες την ώρα.

Οπότε θα έχουμε

$$L_s = \frac{17}{20} = 0,85$$

Δηλαδή ο μέσος αριθμός πελατών που βρίσκονται σε κατάσταση εξυπηρέτησης είναι 0,85, δηλαδή σχεδόν συνεχώς υπάρχει και ένας πελάτης που εξυπηρετείτε.

Ερώτηση:

Ποιος είναι ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος;

Απάντηση:

Θα έχουμε

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,85$$

Δηλαδή οι υπάλληλοι θα εξυπηρετούν κάποιον το 85% του χρόνου τους.

Ερώτηση:

Ποιο είναι το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά αναμονής;

Απάντηση:

Θα είναι

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{17^2}{20(20-17)} = 4,81$$

Δηλαδή περίπου πέντε πελάτες θα περιμένουν στην ουρά κατά μέσο όρο.

Ερώτηση:

Ποιο είναι το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα συνολικά;

Απάντηση:

Θα έχουμε:

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{17}{20-17} = 5,66$$

Ερώτηση:

Ποιος θα είναι ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά (W_q) και ποιος για το σύστημα συνολικά (W);

Απάντηση:

Αντίστοιχα θα είναι:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{17}{20(20-17)} = 0,28$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{20-17} = 0,33$$

Και επειδή έχουμε υπολογίσει τα λ και μ σε ώρες θα έχουμε 0,28*60=16,8 λεπτά αναμονής κατά μέσο όρο ένας πελάτης στην ουρά, 0,33*60=19,8 ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα.

Ερώτηση:

Ποια είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα;

Απάντηση:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{17}{20} = 0,15$$

Θα είναι 15%

Όπως είναι προφανές αυτό είναι και το ποσοστό που δεν δουλεύουν οι εξυπηρετητές.

Το αντίστροφο του παραπάνω είναι η πιθανότητα κάποιος νεοεισερχόμενος πελάτης να χρειαστεί να περιμένει στην ουρά. Δηλαδή:

$$P_w = 1 - P_0 = 1 - 0,15 = 0,85$$

Ερώτηση:

Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχουν 5 πελάτες στο σύστημα;

Απάντηση:

$$P_5 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 = \left(\frac{17}{20}\right)^5 \cdot 0,15 = 0,06$$

Η πιθανότητα είναι πολύ μικρή μόλις 6%

Ερώτηση:

Ποια η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότεροι από 6 πελάτες στο σύστημα;

Απάντηση:

$$P_{n>6} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} = \left(\frac{17}{20}\right)^7 = 0,32$$

Θα είναι 32%

Ερώτηση:

Ποια η πιθανότητα να έρθουν δύο πελάτες σε χρονικό διάστημα έξι λεπτών;

Απάντηση:

Εφόσον έρχονται περίπου 17 πελάτες σε μία ώρα σε έξι λεπτά θα έρχονται περίπου 1,7 και εφόσον έχουμε κατανομή Poisson θα ισχύει:

$$P(2)=\frac{\left(\lambda^{\chi} e^{-\lambda}\right)}{\chi!}=\frac{(1,7^{2}\cdot 2,7^{-1,7})}{1\cdot 2}=0,26$$

Δηλαδή 26%

Ερώτηση:

Ποια η πιθανότητα να έρθουν περισσότεροι από τρείς πελάτες σε διάστημα έξι λεπτών;

Απάντηση:

$$P(x>3)+P(x\leq 3)=1$$
$$<=>$$
$$P(x>3)=1-P(x=0)-P(x=1)-P(x=2)-P(x=3)$$
$$<=>$$
$$P(x>3)=1-0,18-0,3-0,26-0,14=0,12$$

Δηλαδή 12%

Ερώτηση:

Ποιο ποσοστό παραγγελιών θα πραγματοποιηθεί σε χρόνο μικρότερο του ενός λεπτού;

Απάντηση:

Καθώς έχουμε να κάνουμε με ώρες το ένα λεπτό θα είναι 0,01 ώρες. Χρησιμοποιώντας την εκθετική κατανομή θα έχουμε:

$$P(T\leq t)=1-e^{-\mu t}$$

$$P(T\leq 0,1)=1-e^{-20\cdot 0,1}=0,2$$

Οπότε η πιθανότητα θα είναι 20%

Μοντέλο M/M/S (1.3.3)

Σε αυτό το μοντέλο ισχύει ότι και στο παραπάνω μοντέλο με την διαφορά ότι τώρα έχουμε παραπάνω από μία, παράλληλες, θέσεις εξυπηρέτησης. Δηλαδή το M/M/1 μπορούσε να προσομοιώσει μια τράπεζα με έναν ταμία. Το M/M/S μπορεί να προσομοιώσει μια τράπεζα με παραπάνω από έναν ταμίες. Στην θέση του s βάζουμε τον αριθμό των εξυπηρετητών. Τέλος ισχύει, όπως και ποιο πάνω το λ πρέπει να είναι μικρότερο από το μ πολλαπλασιασμένο με το s.

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 27)

Το μέσο πλήθος πελατών που βρίσκονται σε κατάσταση εξυπηρέτησης στο μοντέλο M/M/S θα είναι το ίδιο με το μοντέλο M/M/1 δηλαδή:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$$

Ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος είναι το ποσοστό το χρόνου που απασχολούνται οι εξυπηρετητές εδώ όπως είναι λογικό θα είναι ο βαθμός εξυπηρέτησης διαιρεμένος με τον ρυθμό εξυπηρέτησης πολλαπλασιασμένο με το πόσοι εξυπηρετητές υπάρχουν. Δηλαδή:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

Το μέσο πλήθος πελατών που περιμένουν στην ουρά δίνεται από τον τύπο:

$$L_q = \frac{\left(\lambda / \mu\right)^s \lambda \cdot \mu}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \cdot P_0$$

Το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα θα είναι το άθροισμα του μέσου αριθμού πελατών στην θέση εξυπηρέτησης με τον μέσο αριθμό πελατών που περιμένουν στην ουρά.

$$L = L_q + L_s$$

Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά και στο σύστημα δίνετε αντίστοιχα:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

Η πιθανότητα όλες οι θέσεις εξυπηρέτησης να είναι άδειες:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \left[\frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} \right] + \frac{(\lambda / \mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda} \right)}$$

Η πιθανότητα κάποιος νεοεισερχόμενος πελάτης να χρειαστεί να περιμένει στην ουρά είναι:

$$P_w = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda} \right) P_0$$

Για την πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα θα έχουμε:

Εάν το n είναι μεγαλύτερο του αριθμού των εξυπηρετητών θα ισχύει

$$P_n = \frac{1}{s!s^{n-1}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

Αλλιώς εάν το n είναι ίσο ή μικρότερο του αριθμού των εξυπηρετητών θα ισχύει

$$P_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

Τέλος οι πιθανότητα να υπάρχουν πάνω από k πελάτες στο σύστημα είναι:

$$P_{n>k} = 1 - (P_0 + P_1 + ... + P_k)$$

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 30)

Παράδειγμα M/M/S (1.3.4)

Σε μια δημόσια υπηρεσία υπάρχουν δύο δημόσιοι υπάλληλοι για μια συγκεκριμένη δουλειά. Ο κόσμος εισέρχεται με ρυθμό 10 άτομα την ώρα ακλουθώντας κατανομή Poisson και κάθε συναλλαγή διαρκεί κατά μέσο όρο δύο λεπτά ακλουθώντας εκθετική κατανομή. Σύμφωνα με ότι είπαμε παραπάνω θα έχουμε:

λ= 10/ώρα, μ=(1/2)*60=30 (τριάντα πελάτες εξυπηρετούνται μέσα σε μία ώρα)

και s=2

Ερώτηση:

Πόσα άτομα υπάρχουν κατά μέσο όρο στην θέση εξυπηρέτησης L_s , στην ουρά αναμονής L_q ,και στο σύστημα συνολικά L;

Απάντηση:

Θα έχουμε αντίστοιχα:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{30} = 0.33$$

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} \cdot P_0 = \frac{(10/30)^2 \cdot 10 \cdot 30}{(2-1)!(2 \cdot 30-10)^2} \cdot 0,71 = 0.008$$

$$L = L_s + L_q = 0.338$$

Το P_0 το ξέρουμε από τον τύπο που έχουμε πει ποιο πάνω. Γιατί όμως οι αριθμοί που βρήκαμε είναι τόσο μικροί; Με μόνο δέκα πελάτες την ώρα, δύο εξυπηρετητές και δύο λεπτά κατά μέσο όρο η εξυπηρέτηση είναι πολύ δύσκολο να δημιουργηθεί ουρά. Ουσιαστικά η ουρά θα είναι μηδενική.

Ερώτηση:

Ποιος είναι ο μέσος χρόνος ενός πελάτη στην ουρά και ποιος στο σύστημα;

Απάντηση:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,008}{10} = 0,0008$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{0,338}{10} = 0,0338$$

Ο μέσος χρόνος παραμονής στην ουρά θα είναι 0,0008*3600=2,88 δευτερόλεπτα, σχεδόν καθόλου δηλαδή. Ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα θα είναι: 0,0338*60=2,028 λεπτά.

Ερώτηση:

Ποια η πιθανότητα να μην είναι κανένας στο σύστημα, η πιθανότητα ένας πελάτης που φτάνει στο σύστημα να χρειαστεί να περιμένει, η πιθανότητα να υπάρχουν δύο πελάτες στο σύστημα και τέλος η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότεροι από τρείς πελάτες στο σύστημα;

Απάντηση:

Θα έχουμε αντίστοιχα:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\cdot\left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(10/30)^n}{n!}\right] + \frac{(10/30)^2}{2!}\cdot\left(\frac{2\cdot 30}{2\cdot 30-10}\right)} = 0,71$$

$$P_w = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)P_0 = \frac{1}{2!}\left(\frac{10}{30}\right)^2\left(\frac{2\cdot 30}{2\cdot 30-10}\right) = 0,042$$

$$P_2 = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \frac{1}{2!}\left(\frac{10}{30}\right)^2 0,71 = 0,03$$

$$P_{n>3} = 1-(P_0+P_1+P_2+P_3) = 1-0,71-0,23-0,006 = 0,054$$

Όπως βλέπετε παραπάνω όλες οι πιθανότητες πέρα από την μηδενική είναι μηδαμινές.

Μοντέλο M/G/1 (1.3.5)

Εδώ ισχύει ότι και στο M/M/1 αλλά ο χρόνος εξυπηρέτησης δεν ακολουθεί αναγκαστικά εκθετική κατανομή αλλά οποιαδήποτε κατανομή με μέση τιμή 1/μ, διακύμανση σ^2 και μέσο πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται μία μονάδα χρόνου ίσο με μ. Εδώ για να υπολογιστούν οι δείκτες απόδοσης χρειάζεται εκτός από το μ και το σ^2 της κατανομής του χρόνου εξυπηρέτησης.

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 28)

Το μέσο πλήθος πελατών που βρίσκονται στην διαδικασία εξυπηρέτησης θα είναι ίδιο με το M/M/1 και M/M/S δηλαδή:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$$

Το ίδιο και ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος θα είναι ίδιος με το M/M/1

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Το μέσο πλήθος στην ουρά αναμονής δίνετε από τον παρακάτω τύπο

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + (\lambda / \mu)^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

Όπως είδαμε και πριν το μέσο πλήθος των πελατών στο σύστημα είναι το άθροισμα του μέσου πλήθους πελατών που περιμένουν στην ουρά και του μέσου πλήθους πελατών που περιμένουν στην θέση εξυπηρέτησης.

$$L = L_q + L_s$$

Αντίστοιχα ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά και το σύστημα θα είναι

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

Η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα, η πιθανότητα κάποιος που μόλις έφτασε στο σύστημα να χρειαστεί να περιμένει, η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα και τέλος η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότεροι από k πελάτες στο σύστημα θα είναι αντίστοιχα:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_w = 1 - P_0$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

$$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$$

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 30)

Παράδειγμα M/G/1 (1.3.6)

Σε μια υπηρεσία εισέρχονται περίπου δώδεκα πελάτες την ώρα, ακλουθώντας κατανομή Poisson. Ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι περίπου τρία λεπτά με διακύμανση ένα λεπτό. Θα ισχύει:

$\lambda = 12$ και $\mu = 20$ πελάτες την ώρα. Επίσης $\sigma^2 = 0,016$ δηλαδή το ένα εξηκοστό της ώρας

Ερώτηση:

Ποιο είναι το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα;

Απάντηση:

Θα έχουμε

$$L = L_q + L_s = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1-\lambda/\mu)} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12^2 \cdot 0,016 + (12/20)^2}{2 \cdot (1-12/20)} + \frac{12}{20} = 4$$

Το σ^2 θα είναι 0,016 καθώς είναι ένα λεπτό άρα 0,016 ώρες.

Ερώτηση:

Ποιος είναι ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα;

Απάντηση:

Εφόσον γνωρίζουμε ότι 1/μ είναι ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στην εξυπηρέτηση θα έχουμε:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{4}{12} + \frac{1}{20} = 0,38$$

Θα έχουμε 0,38 ώρες άρα περίπου 23 λεπτά αναμονή.

Ερώτηση:

Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που μόλις έφτασε στο σύστημα να χρειαστεί να περιμένει, να υπάρχουν 4 πελάτες στο σύστημα και η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότεροι από 8 πελάτες στο σύστημα;

Απάντηση:

Θα έχουμε αντίστοιχα:

$$P_w = 1 - P_0 = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = 1 - \left(1 - \frac{12}{20}\right) = 0,6$$

$$P_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 = \left(\frac{12}{20}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{12}{20}\right) = 0,051$$

$$P_{n>8} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} = \left(\frac{12}{20}\right)^{8+1} = 0,01$$

Μοντέλο M/M/1/k (1.3.7)

προηγούμενα Ισχύει ότι και στο M/M/1 αλλά εδώ παρόλο που το πλήθος των πελατών στην πηγή είναι άπειρο το πλήθος στην ουρά αναμονής είναι πεπερασμένο και ίσο με k-1. Δηλαδή μπορούμε να έχουμε μέχρι k πελάτες στο σύστημα και k-1 στην ουρά καθώς ο ένας εξυπηρετείτε.

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 28)

Το μέσο πλήθος πελατών που βρίσκονται στην διαδικασία εξυπηρέτησης θα είναι ίδιο με τα προηγούμενα μοντέλα:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$$

Το ίδιο και ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος θα είναι ίδιος με πρίν.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Για να βρούμε το μέσο πλήθος στην ουρά αναμονής αρκεί να αφαιρέσουμε από το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα το μέσο πλήθος πελατών στην εξυπηρέτηση.

$$L_q = L - L_s$$

Για χάριν ευκολίας παρακάτω θα αντικαταστήσουμε το λ/μ με τον βαθμό απασχόλησης ρ. Το κ είναι ο μέγιστος αριθμός πελατών στο σύστημα.

$$L = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} - \frac{(k+1)(\lambda/\mu)^{k+1}}{1-(\lambda/\mu)^{k+1}} = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}$$

Ο μέσος χρόνος παραμονής στην ουρά και στο σύστημα θα είναι αντίστοιχα:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$W = \frac{L}{\lambda(1-P_k)}$$

Η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα, η πιθανότητα κάποιος που μόλις έφτασε στο σύστημα να χρειαστεί να περιμένει, η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα και τέλος η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότεροι από k πελάτες στο σύστημα θα είναι αντίστοιχα:

$$P_0 = \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{k+1}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}$$

$$P_w = 1 - P_0$$

$$P_n = (P_0)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = P_0 \cdot \rho^n$$

όταν

$n \le k$

$$P_{n>k} = 1 - (P_0 + P_1 + \ldots P_k)$$

Όταν το n είναι μικρότερο από τη χωρητικότητα του συστήματος

και μηδέν όταν το n είναι μεγαλύτερο από τη χωρητικότητα του συστήματος.

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 30)

Παράδειγμα M/M/1/κ (1.3.8)

Ένα ταμείο μιας τράπεζας δέχεται τριάντα πελάτες την ώρα με κατανομή Poisson. Ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι εξήντα πελάτες την ώρα επίσης με κατανομή Poisson. Στο συγκεκριμένο ταμείο η ουρά δεν μπορεί να υπερβεί τα δεκαπέντε άτομα. Ισχύει λ=30, μ=60 και κ=15

Ερώτηση:

Ποιο είναι το μέσο πλήθος πελατών που περιμένουν στην ουρά;

Απάντηση:

Θα έχουμε

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{30}{60} = 0,5$$

$$L_q = L - (1 - P_0) = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} - (1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}) = \frac{0,5}{1-0,5} - \frac{(15+1)0,5^{15+1}}{1-0,5^{15+1}} - \left(1 - \frac{1-0,5}{1-0,5^{15+1}}\right) = 0,5$$

Ερώτηση:

Ποιος είναι ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά;

Απάντηση:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda(1-P_k)} - \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda(1-P_0 \cdot \rho^k)} - \frac{1}{\mu} = \frac{0,5}{30(1-0,5 \cdot 0,5^{15})} - \frac{1}{60} = 0,001$$

Θα περιμένει 0,001 ώρες ή 3,6 δευτερόλεπτα, δηλαδή τον συντριπτικά περισσότερο χρόνο η ουρά θα είναι άδεια.

Ερώτηση:

Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος που φτάνει στο σύστημα να χρειαστεί να περιμένει ποια να περιμένουν περισσότερα από ένα άτομα;

Απάντηση:

Θα έχουμε αντίστοιχα:

$$P_w = 1 - P = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$P_{n>1} = 1 - (P_0 + P_1) = 1 - (0,5 + 0,25) = 0,25$$

Άρα θα είναι 50% και 25%

Μοντέλο M/M/1/∞/N (1.3.9)

Ισχύει ότι και στο μοντέλο M/M/1 και εδώ το πλήθος πελατών στην ουρά μπορεί να είναι άπειρο η μόνη διαφορά είναι ότι εδώ το πλήθος των πελατών στην πυγή είναι πεπερασμένο και ίσο με N.

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 28)

Στο M/M/1/∞/N το μέσο πλήθος πελατών στην εξυπηρέτηση καθώς και ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος δίνονται από τις σχέσεις:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{και} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά αναμονής καθώς και το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$L_q = N - \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right)(1 - P_0)$$

$$L = L_q + (1 - P_0)$$

Ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στην ουρά και στο σύστημα:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda\,(N - L)}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα, η πιθανότητα κάποιος που μόλις έφτασε στο σύστημα να χρειαστεί να περιμένει, η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα (εφόσον φυσικά δεν υπερβαίνουν τον περιορισμένο αριθμό των πελατών στην πυγή) και τέλος η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότεροι από k πελάτες στο σύστημα θα είναι αντίστοιχα:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$P_w = 1 - P_0$$

$$P_n = (P_0)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{N!}{(N-n)!}$$

$$P_{n>k} = 1 - (P_0 + P_1 + \ldots + P_k)$$

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 30)

Παράδειγμα M/M/1//N (1.3.10)

Έχουμε ένα γραφείο με έναν εξυπηρετητή σε ένα τμήμα μιας επιχείρησης που απασχολεί δέκα άτομα. Τα άτομα αυτά επισκέπτονται το γραφείο για την διεκπεραίωση μιας εργασίας περίπου ένα άτομο την ώρα, ο ρυθμός τους ακολουθεί κατανομή Poisson. Η εργασία αυτή διαρκεί περίπου δύο λεπτά ακλουθώντας κανονική κατανομή. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε: λ=1, μ=30 και N=10.

Να βρεθούν:

Το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα

$$L = L_q + (1 - P_0) = N - \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right) \cdot \left(1 - P_0\right) + (1 - P_0)$$

<=>

$$L = N - \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}\right)$$

<=>

$$L = 10 - \left(\frac{1 + 30}{1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{10} \frac{10!}{(10-n)!} \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^n}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{10} \frac{10!}{(10-n)!} \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^n}\right) = 1$$

Περίπου ένα άτομο θα βρίσκετε κατά μέσο όρο στο σύστημα.

Ποιος είναι ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα;

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda \cdot (N - L)} + \frac{1}{\mu} = \frac{0,7}{1 \cdot (10 - 1)} + \frac{1}{30} = 0,1$$

Θα είναι 0,1 της ώρας δηλαδή έξι λεπτά.

Ποια η πιθανότητα ένας πελάτης που μόλις φτάνει στο σύστημα να χρειαστεί να περιμένει επίσης ποια η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότεροι από δύο πελάτες στο σύστημα;

$$P_w = 1 - P_0 = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{10} \frac{10!}{(10-n)!} \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^n} = 0,3$$

$$P_{n>2} = 1 - (P_0 + P_1 + P_2) = 1 - \left(P_0 + P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^1 \frac{N!}{(N-1)!} + P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 \frac{N!}{(N-2)!} \right)$$

<=>

$$P_{n>2} = 1 - \left(0,7 + 0,7 \cdot \left(\frac{1}{30} \right)^1 \frac{10!}{(10-1)!} + 0,7 \cdot \left(\frac{1}{30} \right)^2 \frac{10!}{(10-2)!} \right)$$

<=>

$$P_{n>2} = 0,04$$

Στην πρώτη περίπτωση η πιθανότητα είναι τριάντα τοις εκατό ενώ στην δεύτερη τέσσερα τοις εκατό.

Μοντέλο M/D/1 (1.3.11)

Πρόκειται για ειδική περίπτωση του μοντέλου M/G/1 όπου η διακύμανση σ^2 είναι μηδενική. Δηλαδή ο εξυπηρετητής εξυπηρετεί όλους τους πελάτες στον ίδιο σταθερό χρόνο ίσο με 1/μ επί την μονάδα χρόνου. Αυτό γίνεται όταν ο εξυπηρετητής δεν είναι άνθρωπος αλλά ρομπότ/μηχάνημα που επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία ξανά και ξανά (πχ βιομηχανική μονάδα). Εάν ο εξυπηρετητής είναι μηχάνημα δεν σημαίνει απαραίτητα όμως ότι έχουμε διαδικασία M/D/1 καθώς η διαδικασία μπορεί να μην είναι επαναλαμβανόμενη. Οι τύποι που χρησιμοποιούμε στο M/D/1 είναι ίδιοι με το M/G/1 εκτός από τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στην ουρά που εάν αντικαταστήσουμε το σ^2 με 0 θα έχουμε:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 33)

Εξισώσεις Little's Flow (1.4)

Ουσιαστικά σε όλα τα συστήματα ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα ή στην ουρά ισούται με τον μέσο χρόνο αναμονής στο σύστημα ή στην ουρά πολλαπλασιασμένο με τον μέσο ρυθμό αφίξεων. Αυτές οι εξισώσεις λέγονται εξισώσεις Little's Flow. Αναλυτικά οι τύποι:

$$L = \lambda W \quad \text{και} \quad L_q = \lambda W_q$$

(Γεωργίου, σ. 31)

Ανάλυση κόστους ουρών αναμονής (1.5.)

Ο λόγος που ασχολούμαστε με της ουρές αναμονής στην οικονομική επιστήμη είναι η μείωση του μεταβλητού προσδοκώμενου κόστους του συστήματος. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να αναλύσουμε το κόστος αυτό. Το κόστος χωρίζετε σε δύο σκέλη: Το κόστος των εξυπηρετητών (πχ μισθός εργαζομένου) και το κόστος αναμονής στην ουρά των πελατών. Μέσω αυτού ψάχνουμε τον κατάλληλο αριθμό εξυπηρετητών που χρειάζονται στο κάθε σύστημα. Αυτό το ονομάζουμε δυναμικότητα του συστήματος. Όπως είναι λογικό όσο περισσότερους εξυπηρετητές έχουμε, δηλαδή αυξάνετε η δυναμικότητα, τόσο αυξάνετε το κόστος αλλά ταυτόχρονα μειώνετε το κόστος αναμονής. Ενώ το κόστος εξυπηρέτησης είναι εύκολα κατανοητό, το κόστος αναμονής για να το κατανοήσουμε πρέπει να το αναλύσουμε σε δύο είδη. Το ένα είδος είναι το κόστος αναμονής όταν οι πελάτες είναι εσωτερικοί και το δεύτερο όταν οι πελάτες είναι εξωτερικοί. Όταν έχουμε εσωτερικούς πελάτες πχ -μηχανήματα που περιμένουν για επιδιόρθωση ή αυτοκίνητα στην γραμμή παραγωγής μιας αυτοκινητοβιομηχανίας που περιμένουν στην ουρά για το επόμενο στάδιο της επεξεργασίας- τότε η ανάλυση του κόστους είναι σχετικά εύκολη. Όταν όμως έχουμε εξωτερικούς πελάτες όπως παραδείγματος χάριν μια τράπεζα το κόστος αναμονής μπορεί να είναι ποιο γενικό, όπως μπορεί οι πελάτες να δυσθυμήσουν με την αναμονή και να επιλέξουν τελικός άλλη τράπεζα για να εμπιστευθούν τις καταθέσεις τους.

Το συνολικό μεταβλητό κόστος, συμβολίζετε με TC που βγαίνει από τα αρχικά Total Cost. Ως TC ορίζετε το άθροισμα του κόστους παραμονής στην ουρά που συμβολίζετε WC (Waiting Cost) και το κόστος των εξυπηρετητών SC (Service Cost). Το WC αναλύετε ως εξής: Το κόστος παραμονής ενός πελάτη στην ουρά μία μονάδα χρόνου συμβολίζετε ως C_w. Εάν πολλαπλασιάσουμε το C_w με τον μέσο αριθμό πελατών που θα εισέλθουν την ίδια μονάδα χρόνου λ θα έχουμε το μέσο συνολικό κόστος αναμονής για την συγκεκριμένη μονάδα χρόνου. Ο χρόνος παραμονής των πελατών όμως μπορεί να είναι διαφορετικός από την μονάδα χρόνου που έχουμε υπολογίσει μέχρι τώρα. Οπότε για να υπολογίσουμε το συνολικό προσδοκώμενο κόστος αναμονής των πελατών στο σύστημα πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε το γινόμενο του με το W. Τέλος γνωρίζοντας ότι $L = w \times \lambda$ $L = w \times \lambda$ προκύπτει ο τύπος:

$$WC = c_w w \lambda = c_w L$$

Οπότε συνεπάγετε ότι ο μέσο κόστος αναμονής είναι ίσο με το γινόμενο του μέσου κόστους ανά πελάτη μία μονάδα χρόνου με τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα.

Όσον αφορά το κόστος για της θέσεις αναμονής με C_s συμβολίζουμε το κόστος για μία θέση αναμονής την μία μονάδα χρόνου (πχ ωρομίσθιο υπαλλήλου). Εάν πολλαπλασιάσουμε το κόστος εξυπηρέτησης για μία μονάδα χρόνου με το πλήθος των εξυπηρετητών, δηλαδή την δυναμικότητα του συστήματος, θα βρούμε το συνολικό κόστος εξυπηρέτησης του συστήματος για μία μονάδα χρόνου.

$$SC = c_s \times s$$

Αθροίζοντας τώρα το μέσο κόστος αναμονής στην ουρά με το μέσο κόστος εξυπηρέτησης παίρνουμε το συνολικό μέσο μεταβλητό κόστος ανά μονάδα χρόνου.

$$TC = WC + SC = c_w L + c_s s$$

Στόχος μας είναι να βρούμε πόσους εξυπηρετητές πρέπει να έχουμε στο εκάστοτε σύστημα για να είναι ποιο οικονομικό. Κάθε φορά που μειώνουμε τους εξυπηρετητές μειώνετε το κόστος εξυπηρέτησης αλλά ταυτόχρονα αυξάνετε το κόστος αναμονής στην ουρά. Ενώ όταν αυξάνουμε τους εξυπηρετητές αντίστοιχα αυξάνετε το κόστος εξυπηρέτησης αλλά μειώνετε το κόστος αναμονής πελατών στην ουρά. Οπότε χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο δοκιμάζοντας διαφορετικό αριθμό εξυπηρετητών βρίσκουμε την «χρυσή τομή» που θα μας φέρει το ελάχιστο κόστος.

Τέλος εάν θέλουμε να βρούμε μόνο το συνολικό κόστος στην ουρά και όχι στο σύστημα παίρνουμε τον τύπο:

$$TC = WC + SC = c_w L_q + c_s s$$

(Μπάτης, Γκανάς, & Γεωργίου, 2004, σ. 33)

Συνέχεια παραδείγματος M/M/S (1.5.1)

Όπως είδαμε στο παραπάνω παράδειγμα η ουρά αναμονής είναι ουσιαστικά ανύπαρκτη. Μήπως δεν χρειάζεται να πληρώνουμε δύο εξυπηρετητές; Αυτό θα εξαρτηθεί από το κόστος αναμονής στην ουρά. το κόστος αναμονής όπως έχουμε πει παραπάνω είναι εξαιρετικά δύσκολο να κοστολογηθεί. Στην συγκεκριμένη περίπτωση για να δικαιολογηθούν οι δύο εξυπηρετητές το κόστος αναμονής στην ουρά πρέπει να είναι πολύ μεγάλο, για παράδειγμα, μια εξαιρετικά σημαντική για την λειτουργία του κράτους δημόσια υπηρεσία. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το κόστος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά είναι 100€ την ώρα, ενώ ο μισθός του υπαλλήλου είναι 10€ την ώρα.

Το συνολικό κόστος, στο σύστημα, στην περίπτωση που υπάρχουν δύο εξυπηρετητές θα είναι:

$$TC = WC + SC = c_w \times L + c_s \times s = 100 \times 0,338 + 10 \times 2 = 53,8$$

Για να βρούμε τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα για έναν εξυπηρετητή θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του M/M/1. Οπότε θα έχουμε:

$$TC = WC + SC = c_w \times L + c_s = 100 \times 0,5 + 10 = 60$$

Όσο περίεργο και αν φαίνετε το κόστος με έναν εξυπηρετητή είναι μεγαλύτερο από ότι με δύο 60>53,8. Αυτό συμβαίνει γιατί έχουμε βάλει τεράστιο κόστος αναμονής εκατό ευρώ την ώρα. Φανταστείτε μια πολύ σημαντική κυβερνητική υπηρεσία που δεν πρέπει ποτέ και για κανένα λόγο κάποιος να περιμένει στην ουρά.

Εφαρμογές της θεωρίας ουρών αναμονής στα διόδια. (2)

Περίπτωση M/M/1 Δρόμος δρόμος με μονή λωρίδα αυτοκινήτων. (2.1)

Αυτή είναι η ποιο απλή περίπτωση διοδίων που υπάρχει. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει μόνο ένας εξυπηρετητής για να εξυπηρετήσει την ουρά διοδίων που δημιουργείτε. Ας υποθέσουμε ότι περνάει ένα αυτοκίνητο, ακολουθώντας κατανομή Poisson, κάθε δέκα δευτερόλεπτα από τον δρόμο αυτόν την ημέρα. Ο χρόνος εξυπηρέτησης θα είναι περίπου πέντε δευτερόλεπτα. Άρα θα έχουμε έξι αυτοκίνητα το λεπτό (λ=6) και μπορούν να εξυπηρετηθούν μέχρι και δώδεκα το λεπτό (μ=12). Ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος εξυπηρέτησης θα είναι: 6/12=0,5.

Για να βρούμε το μέσο πλήθος αυτοκινήτων στην ουρά θα έχουμε:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{6^2}{12(12-6)} = 0,5$$

Αντίστοιχα για το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα θα έχουμε:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,5 + 0,5 = 1$$

Για τον μέσο χρόνο αναμονής ενός αυτοκινήτου στην ουρά και στο σύστημα θα έχουμε αντίστοιχα:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,5}{6} = 0,083$$

$$W = \frac{1}{\mu} + W_q = 0,083 + 0,083 = 0,16$$

Δηλαδή θα περιμένει 4,8 δευτερόλεπτα κατά μέσο όρο στην ουρά και 9,6 στο σύστημα.

Η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένα αυτοκίνητο στο σύστημα είναι:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - 0,5 = 0,5$$

Η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένει ένα αυτοκίνητο όταν φτάνει είναι:

$$P_w = 1 - P_0 = 1 - 0,5 = 0,5$$

Η πιθανότητα να περιμένουν δύο αυτοκίνητα είναι:

$$P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot P_0 = \left(\frac{6}{12}\right)^2 \cdot 0,5 = 0,125$$

Η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότερα από δύο αυτοκίνητα στο σύστημα είναι:

$$P_{n>2} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2+1} = \left(\frac{6}{12}\right)^{2+1} = 0,125$$

Περίπτωση M/M/2 (2.2)

Στην περίπτωση αυτή στα διόδια υπάρχουν περισσότεροι από ένας εξυπηρετητές.

Παράδειγμα διοδίων για M/M/2

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας δρόμος διοδίων όπου περνάνε 30.000 αυτοκίνητα ημερησίως, ακολουθώντας κατανομή Poisson. Οι εξυπηρετητές μπορεί να είναι δύο ειδών. Είτε ράμπα διοδίων με υπάλληλο είτε αυτόματη ράμπα που λειτουργεί με “e-Pass”. Τα αυτοκίνητα δεν περνάνε με σταθερό ρυθμό ανά ημέρα αλλά με κυμαινόμενο ανάλογα την ώρα της ημέρας. Δηλαδή άλλος είναι ο ρυθμός αυτοκινήτων τις ώρες αιχμής και άλλος την νύχτα. Ως ώρες αιχμής θεωρούμε τις ώρες που ο περισσότερος κόσμος πηγαίνει και αντίστοιχος έρχεται από την δουλειά του. Ως ώρες αιχμής θα βάλουμε τις ώρες από 07:00 πμ - 10:00 πμ και 04:00 μμ - 07:00 μμ. Ως νυχτερινές θα έχουμε: από 12:00 πμ μέχρι 6:00 πμ. Ενώ όλες τις υπόλοιπες ώρες θα τις θεωρήσουμε μη αιχμής.

Τις ώρες αιχμής περνάνε τα μισά αυτοκίνητα δηλαδή 15.000. Τις ώρες μη αιχμής περνάνε 13.000 ενώ τα υπόλοιπα 2.000 περνάνε την νύχτα. Τα διόδια έχουν έξι θέσεις όπου μπορεί να μπει είτε ράμπα με υπάλληλο είτε αυτόματη ή ακόμα και τίποτα από τα δύο. Υποχρεωτικό είναι όμως να υπάρχει τουλάχιστον μία ράμπα με υπάλληλο και μία αυτόματη.. Σε κάθε περίπτωση η εταιρεία που διαχειρίζεται τα διόδια έχει διείσδυση 30% της εφαρμογής e-pass. Ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι 600 αυτοκίνητα την ώρα για τις ράμπες με υπάλληλο ενώ οι αυτόματες μπορούν μέχρι και 900 αυτοκίνητα την ώρα να εξυπηρετήσουν. Το κόστος αναμονής θεωρείτε σταθερό για όλα τα αυτοκίνητα στο ενάμισι ευρώ την ώρα ενώ το κόστος των εξυπηρετητών με υπαλλήλους υπολογίζετε σε δεκαπέντε ευρώ την ώρα και σε ενάμισι ευρώ την ώρα το κόστος των αυτόματων.

Ερώτηση:

Με δεδομένο ότι οι αυτόματοι εξυπηρετητές παραμένουν σταθεροί ενώ οι μη αυτόματοι μπορούν να μεταβληθούν μέσα στην ημέρα να βρεθούν πόσοι υπάλληλοι πρέπει να χρησιμοποιηθούν ανάλογα με την ώρα της ημέρας και πόσοι αυτόματοι εξυπηρετητές πρέπει να εγκατασταθούν.

Απάντηση:

Για να λύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα θα χωρίσουμε την ημέρα σε τρείς κατηγορίες στις ώρες αιχμής, που θα είναι έξι ώρες, στις νυχτερινές ώρες που είναι επίσης έξι και οι υπόλοιπες δώδεκα είναι οι ώρες μη αιχμής. Κάθε κατηγορία έχει τον δικό της ρυθμό αφίξεων. Θα βρούμε τον βέλτιστο αριθμό υπαλλήλων και το συνολικό ωριαίο κόστος μη αυτόματων εξυπηρετητών για κάθε κατηγορία. Επειδή οι μη αυτόματοι εξυπηρετητές είναι ευέλικτοι, δηλαδή θα δουλεύει διαφορετικός αριθμός τους κάθε ώρα της ημέρας, θα πρέπει να βρούμε το συνολικό κόστος για ένα εικοσιτετράωρο με έναν αυτόματο εξυπηρετητή και να το συγκρίνουμε με το συνολικό εικοσιτετράωρο κόστος για δύο αυτόματους εξυπηρετητές, μετά τρείς κτλ.

Για την ευκολότερη κατανόηση τα συνολικά κόστη έχουν οριστεί ως εξής:

ATC - Automated Total Cost

Πρόκειται για συνολικό κόστος που αφορά αυτόματους εξυπηρετητές.

NTC – Non automated Total Cost

Αφορά τους μη αυτόματους εξυπηρετητές.

TC – Total Cost

Συνολικό κόστος και αυτόματων και μη αυτόματων.

TC.24

Εικοσιτετράωρο συνολικό κόστος.

Τα συνολικά κόστη τα συνοδεύουν κα κάποιοι δείκτες. Οι δείκτες αυτοί περιέχουν ένα γράμμα και κάποιους αριθμούς.

A: Ώρες Αιχμής

M: Ώρες Μη αιχμής

N: Νυχτερινές Ώρες

Οι αριθμοί είναι συνήθως δύο και αντιπροσωπεύουν το πόσοι εξυπηρετητές υπάρχουν. Οι αυτόματοι πάντα μπαίνουν πρώτοι και μετά ακολουθούν οι μη αυτόματοι. Στο εικοσιτετράωρο κόστος υπάρχει μόνο ένας αριθμός και αντιπροσωπεύει πάντα τους αυτόματους.

π.χ. 1-3: υπάρχει ένας αυτόματος εξυπηρετητής στο συνολικό κόστος και τρείς υπάλληλοι.

Περίπτωση με έναν αυτόματο εξυπηρετητή (2.2.1)

Ώρες αιχμής με έναν αυτόματο εξυπηρετητή (2.2.1.1)

Εφόσον στις έξι ώρες αιχμής περνάνε 15.000 αυτοκίνητα τότε μπορούμε να πούμε ότι περνάνε 2.500 αυτοκίνητα την ώρα. Τα αυτοκίνητα αυτά όμως δεν περνάνε όλα από τους υπαλλήλους αλλά κάποια έχουν “e-pass” και εφόσον ξέρουμε ότι το τριάντα τοις εκατό κάθε κατηγορίας έχει “e-Pass”, το εβδομήντα τοις εκατό δηλαδή 1.750 οχήματα περιμένουν να εξυπηρετηθούν από κάποιον υπάλληλο και 750 από τον αυτόματο εξυπηρετητή. Για αρχή πρέπει να βρούμε τον βέλτιστο αριθμό εξυπηρετητών με υπαλλήλους. Ο ελάχιστος αριθμός εξυπηρετητών που επιτρέπετε εδώ για να μην μεγαλώνει η ουρά στο άπειρο θα είναι ένας αριθμός ο οποίος πολλαπλασιαζόμενος με τον αριθμό μ δηλαδή το 600 θα δίνει έναν αριθμό μεγαλύτερο του 1.750. Δηλαδή επιτρέπετε να έχουμε τουλάχιστον τρείς εξυπηρετητές. Όποτε:

Ο ρυθμός απασχόλησης του συστήματος θα είναι:

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{1750}{3 \cdot 600} = 0,97$$

Η μηδενική πιθανότητα δίνεται:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3-1}\left[\frac{(1750/600)}{n!}\right] + \frac{(1750/600)^3}{3!} \cdot \left(\frac{3 \cdot 600}{3 \cdot 600 - 1750}\right)} = 0,006$$

Γνωρίζοντας την μηδενική πιθανότητα μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο αριθμό αυτοκινήτων που περιμένουν στην ουρά:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda \cdot \mu}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_q = \frac{(1750/600)^3 1750 \cdot 600}{(3-1)!(3 \cdot 600 - 1750)^2} \cdot 0,006 = 33,17$$

Οπότε θα έχουμε συνολικά:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 33,17 + \frac{1750}{600} = 36,09$$

Το κόστος αναμονής σε περίπτωση που κρατήσουμε τρείς υπαλλήλους θα είναι σύμφωνα με τον τύπο:

$$NTC_{A.3} = 1,5 \cdot 36,09 + 3 \cdot 15 = 99,13$$

Εφόσον σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μόνο ένας αυτόματος εξυπηρετητής και επειδή συνολικά έχουμε έξι θέσεις, μπορούμε να έχουμε μέχρι και πέντε υπαλλήλους. οπότε θα δοκιμάσουμε με τέσσερις υπαλλήλους για να δούμε εάν θα μειωθεί το κόστος.

Θα πρέπει όπως και πριν να βρούμε την μηδενική πιθανότητα για τέσσερις υπαλλήλους αυτήν την φορά:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{4-1}\left[\frac{(1750/600)}{n!}\right] + \frac{(1750/600)^4}{4!} \cdot \left(\frac{4 \cdot 600}{4 \cdot 600 - 1750}\right)} = 0,042$$

Το πλήθος αυτοκινήτων που περιμένουν στην ουρά:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda \mu}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_q = \frac{(1750/600)^4 1750 \cdot 600}{(4-1)!(4 \cdot 600 - 1750)^2} \cdot 0,042 = 1,27$$

Και στο σύστημα:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1,27 + \frac{1750}{600} = 4,19$$

Οπότε για τέσσερις υπαλλήλους στα διόδια θα έχουμε:

$$NTC_{A.4} = 1,5 \cdot L + s \cdot 15 = 1,5 \cdot 4,19 + 4 \cdot 15 = 66,28$$

Περίπτωση με πέντε υπαλλήλους δεν την εξετάζουμε καν, καθώς το κόστος των εξυπηρετητών μόνο πάει στο 75.

Πρέπει να εξετάσουμε τώρα και το ωριαίο κόστος των αυτόματων εξυπηρετητών:

Όπως είπαμε πριν θα περνάνε 750 αυτοκίνητα την ώρα και ο αυτόματος εξυπηρετητής μπορεί να εξυπηρετήσει έως και 900 αυτοκίνητα την ώρα.

Οπότε πλέον το λ είναι 750 και το μ είναι 900 οπότε θα έχουμε:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{750}{900 - 750} = 5$$

Δηλαδή κατά μέσο όρο θα περιμένουν πέντε αυτοκίνητα στο σύστημα

Οπότε με δεδομένο ότι το κόστος λειτουργίας/συντήρησης του αυτόματου εξυπηρετητή είναι 1,5 ευρώ την ώρα, το συνολικό κόστος τις ώρες αιχμής για έναν αυτόματο εξυπηρετητή και τέσσερις υπαλλήλους θα είναι:

$$TC_{\mathrm{A.1-4}} = 1,5 \times 5 + 1,5 \times 1 + 66,28 = 75,28$$

Το συνολικό κόστος για τις ώρες αιχμής με έναν αυτόματο εξυπηρετητή θα είναι περίπου εβδομήνταπέντε ευρώ.

Ώρες μη αιχμής με έναν αυτόματο εξυπηρετητή (2.2.1.2)

Συνολικά για τις ώρες μη αιχμής έχουμε δώδεκα ώρες. 6:00 πμ - 7:00 πμ, 10:00 πμ -04:00 μμ και 07:00 μμ – 12:00 πμ. Εφόσον ξέρουμε ότι θα περνάνε 13.000 αυτοκίνητα σε δώδεκα ώρες τότε η κίνηση θα είναι σημαντικά μικρότερη από τις ώρες αιχμής με 1.083,33 αυτοκίνητα την ώρα. από αυτά το 70% δηλαδή 758,33 περιμένει να εξυπηρετηθεί από υπαλλήλους ενώ τα υπόλοιπα 325 από τα αυτόματα μηχανήματα. Υπολογίζοντας τα παραπάνω ο ρυθμός απόδοσης του συστήματος για τα αυτοκίνητα που περιμένουν στην ουρά, εάν έχουμε έναν εξυπηρετητή θα είναι:

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{758,33}{1 \cdot 600} = 1,26$$

Είναι μεγαλύτερο του ένα, άρα πρέπει να δοκιμάσουμε με δύο εξυπηρετητές.

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{758,33}{2 \cdot 600} = 0,63$$

Με δύο είναι κάτω του ένα άρα μπορούμε να συνεχίσουμε. Θα εξετάσουμε το κόστος για δύο εξυπηρετητές και πάνω.

Η μηδενική πιθανότητα για τα αυτοκίνητα που περιμένουν στην ουρά με τους υπαλλήλους θα είναι:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \left[\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda} \right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \left[\frac{(758,3/600)^n}{n!} \right] + \frac{(758,3/600)^2}{2!} \cdot \left(\frac{2 \cdot 600}{2 \cdot 600 - 758,3} \right)} = 0,22$$

Αντίστοιχα ο μέσος αριθμός των αυτοκινήτων, που περιμένουν να εξυπηρετηθούν από υπαλλήλους, στην ουρά την ώρα θα δίνετε:

$$L_q = \frac{(\lambda / \mu)^s \lambda \mu}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \times P_0$$

$$\Rightarrow$$

$$L_q = \frac{(758,3/600)^2 758,3 \times 600}{(2-1)!(2 \times 600 - 758,3)^2} \times 0,22 = 0,84$$

Και ο αριθμός των αυτοκινήτων στο σύστημα:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,84 + \frac{758,3}{600} = 2,1$$

Ως συνολικό κόστος με δύο υπαλλήλους θα έχουμε:

$$NTC_{M.2} = 2,1 \times 1,5 + 15 \times 2 = 33,15$$

Περίπτωση με τρείς ή παραπάνω υπαλλήλους δεν εξετάζουμε καθώς το ωριαίο κόστος τριών και μόνο υπαλλήλων είναι σαράνταπέντε ευρώ.

Για την περίπτωση του αυτόματου εξυπηρετητή θα έχουμε 325 αυτοκίνητα την ώρα που θα περιμένουν να εξυπηρετηθούν από έναν αυτόματο εξυπηρετητή που μπορεί να εξυπηρετεί έως και 900 αυτοκίνητα την ώρα.

Χρησιμοποιώντας τους τύπους του Μ/Μ/1τα μέσα αυτοκίνητα την ώρα που θα βρίσκονται στο σύστημα θα είναι:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{325}{900 - 325} = 0,56$$

Έτσι ως συνολικό κόστος του των αυτόματων εξυπηρετητών και των αντίστοιχων αυτοκινήτων που περιμένουν στην ουρά θα έχουμε

$$ATC_{M.1} = 1,5 \times 0,56 + 1,5 \times 1 = 2,34$$

Για συνολικό ωριαίο κόστος για τις ώρες μη αιχμής θα είναι :

$$TC_{M.1-2} = 2,34 + 33,15 = 35,5$$

Νυχτερινές Ώρες με έναν αυτόματο εξυπηρετητή (2.2.1.3)

Την νύχτα που διαρκεί έξι ώρες 12:00 πμ - 06:00 πμ περνάνε συνολικά 2.000 αυτοκίνητα. Σε μία ώρα περνάνε 333,33 αυτοκίνητα. Εκ των οποίων τα 233,33 περιμένουν στην ουρά με τους υπαλλήλους και τα υπόλοιπα 100 στην ουρά των εξυπηρετητών με “e-pass”. Πρέπει να βρούμε τον αριθμό των αυτοκινήτων που περιμένουν στην ουρά για λ=233,33. Εάν ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι 600 αυτοκίνητα την ώρα τότε σίγουρα ο βαθμός απασχόλησης θα είναι μικρότερος του ένα ακόμα και με έναν υπάλληλο.

Με έναν υπάλληλο θα υπάρχουν περίπου 0,63 αυτοκίνητα στο σύστημα. Αυτό το βρήκαμε χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{233,33}{600 - 233,33} = 0,63$$

Άρα το συνολικό κόστος αναμονής και εξυπηρέτησης για έναν υπάλληλο θα είναι:

$$NTC_{N.1} = 1 \times 15 + 0,63 \times 1,5 = 15,94$$

Το συνολικό κόστος για δύο υπαλλήλους θα είναι σίγουρα μεγαλύτερο από τριάντα οπότε δεν εξετάζουμε το ενδεχόμενο να προσλάβουμε και δεύτερο υπάλληλο την νυχτερινή βάρδια.

Όσον αφορά το κόστος του αυτόματου εξυπηρετητή πρέπει πρώτα να βρούμε τα αυτοκίνητα που βρίσκονται στο σύστημα.

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{100}{900 - 100} = 0,12$$

Θα είναι 0,12. Άρα κόστος εξυπηρέτησης και αναμονής θα είναι:

$$ATC_{N.1} = 1,5 + 1,5 \times 0,12 = 1,68$$

Άρα το συνολικό νυχτερινό ωριαίο κόστος αναμονής και εξυπηρέτησης με έναν υπάλληλο και έναν αυτόματο εξυπηρετητή θα είναι:

$$TC_{\mathrm{N.1-1}} = 1,68 + 15,94 = 17,62$$

Σχεδόν δεκαεφτάμιση ευρώ θα έχουμε ως ωριαίο κόστος την νύχτα.

Συνολικό ημερήσιο κόστος για την εγκατάσταση ενός αυτόματου εξυπηρετητή:

Για να βρούμε το εικοσιτετράωρο κόστος θα πολλαπλασιάσουμε με έξι το ωριαίο κόστος της ώρας αιχμής, με δώδεκα το ωριαίο κόστος μιας ώρας μη αιχμής και τέλος με έξι το ωριαίο κόστος μιας νυχτερινής ώρας.

Οπότε:

$$TC24_1 = 17,62 \times 6 + 35,5 \times 12 + 75,28 \times 6 = 983,28$$

Με δύο αυτόματους εξυπηρετητές (2.2.2)

Στην περίπτωση με δύο αυτόματους εξυπηρετητές, καθώς σε καμία περίπτωση δεν έχουμε αριθμό υπαλλήλων που ξεπερνάει το πέντε, οι υπάλληλοι θα μείνουν ως έχουν. Δηλαδή το παράδειγμα θα είναι όπως και πριν μόνο που θα προσθέσουμε το επιπλέον κόστος λειτουργίας του δεύτερου αυτόματου εξυπηρετητή και θα αφαιρέσουμε το επιπλέον κόστος αναμονής που υπάρχει στο παράδειγμα με τον έναν αυτόματο εξυπηρετητή.

Ώρες αιχμής με δύο αυτόματους εξυπηρετητές (2.2.2.1)

Τις ώρες αιχμής για τους αυτόματους εξυπηρετητές τα αυτοκίνητα εισέρχονται με ρυθμό 750 την ώρα και περιμένουν να εξυπηρετηθούν από δύο εξυπηρετητές που ο κάθε ένας μπορεί να εξυπηρετεί έως και 900 αυτοκίνητα την ώρα.

Επειδή έχουμε περίπτωση M/M/2 θα πρέπει να βρούμε πρώτα την μηδενική πιθανότητα:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\cdot\left(\frac{s\cdot\mu}{s\cdot\mu-\lambda}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1}\left[\frac{(750/900)}{n!}\right] + \frac{(750/900)^2}{2!}\cdot\left(\frac{2\cdot 900}{2\cdot 900-750}\right)} = 0,41$$

Ο αριθμός των αυτοκινήτων που θα περιμένουν στην ουρά και στο σύστημα αντίστοιχα θα είναι:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_q = \frac{(750/900)^2\, 750\cdot 900}{(2-1)!(2\cdot 900-750)^2}\cdot 0,41 = 0,17$$

Και

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,17 + \frac{750}{900} = 1$$

Γνωρίζοντας τα παραπάνω μπορούμε να βρούμε το συνολικό ωριαίο κόστος για τις ώρες αιχμής.

$$TC_{\text{A.2-4}} = 1\cdot 1,5 + 2\cdot 1,5 + 4\cdot 15 + 1,5\cdot 4,19 = 70,78$$

Στην αρχή πολλαπλασιάζουμε το ένα με το ένα κόμμα πέντε που είναι το κόστος αναμονής για τα αυτοκίνητα που περιμένουν στους αυτόματους εξυπηρετητές. Μετά το δύο με το ένα κόμμα πέντε που είναι το κόστος λειτουργίας των αυτόματων εξυπηρετητών. Στην συνέχεια το τέσσερα με το δεκαπέντε, που είναι το κόστος λειτουργίας των εξυπηρετητών με υπαλλήλους, επειδή είχαμε βρει από το προηγούμενο παράδειγμα ότι το βέλτιστο είναι να έχουμε τέσσερις υπαλλήλους τις ώρες αιχμής. Τέλος το ένα κόμμα πέντε με το 4,19 που είναι το κόστος αναμονής για τα αυτοκίνητα που περιμένουν στην ουρά των υπαλλήλων.

Ώρες μη αιχμής με δύο αυτόματους εξυπηρετητές (2.2.2.2)

Για την περίπτωση μη αιχμής ο ρυθμός που εισέρχονται τα αυτοκίνητα στην ουρά για τους αυτόματους εξυπηρετητές είναι 325 την ώρα. γνωρίζοντας το αυτό θα έχουμε μηδενική πιθανότητα:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \left[\frac{(\lambda/\mu)}{n!} \right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda} \right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \left[\frac{(325/900)}{n!} \right] + \frac{(325/900)^2}{2!} \cdot \left(\frac{2 \cdot 900}{2 \cdot 900 - 325} \right)} = 0,69$$

Και κατά συνέπεια ο αριθμός αυτοκινήτων στην ουρά και στο σύστημα:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda \mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} \cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_q = \frac{(325/900)^2 325 \cdot 900}{(2-1)!(2 \cdot 900 - 325)^2} \cdot 0,69 = 0,01$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,01 + \frac{325}{900} = 0,37$$

Το συνολικό ωριαίο κόστος μιας ώρας μη αιχμής είναι:

$$TC_{\mathrm{M}.2-2} = 0,37 \cdot 1,5 + 2 \cdot 1,5 + 2,1 \cdot 1,5 + 2 \cdot 15 = 36,7$$

Νυχτερινές ώρες με δύο αυτόματους εξυπηρετητές (2.2.2.3)

Θα εισέρχονται εκατό αυτοκίνητα την ώρα και οι δύο αυτόματοι εξυπηρετητές μπορούν να εξυπηρετούν μέχρι και εννιακόσια ο κάθε ένας. Η μηδενική πιθανότητα θα είναι:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\cdot\left(\frac{s\cdot\mu}{s\cdot\mu-\lambda}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1}\left[\frac{(100/900)}{n!}\right] + \frac{(100/900)^2}{2!}\cdot\left(\frac{2\cdot 900}{2\cdot 900-100}\right)} = 0,89$$

Ο μέσος ωριαίος αριθμός των αυτοκινήτων που θα περιμένουν στην ουρά:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s\lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_q = \frac{(100/900)^2 100\cdot 900}{(2-1)!(2\cdot 900-100)^2}\cdot 0,89 = 0,0003$$

και στο σύστημα:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,0003 + \frac{100}{900} = 0,11$$

γνωρίζοντας από πριν το νυχτερινό κόστος αναμονής και εξυπηρέτησης για τα αυτοκίνητα που περιμένουν να εξυπηρετηθούν στην ουρά με τους υπαλλήλους, ως συνολικό κόστος μπορούμε να έχουμε:

$$TC_{\mathrm{N.2-1}} = 0,11\cdot 1,5 + 2\cdot 1,5 + 1\cdot 15 + 1,5\cdot 0,63 = 19,11$$

Συνολικό εικοσιτετράωρο κόστος λειτουργίας εάν τελικά βάλουμε δύο εξυπηρετητές (2.2.2.4):

Όπως και πριν θα πολλαπλασιάσουμε το συνολικό κόστος μιας ώρας αιχμής με το έξι, μιας ώρας μη αιχμής με το δώδεκα και τέλος με το έξι το συνολικό κόστος μιας νυχτερινής ώρας:

$$TC24_2 = 70,78\cdot 6 + 36,7\cdot 12 + 19,11\cdot 6 = 979,74$$

Όπως παρατηρούμε είναι μικρότερο από το εικοσιτετράωρο κόστος εάν εγκαθιστούσαμε έναν αυτόματο εξυπηρετητή.

Για τρείς αυτόματους εξυπηρετητές (2.2.3)

Ώρες αιχμής με τρείς αυτόματους εξυπηρετητές (2.2.3.1)

Τις ώρες αιχμής θα έχουμε 750 αυτοκίνητα την ώρα να περιμένουν στην ουρά των αυτόματων εξυπηρετητών. Με δεδομένο ότι οι τρείς αυτόματοι εξυπηρετητές έχουν ρυθμό εξυπηρέτησης 900 αυτοκίνητα την ώρα πρέπει να βρούμε το κόστος αναμονής στην ουρά.

Θα είναι:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\cdot\left(\frac{s\cdot\mu}{s\cdot\mu-\lambda}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3-1}\left[\frac{(750/900)}{n!}\right] + \frac{(750/900)^3}{3!}\cdot\left(\frac{3\cdot 900}{3\cdot 900-750}\right)} = 0,43$$

Και

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_q = \frac{(750/900)^2\, 750\cdot 900}{(3-1)!(3\cdot 900-750)^2}\cdot 0,43 = 0,02$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,02 + \frac{750}{900} = 0,85$$

Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τέσσερις υπαλλήλους καθώς έχουμε μέχρι και έξι θέσεις για να μπουν εξυπηρετητές και ήδη υπολογίζουμε τις τρείς ως αυτόματοι εξυπηρετητές. Οπότε για τον υπολογισμό του συνολικού κόστους θα χρησιμοποιήσω ως μέσο αριθμό πελατών που βρίσκονται στο σύστημα με τους υπαλλήλους το νούμερο που είχαμε βρει για τρείς εξυπηρετητές.

Σύνολο για τις ώρες αιχμής:

$$TC_{\text{A.3-3}} = 1,5\cdot 0,85 + 1,5\cdot 3 + 15\cdot 3 + 1,5\cdot 36,09 = 104,91$$

Ώρες μη αιχμής με τρείς αυτόματους εξυπηρετητές (2.2.3.2):

Για τις ώρες μη αιχμής ο ρυθμός εισροής αυτοκινήτων στους αυτόματους εξυπηρετητές θα είναι 325 αυτοκίνητα την ώρα. Έτσι όπως κάναμε και παραπάνω θα ισχύει:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\cdot\left(\frac{s\cdot\mu}{s\cdot\mu-\lambda}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3-1}\left[\frac{(325/900)}{n!}\right] + \frac{(325/900)^3}{3!}\cdot\left(\frac{3\cdot 900}{3\cdot 900-325}\right)} = 0,69$$

Και

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_q = \frac{(325/900)^2\, 325\cdot 900}{(3-1)!(3\cdot 900-325)^2}\cdot 0,69 = 0,00085$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,69 + \frac{325}{900} = 0,36$$

Έτσι προσθέτοντας το συνολικό κόστος των ωρών μη αιχμής για τα αυτοκίνητα που περιμένουν να εξυπηρετηθούν από υπαλλήλους που βρήκαμε προηγούμενος θα ισχύει:

$$TC_{\mathrm{M}.3-2} = 0,36\cdot 1,5 + 3\cdot 1,5 + 2\cdot 15 + 1,5\cdot 2,1 = 38,19$$

Νυχτερινές ώρες με τρείς αυτόματους εξυπηρετητές (2.2.3.3)

Την νύχτα ο ρυθμός αφίξεων είναι 100 αυτοκίνητα την ώρα. Άρα θα ισχύει:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\cdot\left(\frac{s\cdot\mu}{s\cdot\mu-\lambda}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3-1}\left[\frac{(100/900)}{n!}\right] + \frac{(100/900)^3}{3!}\cdot\left(\frac{3\cdot 900}{3\cdot 900-100}\right)} = 0,89$$

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_q = \frac{(100/900)^2\, 100\cdot 900}{(3-1)!(3\cdot 900-100)^2}\cdot 0,89 = 0,00001$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,11$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το συνολικό κόστος θα είναι:

$$TC_{N.3-1} = 0,11 \times 1,5 + 3 \times 1,5 + 1 \times 15 + 0,63 \times 1,5 = 20,61$$

Συνολικό εικοσιτετράωρο κόστος εάν εγκαταστήσουμε τρείς αυτόματους εξυπηρετητές (2.2.3.4) :

$$TC = 20,61 \times 6 + 38,19 \times 12 + 104,91 \times 6 = 1211,4$$

Συμπέρασμα (2.2.4)

Συγκρίνοντας τα τρία εικοσιτετράωρα κόστη για την εγκατάσταση ενός εξυπηρετητή, δύο ή τρείς αντίστοιχα (983.28, 979.74, 1211.4), συμπεραίνουμε ότι το μικρότερο κόστος θα επιτευχθεί εάν εγκαταστήσουμε δύο αυτόματους εξυπηρετητές με κόστος 979,74€. Όσο για τους υπαλλήλους, όπως βρήκαμε ποιο πάνω, τις ώρες αιχμής θα απασχολούμε τέσσερις, τις ώρες μη αιχμής δύο και τις νυχτερινές ώρες έναν.

Άσκηση ανάλυσης ουράς αναμονής στο σουπερ μαρκετ (3).

Σε ένα σούπερ μάρκετ εισέρχονται, την περίοδο αιχμής, εβδομήντα πελάτες την ώρα ενώ υπάρχουν έξι θέσεις εξυπηρέτησης. Ο ρυθμός που εξυπηρετούν είναι μέχρι 20 πελάτες την ώρα. Το κόστος αναμονής είναι 7€ την ώρα, ενώ εξυπηρέτησης 10€. Πόσοι εξυπηρετητές πρέπει να μπούνε για να ελαχιστοποιηθεί το κόστος;

Κατ αρχήν ο ελάχιστος αριθμός εξυπηρετητών που μπορούμε να βάλουμε είναι το s που θα έχει τον βαθμό απασχόλησης ρ κάτω από ένα. Οπότε:

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{70}{1 \cdot 20} = 3,5 \geq 1$$

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{70}{2 \cdot 20} = 1,75 \geq 1$$

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{70}{3 \cdot 20} = 1,16 \geq 1$$

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{70}{4 \cdot 20} = 0,87 \leq 1$$

Ο ελάχιστος αριθμός εξυπηρετητών που μπορούμε να έχουμε είναι τέσσερις, αλλιώς η ουρά θα αυξάνετε επ άπειρον.

Για να βρούμε τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, πρέπει πρώτα να βρούμε την μηδενική πιθανότητα.

Οπότε:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{4-1}\left[\frac{(70/20)^n}{n!}\right] + \frac{(70/20)^4}{4!} \cdot \left(\frac{4 \cdot 20}{4 \cdot 20 - 70}\right)} = 0,014$$

Χρησιμοποιούμε την μηδενική πιθανότητα υπολογίζουμε τον μέσο αριθμό πελατών στην ουρά:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda \cdot \mu}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_q = \frac{(70/20)^4 \, 70 \cdot 20}{(4-1)!(4 \cdot 20 - 70)^2} \cdot 0,014 = 5,16$$

Τέλος ο συνολικός αριθμός πελατών στο σύστημα:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 5,16 + \frac{70}{20} = 8,66$$

Το συνολικό κόστος για τέσσερα ταμεία θα είναι:

$$TC_4 = 8,66 \cdot 7 + 4 \cdot 10 = 100,65$$

Το πρώτο σκέλος του αθροίσματος αντιπροσωπεύει το κόστος αναμονής ενώ το δεύτερο το κόστος των τεσσάρων εξυπηρετητών.

Δοκιμή με πέντε εξυπηρετητές (3.1)

Για να βρούμε το συνολικό κόστος με πέντε εξυπηρετητές κάνουμε ότι κάναμε και πριν, δηλαδή υπολογίζουμε την μηδενική πιθανότητα που θα ισχύει με πέντε εξυπηρετητές:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu.1)}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\cdot\left(\frac{s\cdot\mu}{s\cdot\mu-\lambda}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{5-1}\left[\frac{(70/20)}{n!}\right] + \frac{(70/20)^5}{5!}\cdot\left(\frac{5\cdot 20}{5\cdot 20-70}\right)} = 0,02$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον αριθμό των ανθρώπων που περιμένουν στην ουρά και στο σύστημα αντίστοιχα:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda\cdot\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_q = \frac{(70/20)^5 70\cdot 20}{(5-1)!(5\cdot 20-70)^2}\cdot 0,02 = 0,88$$

και

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,88 + \frac{70}{20} = 4,38$$

Τέλος μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος του σούπερ μάρκετ με πέντε εξυπηρετητές:

$$TC_5 = 4,38\cdot 7 + 5\cdot 10 = 80,67$$

Είναι 80,67€ την ώρα. Περίπου είκοσι ευρώ λιγότερα από ότι εάν χρησιμοποιούσαμε τέσσερις υπαλλήλους στα ταμεία.

Δοκιμή με έξι εξυπηρετητές (3.2).

Εφόσον η χρήση πέντε εξυπηρετητών ελαττώνει το κόστος σε σχέση με τους τέσσερις έχουμε περιθώριο να δοκιμάσουμε και με έξι εξυπηρετητές.

Η μηδενική πιθανότητα θα είναι:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \left[\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda} \right)}$$

$$\Rightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{6-1} \left[\frac{(70/20)^n}{n!} \right] + \frac{(70/20)^6}{6!} \cdot \left(\frac{6 \cdot 20}{6 \cdot 20 - 70} \right)} = 0,02$$

Η πιθανότητα, μία οποιαδήποτε στιγμή, να μην δουλεύει κανένας εξυπηρετητής θα είναι 0,02 ή 2%.

Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά και στο σύστημα είναι:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda \cdot \mu}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \cdot P_0$$

$$\Rightarrow$$

$$L_q = \frac{(70/20)^6 70 \cdot 20}{(6-1)!(6 \cdot 20 - 70)^2} \cdot 0,02 = 0,24$$

Και

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,24 + \frac{70}{20} = 3,74$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος εξυπηρέτησης και αναμονής όταν χρησιμοποιούμε και τα έξι ταμεία:

$$TC_6 = 3,74 \cdot 7 + 6 \cdot 10 = 86,23$$

Το συνολικό ωριαίο κόστος εάν χρησιμοποιήσουμε έξι ταμεία διαμορφώνετε σε 86,23€, νούμερο μεγαλύτερο από το να βάζαμε πέντε ταμεία. Το κόστος ελαχιστοποιείτε εάν έχουμε πέντε ταμεία.

Το σούπερ μάρκετ σχεδιάζει να προσθέσει κάποια ταμεία για αγορές κάτω των δέκα τεμαχίων. Με δεδομένο ότι οι πελάτες που παίρνουν λιγότερα από δέκα τεμάχια υπολογίζετε στο 25% και ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι 30 πελάτες την ώρα, πόσα κανονικά και πόσα κάτω των δέκα τεμαχίων ταμεία πρέπει να μπούνε;

Εφόσον η ουρά των ταμείων με λιγότερα από δέκα τεμάχια είναι μικρότερη από τα υπόλοιπα ταμεία, υποθέτουμε ότι οι καταναλωτές με λιγότερα από δέκα προϊόντα θα πάνε σε αυτές. Οπότε ο ρυθμός αφίξεων για τα κανονικά ταμεία θα είναι: $\lambda_1 = 70 \cdot 0,75 = 52,5$ επειδή θα πηγαίνει το 75% των πελατών, ενώ για τα ταμεία για λιγότερα από δέκα προϊόντα θα έχουμε: $\lambda_2 = 70 \cdot 0,25 = 17,5$.

Πρέπει να υπολογίσουμε τον ελάχιστο αριθμό ταμείων που μπορούν να υπάρχουν στις δύο ουρές. Για να το βρούμε αυτό θα πρέπει να υπολογίσουμε τον μέγιστο επιτρεπόμενο βαθμό απασχόλησης για κάθε ουρά αντίστοιχα.

Για την ουρά για λιγότερα από δέκα προϊόντα θα έχουμε βαθμό απασχόλησης:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{17,5}{30} = 0,58$$

Είναι μικρότερος από ένα οπότε μπορούμε να έχουμε ακόμα και έναν εξυπηρετητή και να εξυπηρετούνται οι πελάτες κανονικά.

Για τα κανονικά ταμεία θα έχουμε:

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{52,5}{1 \cdot 20} = 2,62 \geq 1$$

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{52,5}{2 \cdot 20} = 1,31 \geq 1$$

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{52,5}{3 \cdot 20} = 0,87 \leq 1$$

Ο ελάχιστος αριθμός ταμείων που επιτρέπετε να έχουμε είναι τρία ταμεία.

Για να βρούμε τον βέλτιστο αριθμό ταμείων που πρέπει να βάλουμε θα κρατήσουμε σταθερό τον αριθμό των ταμείων για λιγότερα από δέκα τεμάχια και θα βρούμε τον βέλτιστο αριθμό των υπόλοιπων ταμείων. Μετά θα δοκιμάσουμε με περισσότερα ταμεία κάτω των δέκα τεμαχίων και θα συγκρίνουμε το νέο βέλτιστο που θα βρούμε με το προηγούμενο. Θα συνεχίσουμε έτσι και στο τέλος θα κρατήσουμε τον συνδυασμό ταμείων/κάτω των δέκα τεμαχίων ταμείων, που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος. Τα συνολικά κόστη θα έχουν ένα δείκτη με δυο νούμερα, το ένα νούμερο θα αντιπροσωπεύει το πόσα κανονικά ταμεία εξετάζουμε ενώ το άλλο το πόσα (γρήγορα) ταμεία έχουμε.

Με τρία κανονικά και ένα κάτω των δέκα τεμαχίων (γρήγορα) (3.3).

Κατ αρχήν πρέπει να βρούμε την μηδενική πιθανότητα για τα κανονικά ταμεία:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3-1}\left[\frac{(52,5/20)}{n!}\right] + \frac{(52,5/20)^3}{3!} \cdot \left(\frac{3 \cdot 20}{3 \cdot 20 - 52,5}\right)} = 0,03$$

Εφόσον είναι τρία θα αντικαταστήσουμε το n με τρία, επίσης ως λάμδα θα βάλουμε τον ρυθμό αφίξεων για τα κανονικά ταμεία που είναι 52,5.

Με βάση το παραπάνω μπορούμε να βρούμε τον αριθμό ανθρώπων που περιμένουν στην ουρά:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda \times \mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} \times P_0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$L_q = \frac{(52,5/20)^3 52,5 \times 20}{(3-1)!(3 \times 20 - 52,5)^2} \times 0,03 = 5,41$$

Και στο σύστημα:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 5,41 + \frac{52,5}{20} = 8,03$$

Συνολικά θα υπάρχουν κατά μέσο όρο οχτώ άτομα στο σύστημα.

Για να βρούμε το συνολικό κόστος στο συγκεκριμένο σενάριο, πρέπει να υπολογίσουμε και το κόστος αναμονής και εξυπηρέτησης για τα «γρήγορα» ταμεία. Γνωρίζουμε ότι ο ρυθμός άφιξης πελατών είναι 17,5 την ώρα ενώ ο ρυθμός εξυπηρέτησης 30 πελάτες την ώρα. βάσει των παραπάνω και με δεδομένο ότι υπάρχει μόνο ένα ταμείο θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της περίπτωσης M/M/1.

Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά και στο σύστημα δίνεται:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{17,5^2}{30(30-17,5)} = 0,81$$

Η ουρά θα είναι εξαιρετικά μικρή, λιγότερο από ένα άτομο κατά μέσο όρο.

Όσον αφορά το σύστημα θα έχουμε:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,81 + \frac{17,5}{30} = 1,4$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος. Ο δείκτης στο συνολικό κόστος είναι το πόσα ταμεία, κανονικά και γρήγορα, υπάρχουν. Εάν κάποια μεταβλητή αναφέρεται σε ταμείο κάτω των δέκα τεμαχίων τότε θα έχει δείκτη «κ».

$$TC_{3.1} = L \cdot 7 + s \cdot 10 + L_k \cdot 7 + s_k \cdot 10$$
$$\Leftrightarrow$$
$$TC_{3.1} = 8,03 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + 1,4 \cdot 7 + 1 \cdot 10 = 106,06$$

Είναι 106,06€ την ώρα δηλαδή μεγαλύτερο από τα 80€ που θα είχαμε εάν χρησιμοποιούσαμε απλώς πέντε κανονικά ταμεία.

Με τέσσερα κανονικά και ένα κάτω των δέκα τεμαχίων (γρήγορα) (3.4).

Για να υπολογίσουμε τον μέσο αριθμό πελατών που περιμένουν στην ουρά για τέσσερα κανονικά ταμεία, πρέπει όπως και πριν να υπολογίσουμε πρώτα την μηδενική πιθανότητα.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \left[\frac{(\lambda/\mu.1)}{n!} \right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda} \right)}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{4-1} \left[\frac{(52,5/20)}{n!} \right] + \frac{(52,5/20)^4}{4!} \cdot \left(\frac{4 \cdot 20}{4 \cdot 20 - 52,5} \right)} = 0,06$$

Το μέσο πλήθος των πελατών που βρίσκονται στην ουρά δίνετε παρακάτω.

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda \cdot \mu}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \cdot P_0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$L_q = \frac{(52,5/20)^4 52,5 \cdot 20}{(4-1)!(4 \cdot 20 - 52,5)^2} \cdot 0,06 = 0,69$$

Και στο σύστημα:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,69 + \frac{52,5}{20} = 3,31$$

Εφόσον το κόστος για ένα ταμείο κάτω των δέκα τεμαχίων έχει ήδη υπολογιστεί μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος της περίπτωσης αυτής.

$$TC_{4.1} = L \cdot 7 + s \cdot 10 + L_k \cdot 7 + s_k \cdot 10$$
$$\Leftrightarrow$$
$$TC_{4.1} = 3,31 \cdot 7 + 4 \cdot 10 + 1,4 \cdot 7 + 1 \cdot 10 = 83,03$$

Το κόστος είναι σημαντικά χαμηλότερο από πριν αλλά πάλι είναι υψηλότερο από ότι εάν χρησιμοποιούσαμε απλώς πέντε κανονικά ταμεία.

Με πέντε κανονικά και ένα κάτω των δέκα τεμαχίων (γρήγορα). (3.5)

Όπως και πριν θα πρέπει να υπολογίσουμε την μηδενική πιθανότητα:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\cdot\left(\frac{s\cdot\mu}{s\cdot\mu-\lambda}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{5-1}\left[\frac{(52,5/20)^n}{n!}\right] + \frac{(52,5/20)^5}{5!}\cdot\left(\frac{5\cdot 20}{5\cdot 20-52,5}\right)} = 0,07$$

Μετά υπολογίζουμε τον μέσο αριθμό πελατών στην ουρά και στο σύστημα:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda\cdot\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_q = \frac{(52,5/20)^5 52,5\cdot 20}{(5-1)!(5\cdot 20-52,5)^2}\cdot 0,07 = 0,16$$

Και

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,16 + \frac{52,5}{20} = 2,79$$

Τώρα έχουμε όλα τα στοιχεία για να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος για την περίπτωση αυτή:

$$TC_{5.1} = L\cdot 7 + s\cdot 10 + L_{\kappa}\cdot 7 + s_{\kappa}\cdot 10$$

$$\Leftrightarrow$$

$$TC_{5.1} = 2,79\cdot 7 + 5\cdot 10 + 1,4\cdot 7 + 1\cdot 10 = 89,36$$

Είναι μεγαλύτερο από πριν, μέχρι στιγμής το μικρότερο συνολικό κόστος που έχουμε βρει είναι όταν χρησιμοποιούμε πέντε κανονικά ταμεία.

Με τρία κανονικά και δύο κάτω των δέκα τεμαχίων (γρήγορα) (3.6)

Το κόστος των τριών κανονικών ταμείων το έχουμε υπολογίσει από πριν, το μόνο που μένει είναι να υπολογίσουμε το συνολικό ωριαίο κόστος που προκύπτει από τα δύο ταμεία κάτω των δέκα τεμαχίων:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu.1)}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\cdot\left(\frac{s\cdot\mu}{s\cdot\mu-\lambda}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1}\left[\frac{(17,5/30)}{n!}\right] + \frac{(17,5/30)^2}{2!}\cdot\left(\frac{2\cdot 30}{2\cdot 30-17,5}\right)} = 0,54$$

Ο αριθμός πελατών στην ουρά και στο σύστημα:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda\cdot\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_q = \frac{(17,5/30)^2 17,5\cdot 30}{(2-1)!(2\cdot 30-17,5)^2}\cdot 0,54 = 0,054$$

Και

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,054 + \frac{17,5}{30} = 0,63$$

Το συνολικό κόστος για αυτήν την περίπτωση θα είναι:

$$TC_{3.2} = L\cdot 7 + s\cdot 10 + L_k\cdot 7 + s_k\cdot 10$$

$$\Leftrightarrow$$

$$TC_{3.2} = 8,03\cdot 7 + 3\cdot 10 + 0,63\cdot 7 + 2\cdot 10 = 110,7$$

Το συνολικό κόστος θα είναι 110,7 για αυτήν την περίπτωση.

Με τέσσερα κανονικά και δύο κάτω των δέκα τεμαχίων. (3.7)

Μπορούμε να υπολογίσουμε κατευθείαν το συνολικό κόστος καθώς τα δεδομένα τα έχουμε βρει από πριν.

$$TC_{4.2} = L\cdot 7 + s\cdot 10 + L_k\cdot 7 + s_k\cdot 10$$

$$\Leftrightarrow$$

$$TC_{4.2} = 3,31\cdot 7 + 4\cdot 10 + 0,63\cdot 7 + 2\cdot 10 = 87,69$$

Το συνολικό κόστος είναι μικρότερο από πριν αλλά όχι το μικρότερο που έχουμε βρει.

Με τρία κανονικά και τρία κάτω των δέκα τεμαχίων. (3.8)

Πρέπει να υπολογίσουμε το συνολικό ωριαίο κόστος των τριών ταμείων κάτω των δέκα τεμαχίων. (3.8)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu\cdot 1)}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\cdot\left(\frac{s\cdot\mu}{s\cdot\mu-\lambda}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3-1}\left[\frac{(17,5/30)}{n!}\right] + \frac{(17,5/30)^3}{3!}\cdot\left(\frac{3\cdot 30}{3\cdot 30-17,5}\right)} = 0,55$$

Μέσο αριθμό ατόμων στην ουρά και στο σύστημα θα έχουμε:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s\lambda\cdot\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_q = \frac{(17,5/30)^3 17,5\cdot 30}{(3-1)!(3\cdot 30-17,5)^3}\cdot 0,55 = 0,005$$

Και

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,005 + \frac{17,5}{30} = 0,58$$

Τέλος το συνολικό κόστος για τρία κανονικά ταμεία και τρία ταμεία για προϊόντα κάτω των δέκα τεμαχίων θα είναι:

$$TC_{3.3} = L\cdot 7 + s\cdot 10 + L_k\cdot 7 + s_k\cdot 10$$

$$\Leftrightarrow$$

$$TC_{3.3} = 8,03\cdot 7 + 3\cdot 10 + 0,58\cdot 7 + 3\cdot 10 = 120,38$$

Είναι 120,38 βάσει των παραπάνω ποιο συμφέρον είναι να έχουμε πέντε κανονικά ταμεία και να μην χρησιμοποιήσουμε κανένα ταμείο κάτω των δέκα τεμαχίων. Το συνολικό ωριαίο κόστος θα είναι 80,67.

Εφαρμογή της θεωρίας των ουρών αναμονής στην καφετέρια. (4)

Σε μία καφετέρια προσέρχονται πελάτες με ρυθμό πενήντα την ώρα. Οι εισερχόμενοι πελάτες πρέπει πρώτα να περάσουνε από το ταμείο για να πάρουνε απόκομμα-απόδειξη και μετά περνάνε από τον εκάστοτε υπάλληλο για να εξυπηρετηθούνε. Αναλόγως με το τι θέλουν να αγοράσουν: καφέ/τσάι, τρόφιμα (τυρόπιτα, σάντουιτς) ή εμφιαλωμένα είδη (νερό/πορτοκαλάδαα) πηγαίνουν και στην αντίστοιχη ουρά και προσκομίζοντας την απόδειξη παίρνουν το προϊόν που θέλουν. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εξήντα πελάτες την ώρα στο ταμείο, σαράνταπέντε στους καφέδες, σαράντα στα τρόφιμα και πενήντα στα εμφιαλωμένα. Έχει βρεθεί ότι το 80% των πελατών αγοράζουν καφέ/τσάι, το 70% κάποιο φαγώσιμο και το 50% παίρνουν κάτι εμφιαλωμένο. Επίσης το κόστος εξυπηρέτησης είναι δεκαπέντε ευρώ την ώρα για τους υπαλλήλους και δύο ευρώ το ωριαίο κόστος αναμονής ανά πελάτη. Με δεδομένο ότι σε κάθε ουρά μπορούν να μπουν το πολύ τρείς εξυπηρετητές, πόσοι εξυπηρετητές πρέπει να μπουν σε κάθε ουρά για να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος και ποιο θα είναι αυτό;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Θα χρησιμοποιήσουμε τέσσερις διαφορετικές ουρές για να λύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα. Κάθε ουρά θα έχει και ένα αντίστοιχο γράμμα/συμβολισμό όπου θα χρησιμοποιείτε σαν δείκτης όταν κάποιο δεδομένο ή μεταβλητή αναφέρετε σε αυτήν.

Α: Συμβολίζει την πρώτη ουρά. Την ουρά του ταμείου.

Κ: Η ουρά των καφέδων/τσαγιών

Τ: Η ουρά των τροφίμων.

Ε: Η ουρά των εμφιαλωμένων.

Η ουρά του ταμείου (4.1)

Η συγκεκριμένη ουρά θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά: $\lambda_A = 50$ και $\mu_A = 60$

Με έναν εξυπηρετητή ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος θα είναι $\rho_A = \frac{\lambda_A}{\mu_A} = \frac{50}{60} = 0,83$ μικρότερος του ένα οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος αναμονής και εξυπηρέτησης για ένα ταμείο.

Το πλήθος πελατών που θα βρίσκονται στην ουρά αναμονής θα είναι:

$$L_{q.A} = \frac{\lambda_A^2}{\mu_A(\mu_A - \lambda_A)} = \frac{50^2}{60(60-50)} = 4,16$$

Και στο σύστημα:

$$L_A = \frac{\lambda_A}{\mu_A - \lambda_A} = \frac{50}{60-50} = 5$$

Κατά μέσο όρο θα περιμένουν πέντε πελάτες στο σύστημα.

Με βάση τα παραπάνω το συνολικό κόστος για αυτήν την περίπτωση θα είναι:

$$TC_A = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 12,5$$

Το πρώτο μισό της συνάρτησης αντιπροσωπεύει το κόστος αναμονής και το δεύτερο το κόστος εξυπηρέτησης.

Για να βρούμε το συνολικό κόστος με δύο εξυπηρετητές πρέπει πρώτα να βρούμε την μηδενική πιθανότητα:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda_A/\mu_A)^n}{n!}\right] + \frac{(\lambda_A/\mu_A)^s}{s!}\cdot\left(\frac{s\cdot\mu_A}{s\cdot\mu_A - \lambda_A}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(50/60)^n}{n!}\right] + \frac{(50/60)^2}{2!}\cdot\left(\frac{2\cdot 60}{2\cdot 60 - 50}\right)} = 0,41$$

Κατόπιν μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό πελατών στην ουρά και στο σύστημα:

$$L_{q.A} = \frac{\left(\lambda_A/\mu_A\right)^s \cdot \lambda_A \cdot \mu_A}{(s-1)!(s\mu_A - \lambda_A)^2}\cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_{q.A} = \frac{\left(50/60\right)^2 \cdot 50 \cdot 60}{(2-1)!(2\cdot 60 - 50)^2}\cdot 0,41 = 0,17$$

Η ουρά θα είναι ουσιαστικά μηδενική. Ο αριθμός των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα θα είναι:

$$L_A = L_{q.A} + \frac{\lambda_A}{\mu_A} = 0,17 + \frac{50}{60} = 1$$

Κατόπιν μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος:

$$TC_{A.2} = 1,5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11,51$$

Είναι ελαφρός μικρότερο από το εάν είχαμε ένα μόνο ταμείο. Με τρείς εξυπηρετητές δεν δοκιμάζουμε καθώς μόνο το κόστος την εξυπηρέτησης θα ξεπερνούσε το τωρινό συνολικό κόστος. Άρα για την συγκεκριμένη ουρά θα χρησιμοποιήσουμε δύο εξυπηρετητές.

Η ουρά των καφέδων (4.2)

Θα εισέρχεται το 80% των συνολικών πελατών οπότε ο ρυθμός εισροής θα είναι: $\lambda_{\kappa} = 50 \cdot 0,8 = 40$ ενώ ο ρυθμός εξυπηρέτησης: $\mu_{\kappa} = 45$

Για αρχή θα βρούμε το συνολικό κόστος χρησιμοποιώντας έναν εξυπηρετητή.

Ο αριθμός των πελατών στην ουρά θα είναι:

$$L_{q,\kappa} = \frac{\lambda_{\kappa}^2}{\mu_{\kappa}(\mu_{\kappa} - \lambda_{\kappa})} = \frac{40^2}{45(45-40)} = 7,11$$

Και στο σύστημα:

$$L_A = \frac{\lambda_{\kappa}}{\mu_{\kappa} - \lambda_{\kappa}} = \frac{40}{45-40} = 8$$

Το συνολικό κόστος θα είναι σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$TC_{\kappa.1} = 1,5 \cdot 8 + 5 \cdot 1 = 17$$

Θα είναι δεκαεφτά ευρώ την ώρα.

Θα δοκιμάσουμε και με δύο εξυπηρετητές για να δούμε εάν θα μειωθεί το συνολικό κόστος.

Για να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος με δύο εξυπηρετητές θα πρέπει πρώτα να βρούμε την μηδενική πιθανότητα.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \left[\frac{(\lambda_{\kappa}/\mu_{\kappa})^n}{n!} \right] + \frac{(\lambda_{\kappa}/\mu_{\kappa})^s}{s!} \cdot \left(\frac{s \cdot \mu_{\kappa}}{s \cdot \mu_{\kappa} - \lambda_{\kappa}} \right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \left[\frac{(40/45)^n}{n!} \right] + \frac{(40/45)^2}{2!} \cdot \left(\frac{2 \cdot 40}{2 \cdot 40 - 45} \right)} = 0,11$$

Στην συνέχεις μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό πελατών στην ουρά και στο σύστημα:

$$L_{q,\kappa} = \frac{\left(\frac{\lambda_\kappa}{\mu_\kappa}\right)^s \cdot \lambda_\kappa \cdot \mu_\kappa}{(s-1)!(s\mu_\kappa - \lambda_\kappa)^2} \cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_{q,\kappa} = \frac{\left(\frac{40}{45}\right)^2 \cdot 40 \cdot 45}{(2-1)!(2\cdot 45-40)^2} \cdot 0,11 = 0,21$$

$$L_\kappa = L_{q,\kappa} + \frac{\lambda_\kappa}{\mu_\kappa} = 0,21 + \frac{40}{45} = 1,1$$

Με δεδομένα τα παραπάνω μπορούμε να βρούμε το συνολικό κόστος για την περίπτωση αυτή:

$$TC_{\kappa,2} = 1,5\cdot 1,1 + 5\cdot 2 = 11,66$$

Είναι σημαντικά μικρότερο από ότι εάν χρησιμοποιούσαμε έναν εξυπηρετητή οπότε θα έχουμε δύο υπαλλήλους για να φτιάχνουν τους καφέδες. Σε περίπτωση που βάλουμε και τρίτο μόνο το κόστος εξυπηρέτησης ξεπερνάει το συνολικό κόστος που βρήκαμε.

Η ουρά των τροφίμων (4.3)

Στα τρόφιμα εισέρχονται στην ουρά τριανταπέντε πελάτες την ώρα (εφόσον το εβδομήντα τοις εκατό αγοράζει κάτι) ενώ μπορούν να εξυπηρετηθούν από έναν εξυπηρετητή μέχρι και σαράντα πελάτες την ώρα.

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα με έναν εξυπηρετητή θα είναι:

$$L_\tau = \frac{\lambda_\tau}{\mu_\tau - \lambda_\tau} = \frac{35}{40-35} = 7$$

Γνωρίζοντας το παραπάνω μπορούμε να βρούμε το συνολικό κόστος:

$$TC_{\tau,1} = 1,5\cdot 7 + 5\cdot 1 = 15,5$$

Για να βρούμε το συνολικό κόστος με δύο εξυπηρετητές πρέπει πρώτα να βρούμε την μηδενική πιθανότητα η οποία είναι:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda_\tau/\mu_\tau)^n}{n!}\right] + \frac{(\lambda_\tau/\mu_\tau)^s}{s!} \cdot \left(\frac{s \cdot \mu_\tau}{s \cdot \mu_\tau - \lambda_\tau}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(30/40)^n}{n!}\right] + \frac{(35/40)^2}{2!} \cdot \left(\frac{2 \cdot 35}{2 \cdot 35 - 40}\right)} = 0,39$$

Έτσι ο αριθμός των πελατών που βρίσκονται στην ουρά θα είναι:

$$L_{q.\tau} = \frac{\left(\lambda_\tau / \mu_\tau\right)^s \cdot \lambda_\tau \cdot \mu_\tau}{(s-1)!(s\mu_\tau - \lambda_\tau)^2} \cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_{q.\tau} = \frac{\left(35/40\right)^2 \cdot 35 \cdot 40}{(2-1)!(2 \cdot 40 - 35)^2} \cdot 0,39 = 0,2$$

Και στο σύστημα:

$$L_\tau = L_{q.\tau} + \frac{\lambda_\tau}{\mu_\tau} = 0,39 + \frac{35}{40} = 1,08$$

Το συνολικό ωριαίο κόστος αναμονής και εξυπηρέτησης της ουράς των τροφίμων με δύο εξυπηρετητές θα είναι:

$$TC_{\kappa.2} = 1,5 \cdot 1,08 + 5 \cdot 2 = 11,62$$

Θα βάλουμε δύο υπαλλήλους και θα έχουμε συνολικό ωριαίο κόστος 11,62€. Εάν είχαμε τρείς υπαλλήλους μόνο το κόστος εξυπηρέτησης θα ήταν 15€.

Η ουρά των συσκευασμένων προϊόντων. (4.4)

Τέλος στην ουρά των συσκευασμένων προϊόντων εισέρχεται το πενήντα τοις εκατό από τους συνολικούς πελάτες του μαγαζιού οπότε θα εισέρχονται με ρυθμό εικοσιπέντε πελατών την ώρα ενώ ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι πενήντα πελάτες την ώρα.

Εάν είχαμε έναν εξυπηρετητή τότε ο συνολικός αριθμός πελατών στο σύστημα θα είναι:

$$L_\sigma = \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma - \lambda_\sigma} = \frac{25}{50-25} = 1$$

Το συνολικό κόστος για αυτήν την περίπτωση θα είναι:

$$TC_{s.1} = 1,5 \times 1 + 5 \times 1 = 6,5$$

Δεν έχει νόημα να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος για περισσότερους εξυπηρετητές γιατί ακόμα και με δύο να χρησιμοποιήσουμε θα το υπερβαίνει.

Τελικό συνολικό κόστος (4.5)

Το τελικό συνολικό κόστος θα είναι το άθροισμα των βέλτιστων κοστών που βρήκαμε. Δηλαδή:

$$TC = TC_{A.2} + TC_{k.2} + TC_{t.2} + TC_{s.1}$$

Û

$$TC = 11,5 + 11,66 + 11,62 + 6,5 = 41,29$$

Βιβλιογραφία

Για το θεωρητικό κομμάτι χρησιμοποιήθηκαν:

1. ΑΝΔΡΕΑΣ Κ. ΓΕΩΡΓΙΟΥ, «Στοιχεία από τη Θεωρία Γραμμών Αναμονής», Σημειώσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας.

2. Χρήστος Νικολαΐδης, «Στοιχεία Πιθανοτήτων και Θεωρίας Ουρών», Σημειώσεις ΤΕΙ Λάρισας, 2005.

3. Σημειώσεις Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου «Περίληψη της Ύλης της Επιχειρησιακής Έρευνας», Ακαδημαϊκό Έτος 2003-2004.

· Νικόλαος Μπάτης Καθηγητής Πληροφορικής

ΤΕΙ Λάρισας

· Ιωάννης Γκανάς

Καθηγητής Εφαρμογών

ΤΕΙ Ηπείρου

- Ανδρέας Κ. Γεωργίου

  Αναπληρωτής Καθηγητής Επιχειρησιακής Έρευνας Πανεπιστήμιο Μακεδονίας