Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας»

Σχολή: Διοίκησης και Οικονομίας

Τμήμα: Διοίκηση επιχειρήσεων

Πτυχιακή Εργασία

Θέμα: **«***ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ* - *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ* - **»**

Διδάσκων: Γεωργία Βάσσιου

Επιμέλεια:

Παπαρούλα Σωτηρία.

Μοσμπάχ Μαριάμ.

Πάτρα 2015

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Μαθηματικός Προγραμματισμός

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο όρος «Προγραμματισμός» σε μια επιχείρηση ή έναν οργανισμό περιλαμβάνει, τη διαδικασία λήψης και υλοποίησης αποφάσεων που θα οδηγούν στην επίτευξη ατομικών, ομαδικών και οργανωτικών στόχων[1]. Οι λειτουργίες του προγραμματισμού στις επιχειρήσεις είναι πολυδιάστατες και έχουν δυναμικό χαρακτήρα. Είναι πολυδιάστατη διότι, τα επιχειρησιακά προβλήματα και οι αντίστοιχες λύσεις τους μπορεί κανείς να τις εξετάσει και να αναλύσει από πολλές πλευρές (όπως την οικονομική, τη περιβαλλοντική, τη πολιτική κλπ) και δυναμική διότι, τόσο το περιβάλλον μέσα στο οποίο λαμβάνονται οι αποφάσεις όσο οι παραδοχές οι οποίες διέπουν τη λήψη οποιασδήποτε απόφασης είναι διαρκώς μεταβαλλόμενες[2]. Ειδικότερα λοιπόν, αναφέρονται τα εξής είδη προγραμματισμού.

Έτσι λοιπόν θα λέγαμε πως ο Μαθηματικός Προγραμματισμός (Mathematical Programming – Μ.Π) αποτελεί το πεδίο των μαθηματικών που ασχολείται κυρίως με τη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης. Στην προκειμένη περίπτωση με τον όρο μοντελοποίηση εννοείται η όσο το δυνατό πιο ρεαλιστική απεικόνιση του πραγματικού προβλήματος με μαθηματικές σχέσεις κατάλληλης μορφής, έτσι ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι τεχνικές επίλυσης του μαθηματικού προγραμματισμού και να βρεθεί η ζητούμενη λύση.

Ο Μαθηματικός Προγραμματισμός περιλαμβάνει τον Γραμμικό Προγραμματισμό (Linear Programming – Γ.Π) ο οποίος είναι μια ευρέως γνωστή μέθοδος της επιχειρησιακής έρευνας, η οποία χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων που αφορούν τη βέλτιστη αξιοποίηση των διαθέσιμων πόρων, έτσι ώστε να υποβοηθηθεί το έργο των managers στη λήψη των αντίστοιχων αποφάσεων.

[1] Barlow, F.G. 1999, “Excel Models for Business and Operations Management”, John Wiley & Sons, Chichester, Sussex

[2] Κόγκας, Δ., (2007), “Στρατηγικό Επιχειρησιακό Περιβάλλον-Στρατηγική Διοίκηση”, έκδοση Γ. Μπένου, Αθήνα

Ο γραμμικός προγραμματισμός εντάσσεται στα μοντέλα επιχειρησιακής έρευνας τα οποία περιέχουν ακόμη[3]:

1. Τα μοντέλα αποφάσεων (Συστηματοποιούν τις μεθόδους σύγκρισης εναλλακτικών αποφάσεων και ακολούθως την επιλογή της βέλτιστης λύσης σε συνθήκες αβεβαιότητας και ρίσκου).

2. Τα μοντέλα προβλημάτων μεταφοράς (Επιτρέπουν τη βέλτιστη επιλογή των διαδρομών για τη μεταφορά των αγαθών από τα σημεία παραγωγής ή αποθήκευσης στα σημεία κατανάλωσης με τον πιο οικονομικό τρόπο).

3. Τα μοντέλα ουρών αναμονής (Σε αυτή την περίπτωση μας ενδιαφέρει η καλή λειτουργία μονάδων "εξυπηρέτησης" , οπότε επιτρέπουν την ανάλυση παρόμοιων καταστάσεων έτσι ώστε λαμβάνοντας υπόψη το κόστος εξυπηρέτησης και το κόστος αναμονής να προσδιοριστεί το βέλτιστο επίπεδο εξυπηρέτησης).

4. Τα μοντέλα προσομοίωσης (Είναι ένας τρόπος προσέγγισης στην ανάλυση σύνθετων προβλημάτων των οποίων η απεικόνιση σε ένα αναλυτικό μαθηματικό μοντέλο δεν είναι δυνατή, είτε λόγω της πολυπλοκότητας τους ή διότι οι τιμές των παραμέτρων τους παρουσιάζουν τυχαίες διακυμάνσεις).

5. Τα μοντέλα προγραμματισμού και ελέγχου αποθεμάτων (Είναι ένας από τους σημαντικότερους τομείς της διοίκησης παραγωγής και δίνουν απαντήσεις σε ερωτήματα που θέτει η επιχείρηση ώστε να ελαχιστοποιεί το κόστος της διότι τα αποθέματα αποτελούν σημαντικό κόστος για αυτή λόγω του ότι αντιπροσωπεύουν κεφάλαια που είναι δεσμευμένα και τα οποία η επιχείρηση δεν μπορεί να αξιοποιήσει σε άλλες δραστηριότητες).

6. Τα μοντέλα δικτυωτής ανάλυσης (Χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση μιας πραγματικής κατάστασης σε μορφή δικτύου. Με αυτά είναι δυνατός ο προσδιορισμός των χρονικών ορίων μέσα στα οποία θα πρέπει να αρχίσει και να τελειώσει η κάθε εργασία ώστε να συμπληρωθεί η εκτέλεση του έργου σε συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα).

[3] Barlow, F.G. 1999, "Excel Models for Business and Operations Management", John Wiley & Sons, Chichester, Sussex

7. Ο δυναμικός προγραμματισμός (Περιλαμβάνει μαθηματικά μοντέλα που χρησιμεύουν στον καθορισμό μιας στρατηγικής, που αποτελείται από μια σειρά αλληλοδιαδοχικών αποφάσεων και που το αποτέλεσμα της κάθε μιας επηρεάζει τις επιλογές που θα γίνουν στις επόμενες φάσεις).

Τέλος στον Μαθηματικό Προγραμματισμό συμπεριλαμβάνεται η Πολυκριτήρια Ανάλυση (Multicriteria Analysis – Π.Α) η οποία αποτελεί έναν εξελιγμένο κλάδο της επιχειρησιακής έρευνας που αναπτύχθηκε κυρίως τις τελευταίες τρείς δεκαετίες για την αντιμετώπιση πολύπλοκων προβλημάτων λήψης αποφάσεων. Η λήψη αποφάσεων αποτελεί έναν τομέα της επιχειρησιακής έρευνας με δυναμική ανάπτυξη, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο. Τα προβλήματά της δεν επιλύονται μονοδιάστατα. Πρέπει να ληφθούν υπόψη όλα τα κριτήρια που επηρεάζουν ποικιλοτρόπως τη διαδικασία λήψης των αποφάσεων και να συνδυαστούν κατάλληλα για την ορθολογική λύση των εκάστοτε προβλημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΓΕΝΙΚΗ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗ

1.1 Ιστορική Αναδρομή

Από τα πρώτα κιόλας βήματα της ανθρωπότητας η λήψη αποφάσεων ήταν μια διαδικασία πολυδιάστατης φύσης καθώς πάντα πραγματοποιούσαν (συνειδητά ή ασυνείδητα) μια ανάλυση όλων των επιμέρους παραγόντων που σχετίζονταν με την απόφαση. Ως πρώτη τεκμηριωμένη προσπάθεια επιστημονικής αντιμετώπισης του προβλήματος της σύνθεσης πολλαπλών κριτηρίων μπορεί να θεωρηθεί, η εργασία του Pareto (1896) ο οποίος (αφού βασιζόμενος σε αυτήν) έθεσε τις απαραίτητες αξιωματικές βάσεις, εισάγοντας παράλληλα μια εκ των πλέον βασικών εννοιών της σύγχρονης πολυκριτήριας ανάλυσης, την έννοια της «Αποτελεσματικότητας» (Efficiency)[4].

Μεταπολεμικά, ο Koopmans (1951) επέκτεινε την έννοια της αποτελεσματικότητας του Pareto, εισάγοντας την έννοια του «Αποτελεσματικού Συνόλου» (Effective Summation). Ένα σύνολο δηλαδή, των εναλλακτικών

[4] Οικονόμου, Γ.Σ., και Γεωργίου, Α.Κ. (1999) "Ποσοτική Ανάλυση για τη Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων", Εκδόσεις Ευγ. Μπένου, Αθήνα.

δραστηριοτήτων οι οποίες δεν κυριαρχούνται από καμία άλλη εναλλακτική δραστηριότητα. Κατά την ίδια περίπου χρονική περίοδο (1940-1950), οι Von Neumann και Morgenstern αναπτύσσουν τη «Θεωρία της Χρησιμότητας» (Utility Theory), η οποία αποτελεί (σήμερα ή θα αποτελέσει αργότερα) τη βάση ενός από τα κυριότερα μεθοδολογικά ρεύματα της πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων[5].

Στη δεκαετία του 1960 όλες οι προαναφερθείσες "προκαταρκτικές" ερευνητικές εργασίες αποτέλεσαν το έναυσμα για την πραγματοποίηση μιας περαιτέρω έρευνας (από τους Charnes και Cooper (1961)), όσον αφορά τη σύνδεση της θεωρίας του γραμμικού προγραμματισμού και της πολυκριτήριας ανάλυσης «Προγραμματισμός Στόχων» (Goal Programming), καθώς και (από τον Fishburn (1965)), όσον αφορά την επέκταση της θεωρίας χρησιμότητας σε προβλήματα λήψης αποφάσεων υπό καθεστώς πολλαπλών κριτηρίων.

Στα τέλη της δεκαετίας του 1960, η πολυκριτήρια ανάλυση άρχισε να απασχολεί και τους Ευρωπαίους επιχειρησιακούς ερευνητές. Πρωτοπόρος μεταξύ αυτών υπήρξε ο Roy (1968), ο οποίος ανέπτυξε τη «Θεωρία των Σχέσεων Υπεροχής» (Outranking Relations) και θεωρείται ο ιδρυτής της «Ευρωπαϊκής Σχολής» της πολυκριτήριας ανάλυσης[6].

Τις επόμενες δύο δεκαετίες (1970 - 1990), η πολυκριτήρια ανάλυση αναπτύχθηκε ραγδαία σε θεωρητικό επίπεδο αλλά και σε θέματα πρακτικών εφαρμογών, για την αντιμετώπιση διαφόρων πολύπλοκων πραγματικών προβλημάτων λήψης αποφάσεων. Προς την κατεύθυνση αυτή σημαντική υπήρξε η συμβολή της πληροφορικής και των υπολογιστών. Τα τελευταία χρόνια, στο πλαίσιο της Επιχειρησιακής Έρευνας και της Επιστήμης των Αποφάσεων, αναπτύσσεται με εντυπωσιακά ταχείς ρυθμούς η περιοχή της «Πολυκριτήριας Λήψης» ή «Υποστήριξης Αποφάσεων» (Multi-Criteria Decision Making ή Decision Support)[7].

---

[5] Κόγκας, Δ., (2007), "Στρατηγικό Επιχειρησιακό Περιβάλλον-Στρατηγική Διοίκηση", έκδοση Γ. Μπένου, Αθήνα

[6] Σίσκος, Γ. (1998) Γραμμικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.

[7] Barlow, F.G. 1999, "Excel Models for Business and Operations Management", John Wiley & Sons, Chichester, Sussex

1.2 Γενικά Χαρακτηριστικά της Πολυκριτήριας Ανάλυσης

Η Πολυκριτήρια Ανάλυση, αποτελεί μια συστηματική λογική και μαθηματική προσέγγιση που βοηθάει τους αποφασίζοντες να επιλύσουν διλήμματα που προκύπτουν από την επιδίωξη πολλών αντιμαχόμενων στόχων στη λήψη των αποφάσεων. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν, εκτός από τη σύγκρουση των στόχων - κριτηρίων, υπάρχει σημαντική αβεβαιότητα στη μέτρηση των επιδόσεων των εναλλακτικών λύσεων σε κάθε κριτήριο, ή στη διατύπωση των προτιμήσεων του αποφασίζοντα. Μπορεί να βοηθήσει ακόμη, στην επίλυση των διαφωνιών που προκύπτουν όταν στην απόφαση εμπλέκονται πολλοί αποφασίζοντες, ο καθένας με διαφορετικό σύστημα προτιμήσεων[8].

Δεν αποτελεί όμως, μια μεθοδολογία εύρεσης της άριστης λύσης στην περίπτωση αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια, αφού άριστη λύση δεν υπάρχει, διότι η ικανοποίηση των στόχων της απόφασης δεν μπορεί να είναι πλήρης. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει λύση που να εμφανίζει τις καλύτερες επιδόσεις σε όλα τα κριτήρια, γιατί τότε δεν θα υπήρχε πρόβλημα απόφασης.

Στην πράξη, οι αποφασίζοντες έρχονται αντιμέτωποι με αντιμαχόμενους στόχους και πρέπει να επιλέξουν τους στόχους που επιθυμούν να βελτιστοποιήσουν και εκείνους για τους οποίους είναι διατεθειμένοι να δεχθούν απόκλιση από τις βέλτιστες αποδόσεις.

Η επίλυση προβλημάτων με πολλαπλά κριτήρια είναι συνδεδεμένη με την έννοια του συμβιβασμού. Ως «Συμβιβασμό» (Compromise), ορίζεται η διαδικασία που πραγματοποιεί, κατ' αρχήν, ο ίδιος ο αποφασίζοντας και που αποδέχεται ως αναγκαία τη σχετική απομάκρυνση από κάποιους στόχους του. Ο συμβιβασμός πραγματοποιείται όμως και μεταξύ διαφορετικών αποφασιζόντων που αποδέχονται

[8] Κόγκας, Δ., (2007), "Στρατηγικό Επιχειρησιακό Περιβάλλον-Στρατηγική Διοίκηση", έκδοση Γ. Μπένου, Αθήνα

πιθανά, επιπλέον απομάκρυνση από κάποιον στόχο προκειμένου να επιτευχθεί συναίνεση ως προς μια αποδεκτή λύση[9].

1.3 ***Χρησιμότητα και Καινοτομία Πολυκριτήριας Ανάλυσης***

Η χρησιμότητα της «Πολυκριτήριας Ανάλυσης» έγκειται, στο ότι βοηθάει τον αποφασίζοντα να οργανώσει τις διαθέσιμες πληροφορίες, να σκεφτεί συστηματικά για τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα κάθε λύσης, να συνειδητοποιήσει τις προτιμήσεις του (προκειμένου να είναι σε θέση να κάνει τους λιγότερους οδυνηρούς συμβιβασμούς) και τέλος, να ελαχιστοποιηθούν οι πιθανότητες να μετανιώσει για την επιλογή που τελικά θα πραγματοποιήσει. Κατά την προσπάθειά του όμως να εξετάσει όλες τις παραμέτρους ενός προβλήματος που επηρεάζουν τη λήψη της κατάλληλης απόφασης, δημιουργείται ένα σημαντικό πρόβλημα το οποίο μερικές φορές τον αποθαρρύνει από την υιοθέτηση μιας πιο ρεαλιστικής προσέγγισης.

Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο μπορεί να πραγματοποιηθεί η σύνθεση όλων των κριτηρίων ώστε να επιτευχθεί η λήψη ορθολογικών αποφάσεων[10]. Αντίστοιχα, η καινοτομία της «Πολυκριτήριας Ανάλυσης» έγκειται, στην σύνθεση των παραγόντων που επηρεάζουν την επιλογή στρατηγικής σε πολύπλοκα προβλήματα υπό το πρίσμα της πολιτικής λήψης των αποφάσεων που συνειδητά ή ασυνείδητα χρησιμοποιεί ο αποφασίζων.

1.4 ***Μεθοδολογικό Πλαίσιο και Στόχοι της Πολυκριτήριας Ανάλυσης***

Το πολυκριτηριακό πρόβλημα χαρακτηρίζεται από τρεις βασικές παραμέτρους[11]:

[9] Barlow, F.G. 1999, “Excel Models for Business and Operations Management”, John Wiley & Sons, Chichester, Sussex

[10] Σίσκος, Γ. (1998) Γραμμικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.

[11] Κόγκας, Δ., (2007), “Στρατηγικό Επιχειρησιακό Περιβάλλον-Στρατηγική Διοίκηση”, έκδοση Γ. Μπένου, Αθήνα

- Ένα σύνολο εναλλακτικών ενεργειών – δραστηριοτήτων $A=\{\alpha_1, .., \alpha_v\}$. Ο όρος «Εναλλακτικό» (Alternative), αναφέρεται στο αντικείμενο της απόφασης το οποίο πρέπει να είναι πεπερασμένου αριθμού και καλά ορισμένο.
- Μια συνεπή οικογένεια κριτηρίων $F=\{f_1, \ldots, f_v\}$. Κάθε κριτήριο συνιστά μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο Α των εναλλακτικών, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να επιτρέπει την σύγκριση των εναλλακτικών x_1 και x_2 (ως προς μία συγκεκριμένη θέση j) μέσω της χρήσης των αριθμών $f_j(x_1)$ και $f_j(x_2)$.
- Το σύνολο των εκτιμητών των εναλλακτικών ενεργειών ως προς τα κριτήρια. Το τελευταίο αυτό σύνολο, μας δίνεται συνήθως στην μορφή ενός πίνακα (Πολυκριτηριακός Πίνακας), με τις γραμμές να αναφέρονται στα κριτήρια και τις στήλες στις εναλλακτικές ενέργειες.

Η πολυκριτήρια ανάλυση ενδιαφέρεται ιδιαίτερα, όπως είδαμε και παραπάνω, για την εξέταση θεμάτων που αφορούν την ανάλυση αλλά και την μαθηματική αναπαράσταση των προτιμήσεων που διέπουν την πολιτική λήψης αποφάσεων από τη πλευρά αυτού που αποφασίζει. Κύριος και βασικός στόχος της, είναι η παροχή των αναγκαίων πληροφοριών για την υποστήριξη της διαδικασίας λήψης των αποφάσεων, συμβάλλοντας στον εντοπισμό των βασικών χαρακτηριστικών του εξεταζόμενου προβλήματος και των ιδιαιτεροτήτων των διαθέσιμων εναλλακτικών λύσεων. Η Πολυκριτήρια Ανάλυση όμως, έχει τους ακόλουθους, εξίσου, σημαντικούς στόχους[12]:

1. Την ανάλυση της ανταγωνιστικής φύσης των κριτηρίων.
2. Τη μοντελοποίηση των προτιμήσεων του αποφασίζοντος.
3. Τον εντοπισμό ικανοποιητικών – βέλτιστων λύσεων.

Για την επίτευξη αυτών των στόχων ο Roy, το 1996, πρότεινε ένα γενικό μεθοδολογικό πλαίσιο επίλυσης σύνθετων προβλημάτων, το οποίο αποτελείται από τέσσερα βασικά στάδια τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Αυτό το μεθοδολογικό μοντέλο, χαρακτηρίζει απόλυτα τη δομή όλων των διαφορετικών πολυκριτήριων μεθοδολογικών προσεγγίσεων.

[12] Barlow, F.G. 1999, “Excel Models for Business and Operations Management”, John Wiley & Sons, Chichester, Sussex

Τα τέσσερα στάδια του πλαισίου αυτού παρουσιάζεται γραφικά παρακάτω στο Σχήμα 1.1

[Σχήμα 1.1]

- **<u>Το αντικείμενο της απόφασης:</u>**

Το πρώτο αυτό στάδιο του μεθοδολογικού πλαισίου της ΠΑ, αφορά τον καθορισμό του συνόλου των εναλλακτικών δραστηριοτήτων και της προβληματικής της ανάλυσης.

Ως «εναλλακτική δραστηριότητα» ή απλά «εναλλακτική» (alternative ή action), ορίζεται κάθε πιθανή επιλογή η οποία αποτελεί λύση του εξεταζόμενου προβλήματος και πρέπει να αξιολογηθεί ως προς την καταλληλότητά της. Το σύνολο των εναλλακτικών δραστηριοτήτων μπορεί να προσδιοριστεί είτε ως ένα διακριτό σύνολο (discrete set), είτε ως ένα συνεχές σύνολο (continuous set).

Σε διακριτό σύνολο, είναι δυνατή η εξαντλητική (πλήρης) καταγραφή όλων των εναλλακτικών δραστηριοτήτων. Για παράδειγμα, κατά την επιλογή της κατάλληλης τοποθεσίας για τη χωροθέτηση ενός νέου εργοστασίου, είναι δυνατή η πλήρης καταγραφή όλων των δυνατών επιλογών (τοποθεσίες). Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή το σύνολο των εναλλακτικών δραστηριοτήτων είναι διακριτό.

Αντίθετα, στην περίπτωση ενός συνεχούς συνόλου εναλλακτικών δραστηριοτήτων, η εξαντλητική καταγραφή όλων των εναλλακτικών δεν είναι δυνατή. Για παράδειγμα, κατά την κατανομή ενός διαθέσιμου κεφαλαίου σε διάφορες επενδύσεις, δεν είναι δυνατή η εξαντλητική καταγραφή όλων των πιθανών συνδυασμών που αφορούν την κατανομή του κεφαλαίου, ακόμα και εάν το πλήθος των εναλλακτικών επενδύσεων είναι μικρό. Στην περίπτωση αυτή, το σύνολο των εναλλακτικών δραστηριοτήτων (συνεχές σύνολο), προσδιορίζεται από το σύνολο των περιορισμών του προβλήματος.

Μετά τον προσδιορισμό του συνόλου των εναλλακτικών δραστηριοτήτων, απαιτείται ο καθορισμός της προβληματικής της ανάλυσης (decision problematic). Γενικά, υπάρχουν τέσσερις προβληματικές που καλύπτουν το σύνολο των πρακτικών περιπτώσεων:

1. Προβληματική α (επιλογή, choice):

- Η προβληματική τύπου α αναφέρεται στην επιλογή μίας ή περισσότερων εναλλακτικών οι οποίες θεωρούνται ως οι πλέον κατάλληλες.

Για παράδειγμα, κατά την χωροθέτηση ενός εργοστασίου η προβληματική αφορά την επιλογή της πλέον κατάλληλης τοποθεσίας.

2. Προβληματική β (ταξινόμηση, classification/sorting):

- Η προβληματική τύπου β αναφέρεται στην ταξινόμηση των εναλλακτικών δραστηριοτήτων σε προκαθορισμένες ομοιογενείς κατηγορίες.

Για παράδειγμα, κατά την αξιολόγηση μιας αίτησης δανειοδότησης το αντικείμενο της ανάλυσης αφορά την αξιολόγηση του αιτούνται (επιχείρηση ή ιδιώτη) και την ταξινόμησή του είτε στην κατηγορία των αποδεκτών αιτήσεων είτε στην κατηγορία των απορριπτέων αιτήσεων.

3. Προβληματική γ (κατάταξη, ranking):

- Η προβληματική τύπου γ αναφέρεται στην κατάταξη των εναλλακτικών δραστηριοτήτων από τις καλύτερες προς τις χειρότερες.

Για παράδειγμα, κατά εισαγωγή των μαθητών σε μια πανεπιστημιακή σχολή απαιτείται η κατάταξή τους βάσει της βαθμολογίας τους στις εισαγωγικές εξετάσεις.

4. Προβληματική δ (περιγραφή, description):

® Η προβληματική τύπου δ αναφέρεται στην περιγραφή των εναλλακτικών δραστηριοτήτων βάσει των επιδόσεών τους στα επιμέρους κριτήρια αξιολόγησης.

Η επιλογή της κατάλληλης προβληματικής σχετίζεται αποκλειστικά και μόνο με το πρόβλημα που εξετάζεται. Επιπλέον, σε ορισμένες περιπτώσεις πιθανόν να απαιτείται ο συνδυασμός δύο προβληματικών για την καλύτερη αντιμετώπιση του προβλήματος.

¨ **<u>Συνεπής οικογένεια κριτηρίων</u>**

Στο δεύτερο στάδιο της διαδικασίας καθορίζεται μια συνεπής οικογένεια κριτηρίων (consistent family of criteria). Ως κριτήριο, θεωρείται μια μονότονη συνάρτηση x , δηλωτική των προτιμήσεων του αποφασίζοντος, τέτοια ώστε για κάθε δύο εναλλακτικές $\mathbf{x}'$ και $\mathbf{x}''$ να ισχύει:

$$x' > x'' \quad \Leftrightarrow \quad x' \mathrm{P}\, x''$$

$$x' = x'' \quad \Leftrightarrow \quad x' \mathrm{I}\, x''$$

<u>Όπου:</u>

- x' και x'' , είναι οι επιδόσεις των εναλλακτικών $\mathbf{x}'$ και $\mathbf{x}''$ στο κριτήριο x ,
- P και I , είναι αντίστοιχα οι σχέσεις προτίμησης και αδιαφορίας οριζόμενες έτσι ώστε:

  · $\mathbf{x}'$ P $\mathbf{x}''$ ⇔ η εναλλακτική $\mathbf{x}'$ προτιμάται της $\mathbf{x}''$ (προτίμηση)

  · $\mathbf{x}'$ I $\mathbf{x}''$ ⇔ οι εναλλακτικές $\mathbf{x}'$ και $\mathbf{x}''$ είναι ισοδύναμες (αδιαφορία)

Για τη λήξη ορθολογικών αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια, θα πρέπει να διασφαλιστεί ότι το σύνολο των εξεταζόμενων κριτηρίων διαμορφώνει μια συνεπή οικογένεια κριτηρίων.

Ένα σύνολο κριτηρίων (x_1, x_2, …, x_n), θεωρείται ότι διαμορφώνει μια συνεπή οικογένεια κριτηρίων εάν και μόνο εάν, διαθέτει τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

<u>1. Μονοτονία (monotonicity):</u>

® Ένα σύνολο κριτηρίων θεωρείται ότι διαθέτει την ιδιότητα της μονοτονίας εάν και μόνο εάν, για οποιεσδήποτε δύο εναλλακτικές *x*’ και *x*’’ τέτοιες ώστε

x_i ' > x_i '' για κάποιο κριτήριο x_i *και* x_j ' = x_j '' για όλα τα υπόλοιπα κριτήρια x_j *(j≠ i)*, συμπεραίνεται ότι x′ P x″ .

2. Επάρκεια (exhaustivity):

® Ένα σύνολο κριτηρίων θεωρείται ότι διαθέτει την ιδιότητα της επάρκειας εάν και μόνο εάν, για οποιεσδήποτε δύο εναλλακτικές *x*' και *x*'' τέτοιες ώστε x_i ' = x_i '' για όλα τα κριτήρια x_i , συμπεραίνεται ότι x′ I x″ .

3. Μη πλεονασμός (non-redundancy):

® Ένα σύνολο κριτηρίων θεωρείται ότι διαθέτει την ιδιότητα του μη πλεονασμού εάν και μόνο εάν, η διαγραφή ενός οποιουδήποτε κριτηρίου x_i , οδηγεί σε παραβίαση των ιδιοτήτων της μονοτονίας ή της επάρκειας.

Σημειώνεται ότι σε πολλές περιπτώσεις η αξιολόγηση των εναλλακτικών δραστηριοτήτων απαιτεί την ανάλυση παραγόντων που δεν ακολουθούν την ιδιότητα της μονοτονία όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω. Για παράδειγμα ο παράγοντας «κόστος» προσδιορίζει μια αρνητική κατάταξη των εναλλακτικών, υπό την έννοια ότι υψηλότερο κόστος υποδεικνύει χειρότερες εναλλακτικές.

Στην περίπτωση αυτή μια απλή αλλαγή του προσήμου αρκεί για την μετατροπή τέτοιων παραγόντων σε μονότονα κριτήρια σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό της μονοτονίας. Επίσης συχνά χρησιμοποιούνται παράγοντες όπου η μονοτονία των οποίων, εμφανίζει μια πιο περίπλοκη δομή. Για παράδειγμα, κατά την αξιολόγηση της ποιότητας ενός εργασιακού χώρου, ο παράγοντας «θερμοκρασία» δεν παρουσιάζει ξεκάθαρη μονοτονία, στη λογική ότι υψηλότερη ή χαμηλότερη θερμοκρασία υποδηλώνει υψηλότερη ποιότητα. Σε αυτή την περίπτωση, απαιτείται μια πιο σύνθετη μοντελοποίηση.

¨ **Μοντέλο ολικής προτίμησης**

Μετά την ολοκλήρωση των δύο προηγούμενων σταδίων της ανάλυσης (αντικείμενο του προβλήματος, διαμόρφωση συνεπούς οικογένειας κριτηρίων), το επόμενο στάδιο αφορά την κατασκευή και χρησιμοποίηση ενός μοντέλου ολικής προτίμησης (global evaluation model).

Ως μοντέλο ολικής προτίμησης, θεωρείται η σύνθεση όλων των κριτηρίων έτσι ώστε να επιτευχθεί ο στόχος της ανάλυσης, ανάλογα με την προβληματική που έχει καθοριστεί.

Το μοντέλο ολικής προτίμησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για:

1. Τον προσδιορισμό μιας συνολικής αξιολόγησης κάθε εναλλακτικής.
2. Την πραγματοποίηση διμερών συγκρίσεων μεταξύ των εναλλακτικών.
3. Τη διερεύνηση του συνόλου των εναλλακτικών λύσεων, όταν αυτό είναι συνεχές.

Η ανάπτυξη του μοντέλου ολικής προτίμησης μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους:

1. ***Αλληλεπιδραστικά μέσω της συνεργασίας του αναλυτή με τον αποφασίζοντα.*** Στην προσέγγιση αυτή ο αποφασίζοντας καθορίζει ένα σύνολο παραμέτρων σχετικών με την πολιτική λήψης των αποφάσεων που ακολουθεί (για παράδειγμα, τα βάρη των κριτηρίων).

2. ***Αναλύοντας τις αποφάσεις που λαμβάνει ο αποφασίζων έτσι ώστε να αναπτυχθεί το κατάλληλο μοντέλο ολικής προτίμησης που είναι συμβατό με την πολιτική λήψης των αποφάσεων που ακολουθεί ο αποφασίζων.*** Η προσέγγιση αυτή έχει αρκετές ομοιότητες με τη μεθοδολογία της παλινδρόμησης η οποία είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη στο χώρο της στατιστικής.

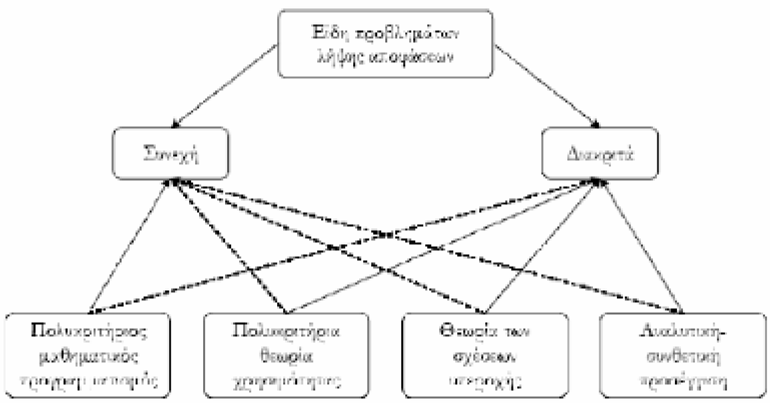
¨ **Υποστήριξη της απόφασης**

Σ’αυτό το στάδιο της διαδικασίας λήψης αποφάσεων, πραγματοποιούνται όλες εκείνες οι εργασίες, που θα βοηθήσουν τον αποφασίζοντα να κατανοήσει τα αποτελέσματα του υποδείγματος, καθώς και τη διαδικασία διεξαγωγής αυτών, με στόχο την επιτυχής ανάλυση των συμπερασμάτων που θα προκύψουν, προκειμένου να επιλύσει το πρόβλημα.

1.5 Κύρια Θεωρητικά Ρεύματα Πολυκριτήριας Ανάλυσης

Στο χώρο της πολυκριτήριας ανάλυσης, έχουν αναπτυχθεί τις τελευταίες τρεις δεκαετίες διάφορες μεθοδολογίες. Οι μεθοδολογίες αυτές μπορούν να χωριστούν σε διάφορες κατηγορίες ανάλογα με τη μορφή του μοντέλου ολικής προτίμησης που χρησιμοποιούν, αλλά και τη διαδικασία ανάπτυξης του μοντέλου. Βάσει αυτής της θεώρησης, οι Pardalos et Al. (1995) πρότειναν την ακόλουθη κατηγοριοποίηση[13]:

- Πολυκριτήριος μαθηματικός προγρ. (Multiobjective Math. Programming)
- Πολυκριτήρια θεωρία της χρησιμότητας. (Multiattribute Utility Theory)
- Θεωρία των σχέσεων υπεροχής. (Outranking Relations)
- Αναλυτική – Συνθετική προσέγγιση. (Preference Disaggregation Approach)



Οι βασικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις της πολυκριτηριακής ανάλυσης

[Σχήμα 1.2]

---

[13] Κόγκας, Δ., (2007), "Στρατηγικό Επιχειρησιακό Περιβάλλον-Στρατηγική Διοίκηση", έκδοση Γ. Μπένου, Αθήνα

Η πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας, η θεωρία των σχέσεων υπεροχής και η αναλυτική-συνθετική προσέγγιση, προσανατολίζονται προς την αντιμετώπιση διακριτών προβλημάτων λήψης αποφάσεων. Απώτερος στόχος τους είναι, η σύνθεση όλων των κριτηρίων με σκοπό την αξιολόγηση ενός πεπερασμένου συνόλου εναλλακτικών δραστηριοτήτων σύμφωνα με τις προβληματικές της επιλογής, κατάταξης ή ταξινόμησης.

Αντίθετα ο πολυκριτήριος μαθηματικός προγραμματισμός αποτελεί μια γενίκευση της γνωστής θεωρίας του μαθηματικού προγραμματισμού, που αναλύεται παρακάτω, σε περιπτώσεις όπου πρέπει να βελτιστοποιηθούν πολλαπλές αντικειμενικές συναρτήσεις[14].

Αναλυτικότερα αναφέρονται:

® **Πολυκριτήριος Μαθηματικός Προγραμματισμός:**

Ο Πολυκριτηριακός Μαθηματικός Προγραμματισμός (ΠΜΠ), όπως θα δούμε και παρακάτω στο «Κεφάλαιο 3», αποτελεί ουσιαστικά το κοινό υποσύνολο δύο πολύ διαδεδομένων πεδίων της Επιχειρησιακής Έρευνας: του Μαθηματικού Προγραμματισμού (Mathematical Programming) και της Πολυκριτηριακής Λήψης Αποφάσεων (Multiple Criteria Decision Making), η οποία ασχολείται με προβλήματα λήψης απόφασης όπου εμπλέκονται περισσότερα του ενός κριτηρίων απόφασης.

Γραφική απεικόνιση των σχετικών επιστημονικών πεδίων

[14] Clarke T. & Clegg S., (2008), "Changing Paradigms: The Transformation of Management Knowledge for the 21st Century", Profile Books Ltd., London

[Σχήμα 1.3]

Τα προβλήματα ΠΜΠ, ανήκουν στην κατηγορία των προβλημάτων *χαμηλού βαθμού δόμησης* (***ill structured problems***). Είναι δηλαδή προβλήματα όπου η ορθολογική λύση δεν καθορίζεται από το ίδιο το πρόβλημα (όπως στο ΜΠ), αλλά αποτελεί αντικείμενο προοδευτικής αναζήτησης με εμπλοκή του αποφασίζοντα στη διαδικασία αυτή.

® **Πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας**

Η πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας, αποτελεί γενίκευση της κλασσικής θεωρίας χρησιμότητας και έχει ως σκοπό τη μοντελοποίηση αλλά και την αναπαράσταση του συστήματος αξιών που, συνειδητά ή ασυνείδητα, ακολουθεί ο αποφασίζοντας μέσω μιας συνάρτησης αξιών/χρησιμότητας U.

Η συνάρτηση αυτή εκφράζεται βάσει του συνόλου των κριτηρίων αξιολόγησης, τα οποία καθορίζουν το αποτέλεσμα της αξιολόγησης: $U(G) = U(g_1, g_2, \ldots, g_n)$.

Η πλέον συνηθισμένη μορφή συνάρτησης χρησιμότητας που χρησιμοποιείται σε ερευνητικό και πρακτικό επίπεδο είναι η προσθετική:

$$U(G) = \sum_{i=1}^{n} w_i u_i(g_i)$$

Όπου:

- g_i = Τα επιμέρους κριτήρια pi (wi)
- p_i (wi) = Οι βαρύτητες των κριτηρίων
- $u_i(g_i)$ = Επιμέρους συναρτήσεις χρησιμότητας
- U (G) = Συνολική συνάρτηση χρησιμότητας

Η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι άθροισμα γινομένων των συντελεστών στάθμισης των κριτηρίων, με τις συναρτήσεις μερικών χρησιμοτήτων των κριτηρίων αξιολόγησης. Κάθε συνάρτηση μερικής χρησιμότητας $u_i(g_i)$, καθορίζει την αξία/χρησιμότητα των εναλλακτικών βάσει των επιδόσεων τους στο κριτήριο g_i. Ενώ κάθε συντελεστής w_i, υποδεικνύει την παραχώρηση (trade–off), που είναι διατεθειμένος να κάνει ο αποφασίζοντας σε ένα κριτήριο αναφοράς, προκειμένου να πετύχει αύξηση μιας μονάδας στο κριτήριο g_i. Η διαδικασία ανάπτυξης μιας συνάρτησης χρησιμότητας βασίζεται (σχεδόν πάντα) στη συνεργασία ενός ειδικού αναλυτή με τον αποφασίζοντα[15].

Για τον καθορισμό των συναρτήσεων μερικής χρησιμότητας, στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν παρουσιαστεί διάφορες αλληλεπιδραστικές τεχνικές. Οι τεχνικές αυτές προσπαθούν με άμεσο τρόπο και βάσει άλλων ερωτήσεων να «αποσπάσουν» από τον αποφασίζοντα τις πληροφορίες που απαιτούνται, ώστε να καθοριστεί ο τρόπος με τον οποίο αξιολογεί τις εξεταζόμενες εναλλακτικές δραστηριότητες σε κάθε ένα από τα κριτήρια.

Όμως με βάση την *ολική χρησιμότητα* των εναλλακτικών δραστηριοτήτων, όπως αυτή υπολογίζεται μέσω της συνάρτησης χρησιμότητας, ο αποφασίζοντας μπορεί να κατατάξει τις εναλλακτικές δραστηριότητες από τις καλύτερες (εναλλακτικές με την υψηλότερη ολική χρησιμότητα) προς τις χειρότερες (εναλλακτικές με τη χαμηλότερη ολική χρησιμότητα), να τις διαχωρίσει σε κατηγορίες ή να επιλέξει κάποια(ες) από αυτές.

® **<u>Θεωρία των σχέσεων υπεροχής</u>**

Όλες οι τεχνικές οι οποίες βασίζονται στη θεωρία των σχέσεων υπεροχής λειτουργούν σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο πραγματοποιείται η ανάπτυξη μιας σχέσης υπεροχής (Outranking Relation) μεταξύ των εξεταζόμενων εναλλακτικών δραστηριοτήτων, ενώ στο δεύτερο στάδιο πραγματοποιείται η εκμετάλλευση της σχέσης υπεροχής, ώστε να εξαχθεί το αποτέλεσμα της αξιολόγησης των εναλλακτικών δραστηριοτήτων υπό την επιθυμητή μορφή (κατάταξη, ταξινόμηση, επιλογή, περιγραφή).

Κοινό στοιχείο των δύο αυτών σταδίων και βασική έννοια του συγκεκριμένου μεθοδολογικού ρεύματος της πολυκριτήριας ανάλυσης, αποτελεί η έννοια της σχέσης υπεροχής. Η σχέση υπεροχής είναι μια διμερής σχέση, η οποία επιτρέπει την εκτίμηση της ισχύος της υπεροχής μιας εναλλακτικής δραστηριότητας “x” έναντι

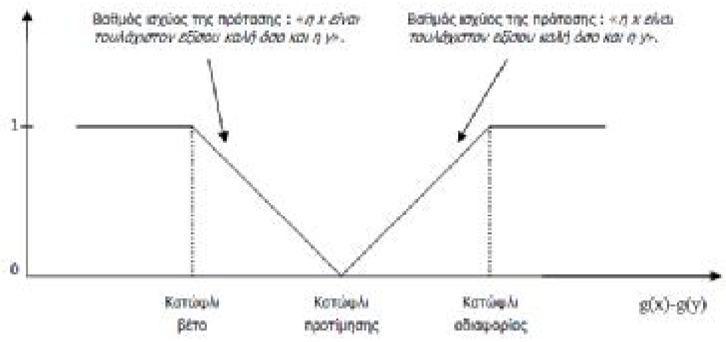
[15] Barlow, F.G. 1999, “Excel Models for Business and Operations Management”, John Wiley & Sons, Chichester, Sussex

μιας άλλης εναλλακτικής δραστηριότητας “y”. Η ισχύς αυτή αυξάνει όσο περισσότερες είναι οι ενδείξεις υπέρ της υπεροχής της εναλλακτικής δραστηριότητας “x” (συμφωνία των κριτηρίων), χωρίς παράλληλα να υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις που να αναιρούν την ισχύ της υπεροχής (ασυμφωνία των κριτηρίων).

Όπως και στην περίπτωση της πολυκριτήριας θεωρίας χρησιμότητας, η ανάπτυξη της σχέσης υπεροχής βασίζεται σε πληροφορίες που παρέχει ο ίδιος ο αποφασίζοντας. Οι πληροφορίες αυτές, στη πλειοψηφία τους αφορούν[16]:

- Τα βάρη (σημαντικότητα) των κριτηρίων αξιολόγησης.
- Τα κατώφλια προτίμησης, αδιαφορίας και βέτο (preference, indifference, veto).

Η χρήση αυτών συμβάλλει στην ανάπτυξη μιας ασαφούς σχέσης υπεροχής (fuzzy outranking relation), η οποία αποδίδεται γραφικά ως εξής:



Γραφική αναπαράσταση της ασαφούς σχέσης υπεροχής με τη χρήση των κατωφλιών προτίμησης και αδιαφορίας.

[Σχήμα 1.4]

Στην ομάδα αυτή ανήκουν οι οικογένειες των μεθόδων **PROMETHEE** και **ELECTRE,** όπου οι δύο αυτές μέθοδοι σε διάφορες παραλλαγές τους, χρησιμοποιούνται για την αντιμετώπιση διαφόρων μορφών προβλημάτων που αφορούν την αξιολόγηση ενός πεπερασμένου συνόλου εναλλακτικών δραστηριοτήτων.

---

[16] Οικονόμου, Γ.Σ., και Γεωργίου, Α.Κ. (1999) “Ποσοτική Ανάλυση για τη Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων”, Εκδόσεις Ευγ. Μπένου, Αθήνα.

® **Αναλυτική – Συνθετική προσέγγιση**

Η πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας και η θεωρία των σχέσεων υπεροχής, δίνουν ιδιαίτερο βάρος στη μοντελοποίηση και αναπαράσταση του συστήματος αξιών και προτιμήσεων του αποφασίζοντα μέσω μιας προκαθορισμένης μαθηματικής μορφής (συνάρτηση χρησιμότητας ή σχέση υπεροχής). Αντίθετα, η Αναλυτική-Συνθετική προσέγγιση προσανατολίζεται στην ανάπτυξη ενός μεθοδολογικού πλαισίου, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση των αποφάσεων που λαμβάνει ο αποφασίζοντας, έτσι ώστε να καθοριστεί το κατάλληλο υπόδειγμα σύνθεσης των κριτηρίων που λαμβάνει ο ίδιος, για να καθοριστεί το κατάλληλο υπόδειγμα σύνθεσης των κριτηρίων το οποίο ανταποκρίνεται στο σύστημα αξιών και προτιμήσεών του.

Πιο συγκεκριμένα, τόσο η θεωρία χρησιμότητας όσο και η θεωρία των σχέσεων υπεροχής, έχουν ως σκοπό την υποστήριξη του αποφασίζοντα στη σύνθεση των κριτηρίων αξιολόγησης, μέσω ενός προκαθορισμένου υποδείγματος το οποίο έχει τη μορφή μιας συνάρτησης χρησιμότητας ή μιας σχέσης υπεροχής. Αυτή είναι μία εμπρόσθια διαδικασία (forward), ενώ η αναλυτική – συνθετική προσέγγιση ακολουθεί μια ανάστροφη διαδικασία (backward). Θεωρεί δηλαδή ότι ο αποφασίζων (έστω και υποσυνείδητα) ένα σύστημα αξιών και προτιμήσεων, το οποίο οδηγεί στις αποφάσεις που λαμβάνει.

Πρακτικά, η αναλυτική – συνθετική προσέγγιση χρησιμοποίει μια διαδικασία, ανάλογη της γνωστής στατιστικής παλινδρόμησης και προσπαθεί να εντοπίσει τον τρόπο με τον οποίο λαμβάνονται οι αποφάσεις μέσω της ανάλυσης της σχέσης μεταξύ των αποφάσεων και των επιδόσεων των εναλλακτικών δραστηριοτήτων στ κριτήρια αξιολόγησης, όπου αυτό τελικά το αναπτυσσόμενο υπόδειγμα θα αναπαράγει τις επιλογές του αποφασίζοντα με τον πλέον πιστό τρόπο.

1.6 Εφαρμογή Πολυκριτήριας Ανάλυσης

Αποτελεί γεγονός πως η επιλογή βιομηχανικού λογισμικού αποτελεί μια σημαντική απόφαση που απασχολεί τις περισσότερες επιχειρήσεις που πραγματοποιούν την υλοποίηση σχεδίων αναδιάρθρωσης των δόμων τους και ανασχεδιασμού των διαδικασιών τους ή άπλα, εκσυγχρονίζουν την υποδομή τους σε πληροφοριακά συστήματα[17]. Η προμήθεια και υλοποίηση του καταλληλότερου πληροφοριακού συστήματος που μπορεί να υποστηρίξει αυτά τα σχεδία, αποτελεί κρίσιμο παράγοντα για την επιτυχίας τους.

Το θέμα της επιλογής βιομηχανικού λογισμικού έχει απασχολήσει σε διεθνές επίπεδο, τόσο τους πανεπιστημιακούς ερευνητές, όσο και τα στελέχη των επιχειρήσεων. Οι περισσότερες προτεινόμενες προσεγγίσεις αποτελούν παραλλαγές της πολυκριτήριας ανάλυσης που προσπαθούν να προσδιορίσουν την τελική αξία της κάθε διαθέσιμης επιλογής, με βάση επιλεγμένα κριτήρια. Η δυσκολία υιοθέτησης πολύπλοκων μαθηματικών μοντέλων, ιδιαίτερα απαιτητικών σε δεδομένα, από τις επιχειρήσεις, οδήγησε αρκετούς στην ανάπτυξη μοντέλων λιγότερο προηγμένων από θεωρητικής πλευράς, αλλά ευκολότερης και τελικώς, αποτελεσματικότερης, πρακτικής εφαρμογής. Οπότε, η επιλογή του κατάλληλου λογισμικού (software selection), για την πραγματοποίηση συγκεκριμένων επιχειρησιακών λειτουργιών, είναι το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό από μία σειρά προβλημάτων που χαρακτηρίζονται ως «αξιολόγηση λογισμικού» (software evaluation)[18]. Τα τελευταία χρόνια παρουσιάζεται αρκετή ερευνητική προσπάθεια προς την κατεύθυνση της αξιολόγηση λογισμικού, όσον αφορά συγκεκριμένες πτυχές του προβλήματος, όπως είναι για παράδειγμα η ποιότητα του λογισμικού ή η διαδικασία ανάπτυξης/ παραμετροποίησής του.

[17] Σίσκος, Γ. (1998) Γραμμικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.

[18] Κόγκας, Δ., (2007), "Στρατηγικό Επιχειρησιακό Περιβάλλον-Στρατηγική Διοίκηση", έκδοση Γ. Μπένου, Αθήνα

Σύμφωνα με ορισμένες τυπικές περιπτώσεις αποφάσεων που σχετίζονται με την αξιολόγηση λογισμικού, αυτές είναι οι ακόλουθες:

- Διατήρηση υφιστάμενης εφαρμογής λογισμικού ή αντικατάσταση της
- Αγορά εφαρμογής λογισμικού ή ανάπτυξή της
- Αξιολόγηση εμπορικών πακέτων λογισμικού
- Διενέργεια διαγωνισμών για την αγορά λογισμικού
- Κατηγοριοποίηση λογισμικού
- Αξιολόγηση της χρήσης λογισμικού

Το πρόβλημα της αξιολόγησης λογισμικού είναι μια ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία, με πολλά διαφορετικά και συχνά αντιφατικά κριτήρια που θα πρέπει να συνυπολογιστούν, προκειμένου να ληφθεί η τελική απόφαση. Προς την κατεύθυνση της υποστήριξης παρόμοιων αποφάσεων όπου θα πρέπει να συνεκτιμηθεί ένας μεγάλος αριθμός σημαντικών κριτηρίων, έχει αποδειχθεί πολύ χρήσιμη η συνεισφορά της Πολυκριτήριας Ανάλυσης ή Πολυκριτήριας Υποστήριξης των που είναι γνωστή στη βιβλιογραφία με το ακρωνύμιο MCDA[19].

1.7 ***Πλεονεκτήματα της χρήσης Πολυκριτήριας Ανάλυσης στην Ομαδική Λήψη Αποφάσεων***

Η ομαδική λήψη αποφάσεων οδηγεί στην αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση των προβλημάτων απόφασης. Κατά την διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος οι αποφασίζοντες εκφράζουν τις απόψεις τους, συνεισφέρουν στην πρόταση νέων εναλλακτικών δραστηριοτήτων και στον καθορισμό των κριτηρίων αξιολόγησης. Όπως αναφέρεται στο κεφάλαιο 1, η πορεία της διαδικασίας και το τελικό αποτέλεσμα επηρεάζεται από μια πληθώρα παραγόντων που οφείλονται σε ατομικές συμπεριφορές, στις δυνάμεις επιρροής ή στις εξαρτήσεις μεταξύ των μελών της

[19] Barlow, F.G. 1999, “Excel Models for Business and Operations Management”, John Wiley & Sons, Chichester, Sussex

ομάδας, στις μεθόδους και τις τεχνικές που εφαρμόζονται κ.λπ.. Ένα κρίσιμο σημείο που καθορίζει την τελική απόφαση μιας ομάδας είναι ο τρόπος που θα γίνει η σύνθεση των προτιμήσεων των αποφασιζόντων.

Η πολυκριτήρια ανάλυση και οι μέθοδοι που προτείνει στοχεύουν στην υποστήριξη των διαδικασιών λήψης απόφασης και στην εξάλειψη των προβληματικών σημείων που παρατηρούνται τόσο σε ατομικό όσο και σε ομαδικό επίπεδο. Πιο συγκεκριμένα, η πολυκριτήρια ανάλυση χρησιμοποιείται πλέον ευρύτατα κατά την λήψη αποφάσεων, τόσο σε ατομικό όσο και σε ομαδικό επίπεδο, καθώς προσφέρει τα εξής πλεονεκτήματα:

(1) Λαμβάνει υπόψη το σύστημα αξιών του κάθε αποφασίζοντα. Αυτό είναι και το ουσιαστικότερο πλεονέκτημα έναντι άλλων μεθόδων. Η σύνθεση των προτιμήσεων κάθε μέλους της ομάδας γίνεται με τον πλέον ορθό τρόπο.

(2) Αυξάνει τον βαθμό συμμετοχής κάθε αποφασίζοντα στην ομάδα και δίνει κίνητρα για μεγαλύτερη ενεργοποίηση, αφού χρησιμοποιεί σαφείς και διαφανείς διαδικασίες αλλά και λόγω της παρατήρησης (1).

(3) Η τελική απόφαση γίνεται αποδεκτή από όλους με μεγαλύτερη ευκολία, εφόσον οι απόψεις όλων εκφράστηκαν το ίδιο αποτελεσματικά και είχαν όλοι ίση αντιμετώπιση.

(4) Κατά την υλοποίηση μιας πολυκριτήριας μεθόδου έχει διαπιστωθεί [Sykara, 1991] ότι τα μέλη της ομάδας αναπτύσσουν νέους στόχους.

(5) Όταν τα μέλη καλούνται να δώσουν τα κριτήρια τους -που στην ουσία είναι οι συνέπειες- για μια εναλλακτική δράση, τα υπόλοιπα μέλη επαναπροσδιορίζουν τις θέσεις τους και αυτό βελτιώνει και κάνει πιο αποτελεσματική την αντιμετώπιση του προβλήματος.

(6) Η συζήτηση της αξιολόγησης εναλλακτικών δραστηριοτήτων και κριτηρίων βοηθά κάθε μέλος της ομάδας να κατανοήσει τις προτιμήσεις των υπολοίπων μελών και να διευρύνει την αντίληψη του σχετικά με το πρόβλημα που αντιμετωπίζεται.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό της πολυκριτήριας λήψης αποφάσεων είναι ότι δίνεται ιδιαίτερη σημασία στην κρίση της ομάδας των αποφασιζόντων σε όλα τα στάδια της διαδικασίας: στην επιλογή των αντικειμενικών στόχων και των κριτηρίων, στον υπολογισμό των σχετικών βαρών των κριτηρίων, των διαβαθμίσεων της επίδοσης σε κάθε κριτήριο και τέλος, στην επίδοση κάθε εναλλακτικής δραστηριότητας σε κάθε κριτήριο. Η υποκειμενικότητα της κρίσης κάθε αποφασίζοντα είναι ένας παράγοντας που δεν μπορεί να αγνοηθεί. Οι [Henig και Buchanan, 1996] διατύπωσαν την αυξημένη ανάγκη για αντικειμενικότητα στην πολυκριτήρια ανάλυση. Οι [Kersten και Noronha, 1996] παρατήρησαν ότι είναι προτιμότερο η μοντελοποίηση να αποτελεί τη βάση για την λήψη αποφάσεων και όχι το αντίστροφο. Ωστόσο, η δυνατότητα που δίνεται σε κάθε αποφασίζοντα να ελέγχει και να δίνει τα δικά του δεδομένα σε κάθε στάδιο της διαδικασίας επιλογής της εναλλακτικής, καθιστά τις μεθόδους της πολυκριτήριας ανάλυσης ως τις πιο δημοφιλείς και αποδεκτές.

(7) Η ποικιλία των πολυκριτήριων μεθόδων που έχουν διατυπωθεί δίνει στα μέλη της ομάδας τη δυνατότητα να επιλέξουν την καταλληλότερη ανάλογα με τις ανάγκες του προβλήματος που αντιμετωπίζουν.

(8) Μια ομάδα μπορεί να κυμαίνεται από συνεργατική, όταν τα μέλη έχουν παρόμοιες τοποθετήσεις και στόχους, μέχρι ανταγωνιστικές όπου τα μέλη έχουν διαμετρικά αντίθετες θέσεις και απόψεις. Ο [Noori, 1995] αναφέρει ότι, πρακτικά σκεπτόμενοι, θα διαπιστώσουμε ότι οι αντιτιθέμενοι στόχοι που συχνά έχουν τα μέλη μιας ομάδας οφείλονται σε προσωπικές διαφορές και ασυμβίβαστους στόχους.

Ακόμα και όταν έχουμε να κάνουμε με μια ομάδα συνεργατική, είναι πιθανό και αναμενόμενο να παρουσιαστούν αντιπαραθέσεις [Poole et al. 1991]. Αν τα μέλη της ομάδας έχουν αντίθετες απόψεις χρειάζεται μια μέθοδος συγκερασμού των προτιμήσεων και εξομάλυνσης των διαφορών προκειμένου να υπάρξει ικανοποιητικό αποτέλεσμα. Οι πολυκριτήριες μέθοδοι παρέχουν ένα συνεπές μεθοδολογικό πλαίσιο που βοηθά στην σύνθεση των προτιμήσεων των αποφασιζόντων σε μια τελική ομαδική απόφαση.

Οι μέθοδοι πολυκριτήριας ανάλυσης δίνουν την δυνατότητα να αντιμετωπισθούν και να εξομαλυνθούν οι διαπροσωπικές αντιπαραθέσεις προκειμένου τα μέλη της ομάδας να επιτύχουν την κοινή συναίνεση (consensus). Οι [Bui και Jarke, 1986] υποστηρίζουν ότι οι πολυκριτήριες μέθοδοι λήψης απόφασης προσφέρουν ένα κομψό πλαίσιο που διευκολύνει τρεις βασικές διαδικασίες της ομαδικής λήψης αποφάσεων: (1) παρουσίαση πολλών απόψεων του προβλήματος, (2) σύνθεση των προτιμήσεων των αποφασιζόντων βασισμένη σε κανόνες (group norms), και (3) οργάνωση της διαδικασίας απόφασης. Οι πολυκριτήριες μέθοδοι παρέχουν ένα απλό αλλά δομημένο πλαίσιο ελέγχου της διαδικασίας λήψης αποφάσεων και ταυτόχρονα η σαφήνεια των αποτελεσμάτων που παράγονται από τις μεθόδους διευκολύνουν την επικοινωνία, τον συντονισμό και την σύνθεση των ατομικών απόψεων κατά την διαδικασία της ομαδικής λήψης αποφάσεων [Bui, 1987]. Ο [Jarke, 1986] διατυπώνει ότι οι πολυκριτήριες μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν εργαλεία για την έκφραση προτιμήσεων, την σύνθεση προτιμήσεων, την διαπραγμάτευση και την διαμεσολάβηση τόσο σε συνεργατικές όσο και σε μη συνεργατικές ομάδες λήψης απόφασης. Η πολυκριτήρια διαδικασία σε ένα σύστημα ομαδικής λήψης απόφασης είναι ένα κρίσιμο μέρος καθώς είναι αυτό που παρέχει το δομημένο και ολοκληρωμένο πλαίσιο για την εκτίμηση των κριτηρίων και των εναλλακτικών δραστηριοτήτων αλλά και την παραγωγή και παρουσίαση της λύσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

2.1 *Ιστορική Αναδρομή*

Παρότι είναι σχετικά νέα επιστήμη, γεννημένη για τις απαιτήσεις του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, τα τελευταία 50 χρόνια, ο γραμμικός προγραμματισμός, γνώρισε τέτοια άνθιση και πρόοδο που μόνο σε κλάδους της πληροφορικής μπορεί κάποιος να διακρίνει. Εξάλλου, ο ίδιος ο "Γραμμικός Προγραμματισμός" αποτελεί τμήμα της Πληροφορικής. Προέκυψε ως ένα μαθηματικό μοντέλο που αναπτύχθηκε προκειμένου να μειώσει το κόστος τους και να αυξήσει τις απώλειες του στρατού για τον εχθρό. Μεταπολεμικά, πολλές βιομηχανίες ανακάλυψαν τη χρήση του στον καθημερινό τους σχεδιασμό. Οι ιδρυτές του θέματος είναι ο Leonid Kantorovich, Ρώσος μαθηματικός που ανέπτυξε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού το 1939, ο George B. Dantzig, ο οποίος δημοσίευσε τη μέθοδο Simplex το 1947, και John Von Neumann, ο οποίος ανέπτυξε τη θεωρία της δυαδικότητας κατά την ίδια χρονική περίοδο[20].

Το γραμμικό πρόβλημα προγραμματισμού παρουσιάστηκε αρχικά να λυθεί από τον Leonid Khachiyan το 1979, αλλά μια μεγαλύτερη θεωρητική και πρακτική λύση ήρθε το 1984, όταν η Narenda Karmarkar εισήγαγε μια νέα μέθοδο για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

2.2 *Γενικά Χαρακτηριστικά Γραμμικού Προγραμματισμού*

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming) αποτελεί χωρίς αμφιβολία το δημοφιλέστερο μοντέλο στο χώρο της επιχειρησιακής έρευνας καθώς και της διοικητικής επιστήμης. Η μεγάλη επιτυχία που είχαν οι εφαρμογές του, σε προβλήματα λήψεις αποφάσεων σε δημόσιες και ιδιωτικές επιχειρήσεις αλλά και σε οργανισμούς, οφείλεται από τη μία πλευρά στα επιτεύγματα της έρευνας μαθηματικών και οικονομολόγων σε θεωρητικό επίπεδο και από την άλλη πλευρά, στη ραγδαία ανάπτυξη της πληροφορικής επιστήμης και τεχνολογίας[21].

---

[20] Οικονόμου, Γ.Σ., και Γεωργίου, Α.Κ. (1999) "Ποσοτική Ανάλυση για τη Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων", Εκδόσεις Ευγ. Μπένου, Αθήνα.

[21] Barlow, F.G. 1999, "Excel Models for Business and Operations Management", John Wiley & Sons, Chichester, Sussex

Είναι ένα μοντέλο που αφορά τη μεγιστοποίηση ή την ελαχιστοποίηση μίας γραμμικής συνάρτησης κάτω από κάποιους γραμμικούς περιορισμούς. Από την οικονομική σκοπιά, ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια τεχνική που ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των περιορισμένων πόρων ενός συστήματος σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Τέλος, θεωρείται μία από τις πιο σπουδαίες μαθηματικές ανακαλύψεις των μέσων χρόνων του εικοστού αιώνα και στις μέρες μας, αποτελεί ένα μοντέλο ευρείας χρήσης για καθημερινά ζητήματα των περισσότερων εμπορικών – βιομηχανικών εταιρειών. Μάλιστα, τα τελευταία χρόνια επικρατεί η αντίληψη ότι, μία στις δύο εφαρμογές μοντέλων επιχειρησιακής έρευνας, σε πραγματικά προβλήματα διοίκησης, παραπέμπουν στον γραμμικό προγραμματισμό[22].

2.3 ***Στόχος και Χρησιμότητα του Γραμμικού Προγραμματισμού***

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια τεχνική που έχει ως στόχο, τη βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) μιας ή περισσοτέρων γραμμικών συναρτήσεων (κριτήρια βελτιστοποίησης) και αγνώστων πραγματικών μεταβλητών, των οποίων το πεδίο τιμών οριοθετείται από γραμμικούς περιορισμούς (ανισοεξισώσεις). Οι άγνωστες μεταβλητές μοντελοποιούν το αντικείμενο απόφασης του προβλήματος και για το λόγο αυτό ονομάζονται μεταβλητές απόφασης[23].

Ο γραμμικός προγραμματισμός αποτελεί ένα σημαντικό πεδίο βελτιστοποίησης για ποικίλους λόγους. Ένας από αυτούς είναι ότι πολλά πρακτικά προβλήματα της επιχειρησιακής έρευνας μπορούν να εκφραστούν ως προβλήματα αυτής της κατηγορίας.

Η επίλυση προβλημάτων μέσω της μεθόδου του γραμμικού προγραμματισμού, χρησιμοποιείται ευρέως στη μικροοικονομία καθώς και στη διαχείριση μίας οποιασδήποτε εταιρείας (όπως στον σχεδιασμός, στην παραγωγή, στην μεταφορά και σε άλλα θέματα). Αν και τα σύγχρονα θέματα διαχείρισης είναι

[22] Κόγκας, Δ., (2007), “Στρατηγικό Επιχειρησιακό Περιβάλλον-Στρατηγική Διοίκηση”, έκδοση Γ. Μπένου, Αθήνα

[23] Senior B. & Fleming J., (2005), “Organizational Change”, Prentice Hall, 3rd edition, London

συνεχώς μεταβαλλόμενα, οι περισσότερες εταιρείες, οι επιχειρησιακοί ερευνητές αλλά και η πλειοψηφία των αναλυτών προβλημάτων απόφασης, χρησιμοποιούν τον γραμμικό προγραμματισμό προκειμένου να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη ή να ελαχιστοποιήσουν το κόστος τους μέσω περιορισμένων πόρων ή μέσων σε ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο[24].

Προβλήματα απόφασης αυτής της μορφής είναι, για παράδειγμα, η κατανομή του εργατικού δυναμικού, τεχνολογικού εξοπλισμού και πρώτων υλών σε διάφορες παραγωγικές διαδικασίες, η κατανομή κεφαλαίου σε διάφορα επενδυτικά προγράμματα κτλ.

2.4 <u>***Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού***</u>

Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού ασχολούνται με καταστάσεις όπου ένας αριθμός πλουτοπαραγωγικών πηγών, όπως άνθρωποι, υλικά, μηχανές και ακίνητα, τα οποία είναι διαθέσιμα, πρέπει να συνδυαστούν για να παραχθούν ένα ή περισσότερα προϊόντα. Στην διαδικασία παραγωγής οι πηγές αυτές υπόκεινται σε περιορισμούς όπως στην συνολική ποσότητα των διαθέσιμων πηγών, τον αριθμό κάθε προϊόντος που παράγεται, και τον αριθμό κάθε προϊόντος που διατίθεται[25]. Σκοπός του γραμμικού προγραμματισμού είναι από όλες τις δυνατές κατανομές των πηγών, να υπολογίσουμε εκείνη ή εκείνες οι οποίες μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν μια αριθμητική ποσότητα όπως το κέρδος ή το κόστος.

2.4.1 <u>***Παραδείγματα προβλημάτων Γ.Π***</u>

« <u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΙΤΗΣ</u>

Ένα από τα κλασικά προβλήματα εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού είναι το πρόβλημα της δίαιτας. Το πρόβλημα θεωρείται ότι παρέχει ένα ελάχιστο κόστος μιας επαρκούς δίαιτας για ένα άτομο να μπορεί να συντηρήσει τον εαυτό του. Δηλαδή ποιος είναι ο φθηνότερος τρόπος σύνθεσης ποικίλων ποσοτήτων από διαθέσιμα τρόφιμα σε μια δίαιτα η οποία μπορεί να ικανοποιεί τις θρεπτικές απαιτήσεις ενός ανθρώπινου οργανισμού.

[24] Σίσκος, Γ. (1998) Γραμμικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.

[25] Barlow, F.G. 1999, “Excel Models for Business and Operations Management”, John Wiley & Sons, Chichester, Sussex

« ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΙΞΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Η γενική διατύπωση αυτού του προβλήματος αφορά τον καθορισμό ποσοτήτων των διαφόρων προϊόντων που πρόκειται να παραχθούν, έτσι ώστε η επιχείρηση να μπορεί να μεγιστοποιήσει το συνολικό της κέρδος. Ως πόροι μπορούμε να θεωρήσουμε τον αριθμό διαθέσιμων ωρών παραγωγής σε κάθε τμήμα, τις διαθέσιμες ανθρωποώρες, τα κεφάλαια της επιχείρησης κ.α

« ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΔΙΑΦΗΜΙΣΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Τα μοντέλα του γραμμικού προγραμματισμού χρησιμοποιούνται στο χώρο της διαφήμισης ως εργαλεία υποστήριξης αποφάσεων για την επίτευξη μιας αποτελεσματικής πολιτικής μέσω της ορθής επιλογής ενός συνδυασμού διαφόρων διαφημιστικών μέσων. Ο βέλτιστος καθορισμός της διαφημιστικής αυτής πολιτικής εξασφαλίζεται με δύο διαφορετικές προσεγγίσεις[26]:

1. Μεγιστοποίηση της διαφημιστικής κάλυψης.
2. Ελαχιστοποίηση κόστους διαφήμισης.

« ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Ο προγραμματισμός της παραγωγής σε βραχυπρόθεσμο ή και σε μακροπρόθεσμο (2-6 μήνες) εξαρτάται από την πρόβλεψη της ζήτησης για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Στόχος του υπεύθυνου παραγωγής είναι η εκπόνηση ενός σχεδίου προκειμένου να υπάρξει το απαιτούμενο παραγωγικό δυναμικό που θα καλύψει την προβλεπόμενη ζήτηση. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της ευχέρειας που έχει ο υπεύθυνος παραγωγής να μεταβάλλει μια ή περισσότερες από τις παρακάτω παραμέτρους:

[26] Barlow, F.G. 1999, “Excel Models for Business and Operations Management”, John Wiley & Sons, Chichester, Sussex

- ® Το ανθρώπινο δυναμικό (αριθμό διαθέσιμων ανθρωποωρών).
- ® Την ανάθεση μέρους της παραγωγής με υπεργολαβία.
- ® Την διατήρηση κατάλληλου ύψους αποθεμάτων (τα οποία μπορούν να καλύψουν τη διαφορά μεταξύ της ζήτησης και της παραγωγής).

2.4.2 Χαρακτηριστικά προβλημάτων Γ.Π

Αν και οι εφαρμογές του Γ.Π ποικίλουν, εν τούτοις όλα τα προβλήματά του έχουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά όπως:

- ® Κάθε πρόβλημα Γ.Π, περιλαμβάνει μια σειρά από «μεταβλητές» που συνήθως αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες που πρέπει να προσδιοριστούν μέσω της επίλυσής του (προβλήματα μεγιστοποίησης / ελαχιστοποίησης).
- ® Σε όλα τα προβλήματα του Γ.Π, αποβλέπουμε στην καλύτερη δυνατή αύξηση του κέρδους ή στην αντίστοιχη μείωση του κόστους.
- ® Το κέρδος ή το κόστος δίνεται από μια γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών που προαναφέραμε την οποία αποκαλούμε «αντικειμενική συνάρτηση».
- ® Σε όλα τα προβλήματα του Γ.Π, είναι απαραίτητο να υπάρχουν οι «περιορισμοί», οι οποίοι θα οριοθετούν τη δυνατότητα της απεριόριστης αύξησης της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης όταν μιλάμε για κέρδος και την απεριόριστη ελάττωσή της όταν μιλάμε για κόστος.
- ® Κάθε πρόβλημα Γ.Π, περιέχει τις εναλλακτικές λύσεις εκ των οποίων θα επιλεγεί η βέλτιστη.

Η διαδικασία επιλογής γίνεται μέσω διαφορετικών αναλογιών με σκοπό να αναδειχτεί η βέλτιστη λύση.

2.4.3 <u>Παραδοχές προβλημάτων Γ.Π</u>

Για την εφαρμογή της μεθοδολογίας του Γ.Π, απαιτούνται ορισμένες παραδοχές σύμφωνα με τις οποίες υποθέτουμε ότι[27]:

® Οι συντελεστές των προσδιορισμών καθώς και οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι σταθεροί και δεν υπόκεινται σε τυχαίες διακυμάνσεις.

® Οι παραπάνω συντελεστές, έχουν αναλογική καθώς και αθροιστική ισχύ (δηλαδή οι περιορισμοί του προβλήματος είναι γραμμικοί).

® Η παραγωγή είναι συνεχής (δηλαδή η παραγωγή οποιασδήποτε ποσότητας είναι ακέραια ή κλασματική).

2.5 <u>Μοντελοποίηση Γραμμικού Προγραμματισμού</u>

Για την εφαρμογή της μεθόδου γραμμικού προγραμματισμού απαιτείται αρχικά η δημιουργία μίας μαθηματικής διατύπωσης του συγκεκριμένου επιχειρησιακού προβλήματος που προσπαθούμε να επιλύσουμε. Η διατύπωση αυτή μπορεί να είναι αρκετά εύκολη ή πολύπλοκη ανάλογα με τη φύση του προβλήματος, όπου η μοντελοποίηση αυτού γίνεται σύμφωνα με τα παρακάτω στάδια[28]:

- **<u>Στάδιο 1^{ο} : Αντικείμενο της απόφασης.</u>**

Στο πρώτο στάδιο της μοντελοποίησης έγκειται ο καθορισμός των μεταβλητών απόφασης. Οι μεταβλητές αυτές οφείλουν να αντανακλούν απόλυτα το ζητούμενο της απόφασης, μέσα από τις ανάγκες του περιβάλλοντος στο οποίο θα παρθεί η απόφαση και σύμφωνα με τις αξίες της κοινωνίας (αναβάθμιση των συνθηκών εργασίας, καθαρό φυσικό περιβάλλον κτλ).

[27] Senior B. & Fleming J., (2005), “Organizational Change”, Prentice Hall, 3rd edition, London

[28] Οικονόμου, Γ.Σ., και Γεωργίου, Α.Κ. (1999) “Ποσοτική Ανάλυση για τη Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων”, Εκδόσεις Ευγ. Μπένου, Αθήνα.

Το αντικείμενο της απόφασης ολοκληρώνεται με τον προσδιορισμό του συνόλου των λύσεων (A= { x Î R' / Ax ≤ b, x ≥ 0 }) μετά από τη διαμόρφωση περιορισμών που είναι γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης. Η τεχνολογία, το περιβάλλον, οι πόροι αλλά και οι προτιμήσεις είναι η κατ' εξοχήν πηγή των έμμεσων επιτρεπτών ορίων μέσα στα οποία υπάρχουν οι τιμές των μεταβλητών απόφασης.

· **Στάδιο 2ο : Κριτήρια απόφασης.**

Στο δεύτερο στάδιο ο αναλυτής του προβλήματος, οφείλει να διαμορφώσει γραμμικές αντικειμενικές συναρτήσεις (των μεταβλητών απόφασης x) σύμφωνα με τους στόχους της επιχείρησης καθώς και τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα (μεγιστοποίηση παραγωγικότητας, ελαχιστοποίηση ρύπανσης του περιβάλλοντος κτλ). Τα κριτήρια αυτά έχουν την εξής μορφή:

ü $[\max]\ f_1(x)= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

ü $[\min]\ g_1(x)= d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_nx_n$

Όπου ο αριθμός n των κριτηρίων και (c_i, d_i) με i= 1,2,3, ... ,n , είναι η μήτρα των συντελεστών των αντικειμενικών συναρτήσεων.

· **Στάδιο 3ο : Μοντέλα απόφασης.**

Το τρίτο στάδιο της διαδικασίας αυτής είναι καθαρά τεχνικό. Ο αναλυτής χρησιμοποιεί μια σειρά από αλγορίθμους και συναφείς τεχνικές για την επίτευξη βέλτιστων λύσεων και τη τεκμηρίωση αυτών. Σε προβλήματα καθαρής βελτιστοποίησης, όταν το κριτήριο είναι ένα και μοναδικό, χρησιμοποιείται ως βασικό εργαλείο επίτευξης βέλτιστης λύσης, ο γνωστός αλγόριθμος Simplex.

Συγκεκριμένα, στις πρακτικές εφαρμογές, ο αναλυτής, οφείλει σε κάθε περίπτωση να επεξεργαστεί σε βάθος τα στοιχεία επίλυσης που του παρέχει η μέθοδος Simplex. Οι τεχνικές αυτές που συμβάλλουν αποτελεσματικά στην ανάλυση είναι οι εξής[29]:

- Ανάπτυξη της λύσης
- Ανάλυση ευαισθησίας
- Παραμετρική ανάλυση
- Ανάλυση ευστάθειας

- **<u>Στάδιο 4ο : Υποστήριξη απόφασης.</u>**

Σε αυτό το στάδιο ο αναλυτής προσπαθεί να πείσει τον αποφασίζοντα για την «αξία» μιας λύσης. Σε περίπτωση που η λύση και οι επιπτώσεις της στο περιβάλλον που θα παρθεί η απόφαση δεν ικανοποιούν τον αποφασίζοντα, θα πρέπει να αναθεωρηθεί ένας ή περισσότεροι από τους παράγοντες:

- Τεχνολογία (ανακαίνιση τεχνολογικού εξοπλισμού,..)
- Περιβάλλον (βελτίωση συνθηκών εργασίας,..)
- Πόροι (αύξηση προϋπολογισμού, νέες προμήθειες πρώτων υλών,..)
- Προτιμήσεις (αλλαγή πολιτικής: προσθήκη νέων αντικειμενικών συναρτήσεων,..)

[29] Clarke T. & Clegg S., (2008), "Changing Paradigms: The Transformation of Management Knowledge for the 21st Century", Profile Books Ltd., London

2.6 *Γραφική Επίλυση Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού*

Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που περιέχουν 2 ή 3 μεταβλητές απόφασης, μπορούν να λυθούν και γραφικά. Προβλήματα με δύο μεταβλητές υλοποιούνται στο επίπεδο (δύο διαστάσεις), ενώ προβλήματα με τρείς μεταβλητέ υλοποιούνται στον χώρο (τρείς διαστάσεις). Προκειμένου να λυθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με τη γραφική μέθοδο, πρέπει να ακολουθηθεί η παρακάτω διαδικασία[30]:

a. Εύρεση των σημείων από τους περιορισμούς.

b. Σχεδιασμός όλων των περιορισμών γραφικά.

c. Σκιαγράφηση εφικτής περιοχής.

d. Εύρεση άριστης – βέλτιστης λύσης.

e. Το τελευταίο βήμα υλοποιείται με δυο τρόπους προσέγγισης της επίλυσης:

   i. Η προσέγγιση της απαρίθμησης και ελέγχου όλων των ακραίων σημείων (κορυφών) της εφικτής περιοχής. Εντοπίζουμε τις συντεταγμένες όλων των κορυφών της εφικτής περιοχής και επιλέγουμε εκείνη που μεγιστοποιεί (ή ελαχιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση.

   ii. Η προσέγγιση της χάραξης των καμπυλών ίσου κέρδους (ή κόστους) της αντικειμενικής συνάρτησης. Βρίσκουμε το σημείο όπου η καμπύλη εφάπτεται της εφικτής περιοχής πριν την εγκαταλείψει.

2.6.1 *Ορισμοί που Χρησιμοποιούνται στην Γραφική Επίλυση*

. **Περιοριστική ευθεία:**

Είναι η ευθεία που αντιστοιχεί σε κάποιο περιορισμό του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

---

[30] Κόγκας, Δ., (2007), "Στρατηγικό Επιχειρησιακό Περιβάλλον-Στρατηγική Διοίκηση", έκδοση Γ. Μπένου, Αθήνα

- **Κορυφή ή ακραίο σημείο:**

Είναι το σημείο που τέμνονται δυο περιοριστικές ευθείες.

- **Εφικτή περιοχή:**

Είναι η κυρτή περιοχή των εφικτών λύσεων που σχηματίζεται από τις περιοριστικές ευθείες.

- **Εφικτή λύση (ακραίου σημείου):**

Είναι μια κορυφή της εφικτής περιοχής.

- **Γειτονικές εφικτές λύσεις (ακραίου σημείου):**

Είναι αυτές που συνδέονται με μια ακμή (σύνορο) της εφικτής περιοχής.

- **Βασική λύση (λύση ακραίου σημείου):**

Είναι μια λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή.

- **Βασική εφικτή λύση:**

Είναι μια βασική λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή της εφικτής περιοχής.

- **Άριστη (βέλτιστη) λύση:**

Είναι η βασική εφικτή λύση ακραίου σημείου (κορυφή της εφικτής περιοχής) που μας δίνει τη βέλτιστη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Δύναται να είναι ακριβώς μια, αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις με άπειρες άριστες λύσεις, καμία άριστη λύση, ή η αντικειμενική συνάρτηση να τείνει στο άπειρο.

2.7 Συνθήκες Εφαρμογής και Τυπολογία Μοντέλων Γραμμικού Προγραμματισμού

Για να είναι θεμιτή η προσέγγιση ενός προβλήματος απόφασης μέσω ενός κλασικού μοντέλου Γ.Π πρέπει να ισχύουν οι τέσσερις παρακάτω προϋποθέσεις[31] :

ü **Γραμμικότητα:**

Το αποτέλεσμα, είτε αυτό είναι όρος περιορισμού $a_{ij}\ x_j$ είτε όρος αντικειμενικής συνάρτησης $c_j\ x_j$, είναι γραμμική συνάρτηση του αιτίου x_j που το προκαλεί. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν ισχύει $c_j \quad x_j^2$, το μοντέλο εμπίπτει στο χώρο του μη γραμμικού προγραμματισμού.

ü **Διαιρετότητα:**

Οι μεταβλητές απόφασης είναι άπειρα διαιρετές, εκφράζονται για παράδειγμα, σε μονάδες μήκους, βάρους, κλπ. Σε περίπτωση που όλες οι μεταβλητές δεσμεύονται να πάρουν ακέραιες τιμές, το πρόβλημα εμπίπτει στην κατηγορία του ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού.

Όταν δε δεσμεύονται όλες οι μεταβλητές να πάρουν ακέραιες τιμές, αλλά μόνο μερικές από αυτές, το πρόβλημα ανήκει στην κατηγορία του μικτού γραμμικού προγραμματισμού.

ü **Βεβαιότητα:**

Τα δεδομένα του προβλήματος, τα αριθμητικά στοιχεία δηλαδή ***A,b,c*** που περιέχονται στις μήτρες, είναι γνωστά με απόλυτη βεβαιότητα. Όταν ορισμένα από αυτά δεν είναι γνωστά με βεβαιότητα, αλλά ακολουθούν γνωστούς στατιστικούς νόμους, ο προγραμματισμός λέγεται «Στοχαστικός» (Stochastic Programming). Τέλος, όταν η πληροφορία για κάποιους συντελεστές είναι προσεγγιστική, είναι δηλαδή διαστήματα

[31] Σίσκος, Γ. (1998) Γραμμικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.

στα οποία ανήκουν ασαφώς οι συντελεστές αυτοί, ο προγραμματισμός λέγεται «Ασαφής» (Fuzzy Programming).

- **<u>Μοναδικότητα:</u>**

Η περίπτωση αυτή, αφορά το πλήθος των αντικειμενικών συναρτήσεων που μοντελοποιούν τους στόχους του προβλήματος απόφασης. Στον κλασικό Γ.Π. η αντικειμενική συνάρτηση πρέπει να είναι μια και μοναδική «Μονοδιάστατος ή Μονοκριτήριος Γ.Π». Στην αντίθετη περίπτωση, το πρόβλημα ανήκει στην κατηγορία του «Πολυκριτήριου Γ.Π» (Multicriteria or Multi Objective Linear Programming).

Συνδυασμός των παραπάνω κατηγοριοποιήσεων δείχνει τον πλούτο του επιστημονικού αντικειμένου του μαθηματικού προγραμματισμού. Φυσικά, η ίδια κατηγοριοποίηση μοντέλων που γίνεται για τον Γ.Π. ισχύει για τον πολυκριτήριο και τον μη γραμμικό προγραμματισμό.

2.8 <u>Θεμελιώδες Θεώρημα του Γραμμικού Προγραμματισμού</u>

Σύμφωνα με το Θεμελιώδες θεώρημα του γραμμικού προγραμματισμού, ένα γραμμικό πρόβλημα είναι αδύνατο ή εφικτό. Αν είναι εφικτό τότε είναι βέλτιστο ή απεριόριστο. Επομένως για κάθε γ.π μπορούμε να προσδιορίσουμε τη κατηγορία του με κριτήριο «τη δυνατότητα επίλυσης του», ακόμα και σε μορφή ψευδοκώδικα, όπως φαίνεται παρακάτω:

Αν (F= Ø) τότε

Το γ.π είναι αδύνατο (infeasible)

Αλλιώς

Το γ.π είναι εφικτό (feasible)

Αν (∍ βέλτιστη λύση) τότε

Το γ.π είναι βέλτιστο (optimal)

Αλλιώς

Το γ.π είναι απεριόριστο (unbounded)

Τέλος_αν

Τέλος_αν

Οπότε λύση ενός προβλήματος είναι ο προσδιορισμός της κατηγορίας του, δηλ. αν είναι αδύνατο, βέλτιστο ή απεριόριστο. Επιπλέον, αν είναι βέλτιστο πρέπει να προσδιοριστεί τουλάχιστον ένα βέλτιστο σημείο του. Επομένως, ο γραμμικός προγραμματισμός κατασκευάζει μεθόδους επίλυσης (αλγορίθμων) που υπολογίζουν τουλάχιστον ένα βέλτιστο σημείο.

Η μέθοδος simplex (simple complex) βασίζεται στο θεμελιώδες θεώρημα και είναι η πλέον γνωστή και περισσότερο χρησιμοποιημένη μέθοδος για την επίλυση ενός γενικού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού και αναπτύχθηκε από τον George Dantzig. Η μέθοδος αυτή αποτελεί μια αλγεβρική επαναληπτική διαδικασία η οποία επιλύει ακριβώς, κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, σε ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Τα βήματα αυτά θα αναφερθούν αναλυτικά παρακάτω αφού πρώτα ορίσουμε κάποιες έννοιες[32].

[32] Οικονόμου, Γ.Σ., και Γεωργίου, Α.Κ. (1999) "Ποσοτική Ανάλυση για τη Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων", Εκδόσεις Ευγ. Μπένου, Αθήνα.

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού βρίσκεται στην κανονική μορφή όταν: i) Η αντικειμενική συνάρτηση ζητείται να μεγιστοποιηθεί, ii) Οι μεταβλητές είναι όλες μη αρνητικές, δηλαδή, μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός και τέλος, iii) Στους περιορισμούς, οι γραμμικές εκφράσεις που περιέχουν τις μεταβλητές είναι μικρότερες ή ίσες από μία μη αρνητική σταθερά.

Η μέθοδος simplex περιγράφεται σε γενικές γραμμές ως εξής :

i. Βρίσκουμε μια οποιαδήποτε βασική λύση (γωνία του πολυέδρου). Επειδή αυτό δεν είναι πάντα εύκολο συνήθως επιλέγουμε την αρχή των αξόνων

ii. Υπολογίζουμε το κέρδος (τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης) στο σημείο αυτό και τα γειτονικά του

iii. Αν κάποιο από τα γειτονικά σημεία αποδίδει μεγαλύτερα κέρδη από το σημείο O τοποθετούμαστε σε αυτό. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία και με διαδοχικούς αποκλεισμούς καταλήγουμε στην άριστη λύση. Το πιο δύσκολο μέρος είναι ο εντοπισμός των γειτονικών σημείων.

Κανόνας Α. *(Αρχική βασική λύση)*

Τροποποιούμε το πρόβλημα έτσι ώστε όλες οι κανονικές μεταβλητές να βρεθούν στο δεξιό σκέλος των ισοτήτων

Μεγιστοποίηση των κερδών $5W+3X+2Y+7Z$ υπό περιορισμούς

$T = 32000 - 0.5 W - 2 X - 1.9 Y - 3.1 Z$

$C = 5000 -10 W - 1.2 X - 7 Y - 4 Z$

Όπου, οι παραγόμενες ποσότητες και οι άεργες δυναμικότητες δεν μπορεί να είναι αρνητικές.

Όταν το πρόβλημα γραφτεί σε αυτή τη μορφή μπορούμε να βρούμε εύκολα μια βασική λύση, να επιβεβαιώσουμε ότι αυτή η λύση είναι εφικτή και να ελέγξουμε αν είναι άριστη. Αν θέσουμε τις κανονικές μεταβλητές ίσες με μηδέν τότε οι μεταβλητές άεργης δυναμικότητας παίρνουν τιμές ίσες με τη συνολική διαθέσιμη ποσότητα των συντελεστών παραγωγής ($T=32000$, $C=5000$, $W=X=Y=Z=0$). Πρόκειται για τη λύση που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων που δεν είναι σπουδαία διότι σημαίνει ότι δεν παράγουμε τίποτε, αλλά που είναι *βασική λύση* (αριθμός μη αρνητικών μεταβλητών ίσος με τον αριθμό των περιορισμών) και το κυριότερο είναι εύκολο να εντοπιστεί και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί ως σημείο εκκίνησης για τη διαδικασία υπολογισμών.

Κανόνας Β. (*Ελεγχος εφικτότητας*)

Η βασική λύση που προτάθηκε είναι εφικτή αν και μόνο αν όλοι οι σταθεροί όροι είναι μη αρνητικοί.

Παρατηρούμε ότι έτσι όπως έχουμε διατυπώσει το πρόβλημα οι μεταβλητές που βρίσκονται στο δεξιό μέλος παίρνουν την τιμή μηδέν ενώ εκείνες του δεξιού μέλους είναι θετικές. Αυτή η μορφή μας επιτρέπει να δούμε εύκολα ότι μια λύση είναι εφικτή όταν οι σταθεροί όροι δεν είναι αρνητικοί. Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να αντικαταστήσουμε μια από τις μη αρνητικές μεταβλητές της βασικής λύσης με μια από τις μεταβλητές που έχουν πάρει τιμή μηδέν (η οποία τώρα θα γίνει θετική).

Κατ' αυτό τον τρόπο θα έχουμε πάντα τόσες θετικές μεταβλητές όσοι και οι περιορισμοί, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του γραμμικού προγραμματισμού και επομένως βασική λύση. Οι συντελεστές του υποδείγματος θα αλλάζουν μετά από κάθε τέτοιου είδους αντικατάσταση, και, κάθε φορά, πρέπει να εξετάζουμε αν έχουμε στα χέρια μας την άριστη λύση.

Αν υποθέσουμε ότι ύστερα από διαδοχικές αντικαταστάσεις έχουμε φτάσει σε ένα σημείο όπου όλοι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι αρνητικοί (σε σχέση με τις μεταβλητές που βρίσκονται στο δεξιό σκέλος) τότε καμία νέα αντικατάσταση δεν μπορεί να αυξήσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (σε πρόβλημα μεγιστοποίησης) και προφανώς έχουμε φτάσει στην άριστη λύση, στην προκειμένη περίπτωση εκείνη που μεγιστοποιεί την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η οικονομική εξήγηση της πρότασης αυτής είναι ότι αν το οριακό όφελος από την παραγωγή πρόσθετης μονάδας κάποιου προϊόντος (έννοια συντελεστών στην αντικειμενική συνάρτηση) γίνει αρνητικό δεν παράγουμε άλλο από αυτό το προϊόν.

Έτσι προκύπτει ο **Κανόνας Γ.** (*άριστη κατάσταση*)

Μια βασική λύση είναι άριστη αν και μόνο αν κανένας από τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης δεν είναι θετικός.

2.8.1 Αριθμητικό παράδειγμα με δύο μεταβλητές (Simplex)

Έστω το παρακάτω απλό παράδειγμα με δύο μεταβλητές και δύο περιορισμούς

$$\text{Max } 2.5x_1 + 2x_2$$

υπό περιορισμούς :

$$x_1 + 2x_2 \le 8000$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 9000$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Βήματα:

1. Διατυπώνουμε το πρόβλημα διαχωρίζοντας τις θετικές από τις μηδενικές μεταβλητές

$$\text{Max } Z = 0 + 2.5x_1 + 2x_2$$

υπό περιορισμούς :

$$S_a = 8000 - x_1 - 2x_2$$

$$S_b = 9000 - 3x_1 - 2x_2$$

$$x_1, x_2, S_a, S_b \ge 0$$

2. Αυτή η μορφή μας δίνει τη λεγόμενη μήτρα των συντελεστών

		x_1	x_2
Z	0	2.5	2
S_a	8000	-1	-2
S_b	9000	-3	-2

από την οποία προκύπτει η αρχική βασική λύση με τις κανονικές μεταβλητές ίσες με μηδέν και τις μεταβλητές άεργης δυναμικότητας ίσες με το συνολικό δυναμικό των συντελεστών

3. Αντικατάσταση μιας θετικής μεταβλητής (αριστερό μέλος) από μια μηδενική (δεξιό μέλος)

$$S_b = 9000 - 3x_1 - 2x_2$$

στην περίπτωση του δεύτερου περιορισμού αντικαθιστούμε την S_b με το x_1 και έχουμε:

$$x_1 = \frac{-9000}{-3} + \frac{1}{-3} S_b + \frac{2}{-3} x_2$$

Με άλλα λόγια, λύσαμε την εξίσωση που τις συνδέει ως προς την αρχικά μηδενική μεταβλητή, η οποία έτσι περνά στο αριστερό μέλος ενώ η αρχικά θετική μεταβλητή περνά στο δεξιό μέλος. Σημειώνουμε τους νέους συντελεστές στη *μήτρα συντελεστών*.

		S_b	x_2
Z			
S_a			
x_1	3000	$-1/3$	$-2/3$

Για να βρούμε τα άλλα στοιχεία της μήτρας αντικαθιστούμε τη μεταβλητή στις άλλες εξισώσεις και έτσι την εξαφανίζουμε από το δεξιό μέλος από παντού, στο οποίο εμφανίζεται η μεταβλητή την οποία αντικαθιστά (που ήταν προηγουμένως θετική). Η μήτρα που προκύπτει μας δίνει τη βασική λύση του δεύτερου σταδίου.

		S_b	x_2
Z	7500	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$
S_a	5000	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
x_1	3000	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Ο σταθερός όρος της εξίσωσης που αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση είναι τώρα θετικός και ισος με 7500, που σημαίνει ότι η νέα βασική λύση συνεπάγεται αυξημένο κέρδος σε σχέση με την αρχική βασική λύση. Συνεχίζουμε τη διαδικασία αυτή μέχρι να βρούμε την άριστη λύση σύμφωνα με τον κανόνα Γ. Αυτή είναι η μέθοδος simplex. Μένει να ορίσουμε τον τρόπο με τον οποίο επιλέγουμε τα στοιχεία αντικατάστασης δηλαδή το στοιχείο περιστροφής (pivot) ή οδηγό στοιχείο στη μήτρα των συντελεστών.

Οι ακόλουθοι κανόνες μετατρέπουν την παραπάνω διαδικασία σε στοιχειώδεις αριθμητικές πράξεις:

Επιλογή της οδηγού στήλης : Το στοιχείο που αντικαθιστά τη θετική βασική μεταβλητή είναι εκείνο με το μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στην αντικειμενική συνάρτηση δηλαδή εκείνο που δίνει το μεγαλύτερο οριακό όφελος σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή με μηδενική τιμή.

Επιλογή της οδηγού γραμμής : Χρησιμοποιούμε κάθε ***αρνητικό*** στοιχείο της επιλεγμένης στήλης για να διαιρέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία της πρώτης στήλης. Το στοιχείο για το οποίο το πηλίκο δίνει τη μικρότερη απόλυτη τιμή επιλέγεται για την αντικατάσταση.

Η οικονομική σημασία αυτού του κανόνα είναι η εξής: Οταν εισάγουμε ένα νέο προϊόν στη δραστηριότητα της επιχείρησης, οι περιορισμένοι συντελεστές που διαθέτει η επιχείρηση απεμπλέκονται απο τις τρέχουσες δραστηριότητες για να απασχοληθούν στην παραγωγή που εισάγεται.

Θα μπορέσουμε να παράξουμε το νέο προϊόν μόνο όσο επιτρέπει η δυναμικότητα των συντελεστών που απελευθερώνονται από άλλες χρήσεις. Θα υπάρχει αναγκαστικά κάποια μεταβλητή που θα μειωθεί στο μηδέν. Αυτή θα είναι εκείνη μεταξύ των θετικών μεταβλητών που επιτρέπει την παραγωγή του μικρότερου αριθμού κομματιών του νέου προϊόντος. Αν επιλεγόταν οποιαδήποτε άλλη τότε θα προέκυπτε έλλειμμα καποιου παραγωγικού συντελεστή και η λύση δεν θα ήταν εφικτή.

Κανόνες εύρεσης των στοιχείων της μήτρας των συντελεστών:

1. Το στοιχείο που αντικαθιστά το αρχικό στοιχείο περιστροφής είναι αντίστροφο του
2. υπόλοιπα στοιχεία της *οδηγού γραμμής* αυτής είναι τα πηλίκα των αρχικών στοιχείων διά του αρχικού στοιχείου περιστροφής, με αντίθετο πρόσημο
3. Τα υπόλοιπα στοιχεία της οδηγού στήλης ισούνται με το πηλίκο των αρχικών στοιχείων δια το αρχικό στοιχείο περιστροφής
4. Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της μήτρας δίνονται από τον τύπο : νέο στοιχείο = αρχικό στοιχείο – (γινόμενο των δύο άλλων στοιχείων στα οποία προβάλλεται αυτό στην οδηγό στήλη και γραμμή) / αρχικό στοιχείο περιστροφής (pivot)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Από το πρόβλημα του βιβλίου §4.2 (δες και σελίδα 148 για πίνακες simplex όπως παρουσιάζονται από τον Σίσκο και σελ. 151 για γραφική λύση) προκύπτουν οι εξής πίνακες simplex

		x_1	x_2
Z	0	4	3
S_1	8	- 1	0
S_2	6	0	- 1
S_3	15	- 1	- 2
S_4	18	- 2	- 1

Max

$Z = 0 + 4x_1 + 3x_2$

υπό περιορισμούς :

$$S_1 = 8 - x_1$$

$$S_2 = 6 - x_2$$

$$S_3 = 15 - x_1 - 2x_2$$

$$S_4 = 18 - 2x_1 - x_2$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$$

Αυτή η μορφή μας δίνει την αρχική μήτρα των συντελεστών.

Ακολουθώντας τους κανόνες προσδιορισμού της οδηγού στήλης και της οδηγού γραμμής και τους κανόνες εύρεσης των στοιχείων της μήτρας των συντελεστών, όπως περιγράφονται παραπάνω, σχηματίζουμε τους επόμενους πίνακες αντικαθιστώντας βασικές με μη βασικές μεταβλητές, έως ότου οι συντελεστές των μη βασικών στην αντικειμενική συνάρτηση γίνουν όλοι αρνητικοί (δεν δίνεται δηλαδή περιθώριο βελτίωσης της τιμής της).

Εδώ δηλαδή μετά την επιλογή της οδηγού γραμμής (s_1) και στήλης (x_1) πρώτα βάζουμε στη θέση του στοιχείου περιστροφής το αντίστροφο του (δες (1) στους κανόνες εύρεσης στοιχείων της μήτρας συντελεστών), στη συνέχεια υπολογίζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της οδηγού γραμμής (κανόνας 2, π.χ. 8 = – 8 / (– 1)), τα υπόλοιπα στοιχεία της οδηγού στήλης (κανόνας 3, π.χ. – 4 = 4 / (– 1)), και τέλος όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της μήτρας (κανόνας 4, π.χ. 32 = 0 – [4 * 8] / (– 1)).

Έτσι προκύπτει η δεύτερη μήτρα στον πίνακα 2. Συνεχίζουμε τη διαδικασία και σταματάμε στον πίνακα 4 όπου καμιά μη βασική μεταβλητή (s_3 , s_4) δεν θα αυξήσει το επίπεδο της αντικειμενικής συνάρτησης αν μπεί στη βάση (αρνητικοί συντελεστές).

Πίνακας 2

		S_1	x_2
Z	32	-4	3
x_1	8	1	0
S_2	6	0	1
S_3	7	1	2
S_4	2	2	1

Πίνακας 3

		S_1	S_4
Z	38	2	-3
x_1	8	1	0
S_2	4	2	1
S_3	3	3	2
x_2	2	2	1

Πίνακας 4

		S_3	S_4
Z	40	$2/3$	$5/3$
x_1	7	$1/3$	$2/3$
S_2	2	$2/3$	$1/3$
S_1	1	$1/3$	$2/3$
x_2	4	$-2/3$	$1/3$

Στη συνέχεια το παραπάνω πρόβλημα παρουσιάζεται με μορφή μητρών και υπολογίζεται η λύση του.

Πίνακας παρουσίασης προβλήματος

	x1	x2	s1	s2	s3	s4	
	4	3	0	0	0	0	
s1	1	0	1	0	0	0	8
s2	0	1	0	1	0	0	6
s3	1	2	0	0	1	0	15
s4	2	1	0	0	0	1	18

Βασικές μεταβλητές είναι για την αρχική μηδενική λύση ($x_1 = x_2 = 0$) οι μεταβλητές αέργου δυναμικότητας s_1, s_2,s_3, s_4 και μή βασικές οι x_1 , x_2 .

Απο τον πίνακα προκύπτουν τα ανύσματα των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης c_b για τις βασικές και c_{nb} για τις μη βασικές μεταβλητές, οι μήτρες των τεχνικών συντελεστών των βασικών B και μη βασικών A μεταβλητών καθως και το άνυσμα του δεξιού μέλους b.

$c_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $c_{nb} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Σε μορφή μητρών το πρόβλημα γράφεται ως εξής

$$max\ Z = c_b\, x_b + c_{nb}\, x_{nb} \qquad (1)$$

υπό περιορισμούς

$$B\, x_b + A\, x_{nb} = b \qquad (2)$$

αν διαιρέσω τη (2) με *B* θα προκύψουν οι τιμές των βασικών μεταβλητών (αφού θέσουμε τις μη βασικές ισες με μηδέν)

$$x_b + B^{-1}A\, x_{nb} = B^{-1}b \qquad (3)$$

αν πολλαπλασιάσω την (3) με c_b και την αφαιρέσω από την (1) προκύπτει και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης Z

$$Z = c_b\, B^{-1}\, b + (c_{nb} - c_b\, B^{-1}\, A)\, x_{nb} \qquad (4)$$

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να βρούμε τις τιμές των βασικών μεταβλητών και της αντικειμενικής συνάρτησης για οποιοδήποτε συνδυασμό βασικών και μη βασικών μεταβλητών, εξερευνώντας έτσι τις πιθανές άριστες λύσεις.

Για παράδειγμα, αν οι βασικές μεταβλητές ήταν x_1, s_2,s_3, s_4 και μή βασικές οι s_1, x_2 τότε οι c_b , c_{nb} , A και B γίνονται :

$c_b = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $c_{nb} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και απο τις (3) και (4) υπολογίζουμε

$$(3) \Rightarrow \; x_b + B^{-1}A\, x_{nb} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

που σημαίνει ότι οι βασικές μεταβλητές γίνονται $x_1 = 8$, $s_2=6$, $s_3=7$, $s_4=2$ ενώ τώρα οι s_1, x_2 είναι μηδέν, η δε αντικειμενική συνάρτηση παίρνει την τιμή 32.

$$(4) \Rightarrow \; Z = c_b\, B^{-1}\, b = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} = 32$$

ή αφού $x_b = B^{-1}b$ τότε $\qquad Z = c_b\, x_b = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = 32$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε τις τιμές βασικών μεταβλητών και αντικειμενικής συνάρτησης για όλους τους συνδυασμούς όπου 4 από τις 6 μεταβλητές γίνονται κάθε φορά βασικές. Ο συνδυασμός που συνεπάγεται μέγιστη τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση είναι η άριστη λύση του προβλήματος.

2.8.2 Ελαχιστοποίηση και δυϊκό πρόβλημα

Το δυϊκό πρόβλημα παρέχει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος και διευρύνει τον κύκλο των αποτελεσμάτων στη περιοχή της οριακής οικονομικής ανάλυσης.

Χωρίς υπερβολή, ο δυϊσμός βρίσκεται στον πυρήνα της θεωρίας και των αλγορίθμων του γραμμικού προγραμματισμού. Μάλιστα, μια από τις πιο πρακτικές και εκλεπτυσμένες εφαρμογές της θεωρίας του δυϊσμού είναι η θεωρία των παιγνίων (η οποία θα αναπτυχθεί στα παρακάτω κεφάλαια).

Στη περίπτωση της ελαχιστοποίησης θα εξεταστεί ένα πρόβλημα που θα περιέχει περιορισμούς προκειμένου να επιβάλλουν την ελάχιστη τιμή για κάποιο μέγεθος. Για παράδειγμα σε περίπτωση διαφημιστικής εταιρίας που επιδιώκει να ελαχιστοποιήσει το αναγκαίο κόστος για να φτάσει η διαφήμιση σε ακροατήριο τουλάχιστο 30 εκατ δυνητικά καταναλωτών εκ των οποίων τουλάχιστο τα τρία τέταρτα έχουν ετήσιο εισόδημα τουλάχιστο €25000. Τα δεδομένα δίνονται από τον πίνακα και το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί όπως παρακάτω:

	κόστος	ακροατήριο γενικά	ακροατήριο με εισόδημα άνω των
Περιοδικά	28	1	0.6
Τηλεόραση	400	9	2
Ραδιόφωνο	20	0.8	0.7

οι διαφημίσεις σε περιοδικά, τηλεόραση και ραδιόφωνο σημειώνονται αντίστοιχα με *M, T, R.*

κόστος διαφήμισης (min) $= 28\,M + 400\,T + 20\,R$

υπό περιορισμούς:

$M + 9T + 0.8R \geq 30$ (ακροατήριο)

$0.6M + 2T + 0.7R \geq 23$ (ακροατήριο με μεγάλο εισόδημα)

$M, T, R \geq 0$

Για κάθε πρόβλημα ελαχιστοποίησης υπάρχει ένα συζυγές πρόβλημα μεγιστοποίησης. Στην περίπτωση της επιχείρησης που θέλει να μεγιστοποιήσει τις παραγόμενες ποσότητες σε επίπεδα όμως που επιτρέπουν οι περιορισμένες ποσότητες συντελεστών υπάρχει η λογική της ελαχιστοποίησης του κόστους για κάθε προϊόν χωρίς όμως να πέσει κάτω από τα επίπεδα των τιμών (οριακό έσοδο ίσο με οριακό κόστος).

Μεγιστοποίηση του κέρδους

$P = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$

υπό περιορισμένους συντελεστές

$k_{a1}x_1 + k_{a2}x_2 + k_{a3}x_3 \leq q_a$

$k_{b1}x_1 + k_{b2}x_2 + k_{b3}x_3 \leq q_b$

με επίπεδα παραγωγής πάντα θετικά ή μηδέν

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

ελαχιστοποίηση του κόστους

$C = q_ay_a + q_by_b$

υπό την προϋπόθεση ότι τα κέρδη θα κατανεμηθούν

$k_{a1}y_a + k_{b1}y_b \geq p_1$

$k_{a2}y_a + k_{b2}y_b \geq p_2$

$k_{a3}y_a + k_{b3}y_b \geq p_3$

και με λογιστικές τιμές θετικές ή μηδέν

$y_a, y_b \geq 0$

Για να περάσουμε από το αρχικό πρόβλημα στο δυϊκό ακολουθούμε τους εξής κανόνες :

® Συνδέουμε μια μεταβλητή y_i σε κάθε περιορισμό του αρχικού προβλήματος, υπάρχουν λοιπόν τόσες μεταβλητές στο δυϊκό πρόβλημα όσοι και οι περιορισμοί στο αρχικό

® Σε κάθε μεταβλητή του αρχικού αντιστοιχούμε ένα περιορισμό στο δυϊκό πρόβλημα. Οι συντελεστές κάθε περιορισμού στο δυϊκό πρόβλημα συνδέονται όλοι με την ίδια μεταβλητή στο αρχικό. Το δεξιό μέλος αυτού του περιορισμού παίρνει την τιμή του συντελεστή της μεταβλητής στην αντικειμενική συνάρτηση. Η φορά της ανισότητας αντιστρέφεται.

® Ο συντελεστής της μεταβλητής στην αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού παίρνει την τιμή του δεύτερου μέλους του αντίστοιχου περιορισμού του αρχικού

® Αντικαθιστούμε τη μεγιστοποίηση με ελαχιστοποίηση

Τα ακόλουθα σημεία χαρακτηρίζουν τις άριστες λύσεις του αρχικού και του δυϊκού μοντέλου :

® *Θεώρημα δυϊκότητας 1.* Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του αρχικού μοντέλου είναι ίση με την ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού μοντέλου.

® *Θεώρημα δυϊκότητας 2.* Αν η στα άριστα επίπεδα παραγωγής ένας συντελεστής δεν απασχολείται πλήρως τότε η αντίστοιχη μεταβλητή του δυϊκού προβλήματος , δηλαδή το λογιστικό κόστος θα παίρνει την ‘άριστη’ τιμή μηδέν. Αντίστοιχα αν ένας περιορισμός του δυϊκού δεν είναι κορεσμένος τότε η μεταβλητή του αρχικού που σχετίζεται με αυτόν θα είναι ίση με μηδέν.

® *Ερμηνεία των μεταβλητών του δυϊκού προβλήματος*. Για μεταβολή του δεξιού μέλους ενός περιορισμού κατά μία μονάδα, η τιμή της μεταβλητής του δυϊκού (που αντιστοιχεί σε αυτό τον περιορισμό) μας δίνει τη μεταβολή της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ</u>

3.1 Ιστορική αναδρομή

Ο μαθηματικός προγραμματισμός αναπτύχθηκε σημαντικά τα τελευταία πενήντα χρόνια, με σκοπό την επίλυση πρακτικών προβλημάτων όπως οικονομικών, επιχειρησιακών, στρατιωτικών κτλ. Από μαθηματική άποψη, ορίζεται ως ο κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών που ασχολείται με τη μεγιστοποίηση και την ελαχιστοποίηση πραγματικών συναρτήσεων κάτω από ορισμένες συνθήκες. Με άλλα λόγια, είναι ο κλάδος της Πολυκριτήριας Ανάλυσης Αποφάσεων, που επιτρέπει την ταυτόχρονη θεώρηση πολλαπλών αντικειμενικών αποφάσεων στα πλαίσια της μεθοδολογίας του μαθηματικού προγραμματισμού. Ουσιαστικά ο Μαθηματικός Προγραμματισμός άρχισε να αναπτύσσεται το 1947 στις ΗΠΑ. Ο Γάλλος μαθηματικός Joseph Fourier γνώριζε τις δυνατότητες του Μαθηματικού Προγραμματισμού από το 1823, αλλά ο πρώτος που δημοσίευσε επιστημονική μελέτη σχετική με τον Μαθηματικό Προγραμματισμό ήταν ο Ρώσος μαθηματικός και νομπελίστας Leonid Vitalievitch Kantorovich (1939)[33]. Ο όρος «Μαθηματικός Προγραμματισμός» χρησιμοποιήθηκε από τον Robert Dorfman γύρω στο 1950. Η γενική μέθοδος Simplex επίλυσης του προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού προγραμματίστηκε σε ηλεκτρονικό υπολογιστή SEAC για πρώτη φορά στις ΗΠΑ το 1951. Σήμερα ο Μαθηματικός Προγραμματισμός είναι ένας γενικός όρος που περιλαμβάνει τον γραμμικό προγραμματισμό, τον ακέραιο προγραμματισμό, τον κυρτό προγραμματισμό, τον μη γραμμικό προγραμματισμό, τη θεωρία ροών δικτύων, το δυναμικό προγραμματισμό και τον προγραμματισμό υπό καθεστώς αβεβαιότητας.

3.2 Ορισμός Μαθηματικού Προγραμματισμού

Πρώτον, ας δώσουμε έναν ορισμό. Μαθηματικός Προγραμματισμός (ΜΠ) είναι η χρήση των πολλαπλών μαθηματικών υποδειγμάτων, ιδιαίτερα αυτών που βοηθούν στη βελτιστοποίηση, προκειμένου να επιτευχθεί η σωστή διαδικασία λήψης αποφάσεων.

[33] Κόγκας, Δ., (2007), "Στρατηγικό Επιχειρησιακό Περιβάλλον-Στρατηγική Διοίκηση", έκδοση Γ. Μπένου, Αθήνα

Ως γνωστόν οι 4 βασικές λειτουργίες του management είναι ο Προγραμματισμός, η Οργάνωση, η Διεύθυνση και ο Έλεγχος. Έστω ότι έχουμε ένα ρομπότ (μια επιχείρηση ή έναν οργανισμό) στην άκρη ενός δωματίου (αγορά) και θέλουμε να φτάσει στην άλλη άκρη του δωματίου. Το ρομπότ θα μπορούσε να κινείται τυχαία μέχρι να φτάσει στην άλλη άκρη. Είναι όμως πιο αποδοτικό το ρομπότ να προγραμματίσει τις κινήσεις του ώστε να φτάσει σίγουρα (και γρήγορα) στην άλλη άκρη.

Εν συντομία λοιπόν, Προγραμματισμός σημαίνει καθορισμός στόχων και αντικειμενικών σκοπών. Οπότε, αντί του όρου βελτιστοποίηση χρησιμοποιείται ο όρος προγραμματισμός (Programming). Ο όρος αυτός προηγείται χρονικώς από τους υπολογιστές και σημαίνει «προετοιμασία ενός χρονοδιαγράμματος των δραστηριοτήτων» χρησιμοποιείται ως συνώνυμο της λέξης σχεδιασμός (Planning). Πρόκειται για τη κατάστρωση ενός σχεδίου λήψης αποφάσεων προς την επίτευξη ενός βέλτιστου αποτελέσματος, το οποίο είναι το καλύτερο δυνατό μεταξύ όλων των εναλλακτικών επιλογών που υπάρχουν. Γι'αυτό το λόγο, η βελτιστοποίηση μπορεί να εκληφθεί και ως μία διαδικασία εύρεσης και λήψης βέλτιστων αποφάσεων (decision making).

Στη μαθηματική γλώσσα, μαθηματικός προγραμματισμός λέγεται ένα μαθηματικό μοντέλο στο οποίο επιχειρείται η βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) μιας ή περισσοτέρων γραμμικών ή μη- γραμμικών συναρτήσεων (κριτήρια βελτιστοποίησης) και αγνώστων πραγματικών μεταβλητών, των οποίων το πεδίο τιμών οριοθετείται έμμεσα από γραμμικούς ή μη-γραμμικούς περιορισμούς (ανισοεξισώσεις). Οι άγνωστες μεταβλητές προσδιορίζουν (μοντελοποιούν) το αντικείμενο απόφασης του προβλήματος και ονομάζονται για το σκοπό αυτό μεταβλητές απόφασης.

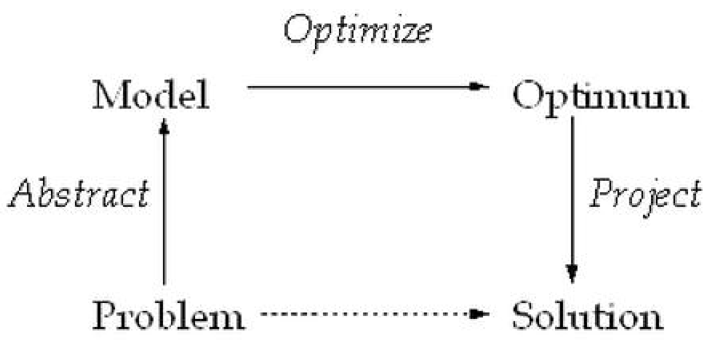
3.3 <u>Χρήση και Χρησιμότητα Μαθηματικού Προγραμματισμού</u>

Ο μαθηματικός προγραμματισμός χρησιμοποιείται από τους επιχειρησιακούς ερευνητές ή τους αναλυτές προβλημάτων απόφασης για την προσέγγιση προβλημάτων κατανομής περιορισμένων πόρων ή μέσων σε εναλλακτικές και ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Αποτελεί, μια σειρά από διαδικασίες ή τις τεχνικές. Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του είναι ότι βρίσκει τη *καλύτερη* λύση για ένα μοντέλο, η οποία ανιχνεύεται *αυτόματα* από το λογισμικό βελτιστοποίησης. Ένα μοντέλο ΜΠ απαντά συνήθως στο ερώτημα "Ποιο είναι το καλύτερο;" και όχι "Τι θα συμβεί αν;" (Στατιστικές).

Εν ολίγοις, ο μαθηματικός προγραμματισμός είναι από τις λίγες μεθόδους που μπορεί να μη μετρά μειονεκτήματα. Βρίσκει την καλύτερη λύση για το πρόβλημα , *όπως το πρότυπο* . Αν το μοντέλο έχει κατασκευαστεί καλά, αυτή η λύση θα πρέπει να μεταφραστεί πίσω στον πραγματικό κόσμο ως μια καλή λύση για τον πραγματικό πρόβλημα (γι'αυτό και χρησιμοποιείται κατά κόρων σε διυλιστήρια πετρελαίου, όπου οι προγραμματιστές διυλιστηρίου επιθυμούν να προετοιμάσουν λεπτομερή χρονοδιαγράμματα).

Συνήθως λειτουργεί ως εξής:



Το πρόβλημα, γίνεται «μοντέλο», βρίσκεται η βέλτιστη λύση και έτσι επιλύεται.

3.4 Βασικά Χαρακτηριστικά και Εφαρμογές Μαθηματικού Προγραμματισμού

Τα βασικά χαρακτηριστικά ενός προβλήματος Μαθηματικού Προγραμματισμού είναι τα εξής:

- Εξετάζει πολλές δυνητικά αποδεκτές λύσεις
- Αντλεί κάποια μέσα από την αξιολόγηση της ποιότητας των εναλλακτικών λύσεων
- Δημιουργεί "συνδέσεις" μεταξύ των μεταβλητών στοιχείων του συστήματος.

Αυτές αντικατοπτρίζονται στις βασικές συνιστώσες ενός μοντέλου ΜΠ:

- Οι τιμές των **μεταβλητών απόφασης** , οι οποίες περιγράφουν τις λύσεις
- Η **αντικειμενική συνάρτηση** , η οποία μετρά την ποιότητα των λύσεων
- Οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών απόφασης, ή **περιορισμούς** .

Οι ορισμοί όλων αυτών των συστατικών θα αλλάξει επανειλημμένως κατά την κατασκευή του μοντέλου. Εάν το μοντέλο είναι αρκετά πιστό, τότε η βέλτιστη λύση του θα πρέπει να είναι μια *καλή* λύση για το πραγματικό πρόβλημα. Είτε είναι είτε όχι, η διαδικασία της οικοδόμησης του μοντέλου και την ανάλυση των λύσεών του, είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για την ανάλυση του προβλήματος στον πραγματικό κόσμο.

Ο Μαθηματικός Προγραμματισμός είναι το καταλληλότερη μέθοδος για προβλήματα που αφορούν ανάμειξη, η συνεχής ροής επεξεργασίας, παραγωγής και διανομής, και του στρατηγικού σχεδιασμού. Απαντά σε ερωτήματα όπως:

- πόσο;
- πότε;
- πού;

Μία ειδική περίπτωση της Μαθηματικού Προγραμματισμού που έχει τεράστια επιτυχία είναι γραμμικός προγραμματισμός (LP). Σε ένα μοντέλο ΓΠ, όλες οι σχέσεις είναι γραμμικές, εξ ου και το όνομα. Ο Γραμμικός Προγραμματισμός έχει τόσο μεγάλη επιτυχία για δύο λόγους:

- Υπάρχουν ισχυρά εργαλεία – λύτες που βρίσκουν τη καλύτερη λύση για προβλήματα ΓΠ αυτόματα.
- Πολλά φαινόμενα του πραγματικού κόσμου μπορούν να προσαρμοστούν και να μελετηθούν ικανοποιητικά από γραμμικές σχέσεις.

Συγκεκριμένα, ο Μαθηματικός Προγραμματισμός μπορεί να εφαρμοστεί και να επιλύσει τα παρακάτω φαινόμενα – προβλήματα:

- Ενεργειακός Σχεδιασμός (Energy Planning)
- Προγραμματισμός επέκταση συστήματος ηλεκτροπαραγωγής (Power Generator Expansion Planning)
- Διαχείριση Υδάτινων Πόρων (Water Management)
- Διαχείριση Δασικών Πόρων (Forest Management)
- Καταμερισμός Διαφημιστικής Δαπάνης (Media Selection)
- Επιλογή Χαρτοφυλακίου (Portfolio Selection)
- Προγραμματισμός Διαίτης – Διατροφής (Diet Problem)
- Διαχείριση αβεβαιότητας σε προβλήματα Μ.Π (Uncertainty)

3.5 ***Η «οικοδόμηση» ενός μοντέλου Μ.Π***

Ένα μεγάλο μέρος της τέχνης της οικοδόμησης ενός μοντέλου ΜΠ περιστρέφεται γύρω από το ποιες πτυχές - κριτήρια του προβλήματος στον “πραγματικό κόσμο” θα πρέπει να συμπεριλαμβάνονται και η ποιά δεν πρέπει. Στην πράξη, αυτό είναι μια επαναληπτική διαδικασία. Για να ξεκινήσετε, μπορείτε να κρατήσετε τα πράγματα απλά και στη περίπτωση αμφιβολίας, να τα αφήσετε απ’έξω. Αν η βέλτιστη λύση που προκύπτει από το μοντέλο είναι σαφώς λάθος στον πραγματικό κόσμο, προσθέτουμε επιπλέον λεπτομέρειες και δοκιμάζουμε ξανά.

Η διαδικασία της οικοδόμησης ενός μοντέλου βελτιστοποίησης είναι αναγκαστικά επαναληπτική. Περισσότερες λεπτομέρειες προστίθενται στο μοντέλο, αναζητούνται περαιτέρω στοιχεία, εξετάζονται τα κριτήρια και οι περιορισμοί κ.α. Έτσι το μοντέλο αρχίζει να προτείνει νέους τρόπους να κάνουμε πράγματα και γίνεται ένα μοντέλο το οποίο φεύγει από «πειραματικό εργαλείο» και γίνεται «εργαλείο ενίσχυσης και υποστήριξης λήψης αποφάσεων».

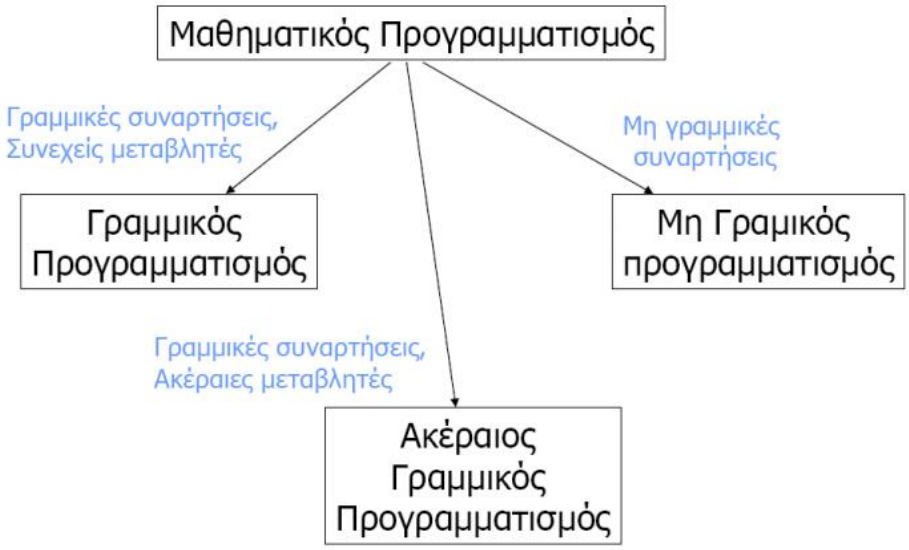
3.6 Μέθοδοι και Τεχνικές Μαθηματικού Προγραμματισμού

Ο κλάδος της Επιχειρησιακής Έρευνας γνώρισε ραγδαία ανάπτυξη μετά το τέλος του Β' Παγκοσμίου Πολέμου. Έκτοτε μία πληθώρα μεθοδολογιών και αλγορίθμων επιχειρησιακής έρευνας έχει αναπτυχθεί για την επίλυση διαφόρων κατηγοριών επιχειρησιακών προβλημάτων. Ειδικότερα η επιχειρησιακή έρευνα εφαρμόζει επιστημονικές μεθόδους σε πολύπλοκα προβλήματα που προκύπτουν κατά τη διοίκηση και διαχείριση μεγάλων συστημάτων ανθρώπων, μηχανών, υλικών ή χρημάτων στη γεωργία, βιομηχανία, επιχειρήσεις κλπ.

Οι κυριότερες επιστημονικές μέθοδοι ή τεχνικές που χρησιμοποιούνται στην Επιχειρησιακή Έρευνα είναι :

- Δέντρα αποφάσεων
- Προσομοίωση
- Θεωρία Παιγνίων
- Θεωρία Δικτύων
- Στατιστικές Μέθοδοι
- Μαθηματικός Προγραμματισμός
    - Δυναμικός Προγραμματισμός
    - Στοχαστικός Προγραμματισμός
    - Τετραγωνικός Προγραμματισμός
    - Ακέραιος Προγραμματισμός
    - Γραμμικός Προγραμματισμός

Συμπερασματικά, οδηγούμαστε στο ότι υπάρχουν 5 είδη – "παιδιά" του μαθηματικού προγραμματισμού τα οποία και τον απαρτίζουν. Τα πιο διαδεδομένα και γνωστά όμως είναι ο ακέραιος και ο γραμμικός.



[Σχήμα 3.1]

Όπου:

® Ο <u>γραμμικός προγραμματισμός</u> (linear programming) περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα για τα οποία τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και όλοι οι περιορισμοί είναι γραμμικές συναρτήσεις (οι μεταβλητές εμφανίζονται μόνο στην πρώτη δύναμη και δεν υπάρχουν υψηλότερες δυνάμεις, ρίζες, γινόμενα μεταβλητών, κτλ.). Όλα τα προβλήματα για τα οποία δεν ισχύει αυτό ανήκουν στα προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού (nonlinear programming).

® Ο <u>ακέραιος προγραμματισμός</u> (integer programming) περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα στα οποία οι μεταβλητές απόφασης μπορούν να πάρουν μόνο ακέραιες τιμές. Ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού μπορεί κατ' επέκταση να είναι γραμμικό ή μη γραμμικό. Σε περίπτωση που κάποιες από τις μεταβλητές ενός προβλήματος περιορίζονται σε ακέραιες τιμές και κάποιες όχι, έχουμε ένα πρόβλημα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού (mixed integer programming). Όταν όλες περιορίζονται σε ακέραιες τιμές, έχουμε ένα πρόβλημα αμιγώς ακέραιου προγραμματισμού (pure integer programming). Ο δυαδικός ακέραιος προγραμματισμός (binary integer programming) είναι μία ειδική κατηγορία προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού, όπου οι μεταβλητές απόφασης μπορούν να πάρουν μόνο τιμές 0 ή 1.

3.7 <u>Ταξινόμηση Προβλημάτων Μαθηματικού Προγραμματισμού</u>

Τα προβλήματα Μαθηματικού Προγραμματισμού μπορούν να ταξινομηθούν σε διάφορες κατηγορίες ανάλογα με το είδος των μαθηματικών σχέσεων που περιγράφουν το πρόβλημα, το είδος των μεταβλητών απόφασης, το είδος των παραμέτρων και το πλήθος των αντικειμενικών συναρτήσεων.

Οι σημαντικότερες κατηγοριοποιήσεις είναι οι ακόλουθες (Winston and Venkataramanan, 2003):

Όταν οι μαθηματικές σχέσεις που περιγράφουν το πρόβλημα (αντικειμενικές συναρτήσεις και περιορισμοί) είναι γραμμικές ως προς τις μεταβλητές απόφασης τότε το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού (Linear Programming), ενώ αν είναι μη γραμμικές χαρακτηρίζεται ως πρόβλημα Μη Γραμμικού Προγραμματισμού (Non Linear Programming). Τα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού αποτελούν τη συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων Μαθηματικών Προγραμματισμού κυρίως λόγω των συγκεκριμένων χαρακτηριστικών τους και την ευκολία επίλυσης τους. Με τη μέθοδο Simplex και τις παραλλαγές της να κυριαρχούν στην επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων εδώ και 60 περίπου χρόνια, προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού με χιλιάδες μεταβλητές απόφασης και περιορισμούς επιλύονται σήμερα σε δευτερόλεπτα. Αντίθετα η επίλυση προβλημάτων Μη Γραμμικού Προγραμματισμού είναι πιο δύσκολη υπόθεση ενώ συνήθως καταλήγει σε τοπικά βέλτιστα τα οποία δεν είναι πάντα και ολικά βέλτιστα. Για τους λόγους αυτούς επιδιώκεται στις περισσότερες περιπτώσεις τα πραγματικά προβλήματα να μοντελοποιούνται ως προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού καταφεύγοντας αρκετές φορές σε προσεγγίσεις μη γραμμικών συστημάτων με γραμμικές σχέσεις.

Μία άλλη ταξινόμηση είναι ανάλογα με το είδος των μεταβλητών απόφασης αν δηλαδή είναι συνεχείς μεταβλητές ή ακέραιες. Τα προβλήματα που έχουν μόνο συνεχείς μεταβλητές είναι πιο εύκολο να λυθούν σε σχέση με αυτά που έχουν ακέραιες μεταβλητές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το εφικτό χωρίο σε ένα πρόβλημα με ακέραιες μεταβλητές παρουσιάζει ασυνέχειες δυσκολεύοντας έτσι κατά πολύ τη διαδικασία επίλυσης.

Από την άλλη μεριά όμως η δυνατότητα χρήσης ακεραίων μεταβλητών δίνει τη δυνατότητα μιας πιο ρεαλιστικής μοντελοποίησης της πραγματικότητας και επίσης επεκτείνει σημαντικά το πεδίο εφαρμογής του Μαθηματικού Προγραμματισμού και σε προβλήματα που έχουν συνδυαστικό χαρακτήρα. (συνδυαστική βελτιστοποίηση) τα οποία χωρίς τη χρήση ακεραίων μεταβλητών θα ήταν αδύνατο να λυθούν. Στο 95% των περιπτώσεων οι ακέραιες μεταβλητές που συναντώνται σε μοντέλα Μαθηματικού Προγραμματισμού είναι δυαδικές μεταβλητές δηλαδή παίρνουν τιμή 0 ή 1.

Αν ένα μοντέλο Μαθηματικού Προγραμματισμού έχει αποκλειστικά ακέραιες μεταβλητές χαρακτηρίζεται ως μοντέλο Ακέραιου Προγραμματισμού (Integer Programming). Αν έχει και συνεχείς και ακέραιες μεταβλητές χαρακτηρίζεται ως μοντέλο Μικτού Ακέραιου Προγραμματισμού (Mixed Integer Programming). Η επίλυση προβλημάτων Ακέραιου και Μικτού Ακέραιου Προγραμματισμού γίνεται συνήθως με την τεχνική φραγής και διακλάδωσης (branch and bound), μια τεχνική συστηματικής εξερεύνησης του πεδίου των δυνατών λύσεων.

Σε κάποιες άλλες περιπτώσεις οι παράμετροι ενός μοντέλου Μαθηματικού Προγραμματισμού μπορεί να μην εκφράζονται με πραγματικούς αριθμούς αλλά με κατανομές πιθανότητας ή με ασαφείς αριθμούς απεικονίζοντας έτσι την αβεβαιότητα ως προς την τιμή τους. Τότε το πρόβλημα ανάγεται αντίστοιχα σε πρόβλημα Στοχαστικού Προγραμματισμού (Stochastic Programming) ή Ασαφούς Προγραμματισμού (Fuzzy Programming). Τα τελευταία χρόνια μάλιστα έχει αρχίσει να απασχολεί ιδιαίτερα η διαχείριση της αβεβαιότητας ως προς τις παραμέτρους ενός μοντέλου ξεφεύγοντας από τις απλές μορφές ανάλυσης ευαισθησίας που μπορεί να προσφέρει και ο Μαθηματικός Προγραμματισμός.

Τέλος όταν υπάρχουν περισσότερες από μία αντικειμενικές συναρτήσεις, το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως πρόβλημα Πολυκριτηριακού Μαθηματικού Προγραμματισμού (Multiobjective Programming, Multicriteria Programming). Ο όρος πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση είναι ταυτόσημος με τον όρο διανυσματική βελτιστοποίηση (vector optimization) σε αντιδιαστολή με την μονοδιάστατη βελτιστοποίηση (scalar optimization) που διαπραγματεύεται ο συμβατικός Μαθηματικός Προγραμματισμός.

Ο Πολυκριτηριακός Μαθηματικός Προγραμματισμός έκανε την εμφάνισή του τη δεκαετία του ’70 ενώ αναπτύχθηκε κυρίως τις δύο τελευταίες δεκαετίες, όταν η θεώρηση περισσοτέρων από μιας αντικειμενικών συναρτήσεων άρχισε να καθορίζει ένα πιο ρεαλιστικό πλαίσιο μοντελοποίησης των πολύπλοκων προβλημάτων μάνατζμεντ. Η πολλαπλότητα των κριτηρίων στη σύγχρονη λήψη αποφάσεων όπου πλέον μαζί με το συνηθισμένο κριτήριο βελτιστοποίησης (το οικονομικό) εξετάζονται και άλλα κριτήρια (περιβαλλοντικά, κοινωνικά κλπ) καθιέρωσε το Πολυκριτηριακό Μαθηματικό Προγραμματισμό ως ένα σύγχρονο, πλήρες εργαλείο στη διαδικασία λήψης αποφάσεων.

3.8 <u>Πολυκριτήριος Μ.Π και η Γενική Μαθηματική Διατύπωσή του</u>

Ο Πολυκριτηριακός Μαθηματικός Προγραμματισμός (ΠΜΠ) αποτελεί το κοινό υποσύνολο δύο πολύ διαδεδομένων πεδίων της Επιχειρησιακής Έρευνας: του Μαθηματικού Προγραμματισμού και της Πολυκριτηριακής Λήψης Αποφάσεων (Multiple Criteria Decision Making) η οποία ασχολείται με προβλήματα λήψης απόφασης όπου εμπλέκονται περισσότερα του ενός κριτηρίων απόφασης.

Το βασικό χαρακτηριστικό των προβλημάτων ΠΜΠ είναι ότι η έννοια της βέλτιστης λύσης δεν έχει πια σημασία καθότι δεν υπάρχει (συνήθως) μία λύση που να βελτιστοποιεί συγχρόνως όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις, δηλαδή μια ιδανική λύση (ideal solution).

Η γενική μαθηματική διατύπωση ενός προβλήματος πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού έχει την ακόλουθη μορφή:

Μεγιστοποίηση {f1 (x), f2 (x), …, fn (x)}

Υπό περιορισμούς: x ϵ A

Όπου x είναι το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης, f_1, f_2, …, f_n είναι οι αντικειμενικές συναρτήσεις του προβλήματος και A είναι το χώρος των εφικτών λύσεων το οποίο οριοθετείται από ένα σύνολο περιορισμών. Η βασική διαφορά του πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού από την «παραδοσιακή» θεωρία του μονοστοχικού μαθηματικού προγραμματισμού έγκειται στο γεγονός ότι η έννοια της βέλτιστης λύσης όπως αυτή απαντάται στον κλασσικό μαθηματικό προγραμματισμό, δεν υφίσταται.

Κατά τη βελτιστοποίηση πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων, σπάνια είναι δυνατόν να βρεθεί μια εφικτή λύση η οποία είναι βέλτιστη για όλες τις υπό εξέταση αντικειμενικές συναρτήσεις. Συνεπώς, η επίλυση ενός προβλήματος πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού έγκειται στην αναζήτηση μιας «συμβιβαστικής» λύσης.

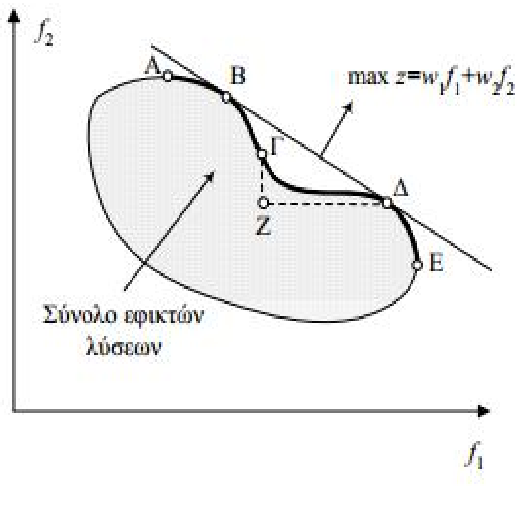
Η αναζήτηση μιας τέτοιας λύσης περιορίζεται στο σύνολο των αποτελεσματικών λύσεων (efficient set). Κάθε εφικτή λύση ονομάζεται αποτελεσματική εάν και μόνο εάν δεν υπάρχει καμία άλλη λύση που να υπερτερεί έναντι αυτής σε όλους τους προκαθορισμένους στόχους (αντικειμενικές συναρτήσεις). Κάθε αποτελεσματική λύση λέγεται ότι είναι βέλτιστη κατά Pareto. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.2 το σύνολο των αποτελεσματικών λύσεων βρίσκεται μεταξύ της περιοχής ΑΕ. Οποιαδήποτε άλλη λύση του χώρου των εφικτών λύσεων είναι μη αποτελεσματική. Έτσι η λύση Ζ είναι μη αποτελεσματική γιατί υπάρχουν οι λύσεις Γ και Δ οι οποίες υπερέχουν έναντι της λύσης της Ζ: $f_1(Γ)=f_1(Z)$ και $f_2(Γ)>f_2(Z)$, $f_1(Δ)>f_1(Z)$ και $f_2(Δ)=f_2(Z)$.

Για την αντιμετώπιση προβλημάτων πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού η βελτιστοποίηση ενός απλού γραμμικού συνδυασμού των αντικειμενικών συναρτήσεων δεν είναι επαρκής. Στην περίπτωση όπου ο χώρος των εφικτών λύσεων δεν αποτελεί ένα κυρτό σύνολο, όπως στην περίπτωση του Σχήματος 3, τότε η χρησιμοποίηση ενός γραμμικού συνδυασμού της μορφής $z=w_1f_1+ w_2f_2$ οδηγεί, όπως παρουσιάζεται στο παραπάνω σχήμα, μόνο στον εντοπισμό των λύσεων

Β και Δ αγνοώντας όλες τις άλλες λύσεις που ανήκουν στο σύνολο των αποτελεσματικών λύσεων ΑΕ.

Είναι λοιπόν προφανές ότι η επίλυση προβλημάτων πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού απαιτεί τη χρησιμοποίηση διαδικασιών αναζήτησης λύσεων σε όλο το εύρος του συνόλου των αποτελεσματικών λύσεων. Οι διαδικασίες που έχουν αναπτυχθεί για το σκοπό αυτό λειτουργούν αλληλεπιδραστικά (interactive) και επαναληπτικά (iterative). Σε πρώτη φάση εντοπίζεται μια αρχική αποτελεσματική λύση και παρουσιάζεται στον αποφασίζοντα. Εάν η λύση αυτή κριθεί από τον αποφασίζοντα ικανοποιητική βάσει των προκαθορισμένων στόχων του προβλήματος, τότε η διαδικασία επίλυσης περατώνεται.

Στην αντίθετη περίπτωση, ο αποφασίζοντας πρέπει να καθορίσει ορισμένες πληροφορίες σχετικά με τις προτιμήσεις του στους προκαθορισμένους στόχους του προβλήματος. Οι πληροφορίες αυτές μπορούν να αφορούν τον καθορισμό των στόχων που πρέπει να βελτιωθούν και τις αντίστοιχες παραχωρήσεις (trade-offs) που πρέπει να γίνουν στους υπόλοιπους στόχους, τον καθορισμό μιας λύσης «αναφοράς», την αξιολόγηση ορισμένων λύσεων που παράγονται με βάση τις πληροφορίες που καθορίζονται στη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης, κλπ. Τα στοιχεία αυτά καθορίζουν στην ουσία την κατεύθυνση προς την οποία θα πρέπει να κινηθεί η διαδικασία διερεύνησης του αποτελεσματικού συνόλου. Με τον καθορισμό των πληροφοριών αυτών εντοπίζεται μια νέα βέλτιστη λύση, η οποία αποτελεί τη βάση για τη συνέχιση της ίδιας διαδικασίας έως ότου εντοπιστεί μια λύση, η οποία ανταποκρίνεται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο στις προτιμήσεις και την πολιτική που ακολουθεί ο αποφασίζοντας.



[Σχήμα 3.2]: Γραφική αναπαράσταση του συνόλου των αποτελεσματικών λύσεων.

Μια εναλλακτική διατύπωση και αντιμετώπιση προβλημάτων που αφορούν τη βελτιστοποίηση πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων, αποτελεί ο προγραμματισμός στόχων (goal programming), θεμελιωτές του οποίου υπήρξαν οι Charnes και Cooper (1961). Ο προγραμματισμός στόχων αντιμετωπίζει τα προβλήματα αυτά σε μια περισσότερο «απλουστευμένη» βάση σε σχέση με τον πολυκριτήριο μαθηματικό προγραμματισμό.

Η έννοια του στόχου, η οποία αποτελεί τον πυρήνα αυτής της εναλλακτικής προσέγγισης διαφέρει από την έννοια της αντικειμενικής συνάρτησης που αποτελεί τη βάση του πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού: κάθε αντικειμενική συνάρτηση υποδεικνύει απλά την κατεύθυνση προς την οποία πρέπει να διερευνηθεί η ύπαρξη ικανοποιητικών λύσεων (για παράδειγμα, ελαχιστοποίηση κόστους, μεγιστοποίηση κέρδους, κλπ). Αντίθετα, η σαφής οριοθέτηση στόχων επιτρέπει την αξιολόγηση του βαθμού στον οποίο η κάθε λύση ανταποκρίνεται σε αυτούς (Keeney and Raiffa, 1993). Έτσι σε αντίθεση με τον πολυκριτήριο μαθηματικό προγραμματισμό, οι τεχνικές προγραμματισμού στόχων δεν αποσκοπούν στην άμεση βελτιστοποίηση κάθε αντικειμενικής συνάρτησης, αλλά στην αναζήτηση λύσεων, οι οποίες βελτιστοποιούν μια συνάρτηση των αποκλίσεων από τους επιμέρους στόχους του προβλήματος. Η γενική μαθηματική διατύπωση ενός προβλήματος προγραμματισμού στόχων είναι η ακόλουθη:

Μεγιστοποίηση $h(d_i^+, d_i^-)$

Υπό περιορισμούς: $f_i(x) + d_i^+ - d_i^- = c_i$

$x \in A$

όπου fi είναι ο i στόχος του προβλήματος εκφραζόμενος συναρτήσει του διανύσματος των μεταβλητών απόφασης x, ci είναι η ιδανική/επιθυμητή τιμή του στόχου f_i, d_i^+, d_i^- είναι οι αποκλίσεις από την τιμή ci (d_i^+, $d_i^- = 0$), και h είναι μια συνάρτηση (συνήθως γραμμική) των αποκλίσεων.

Όπως φαίνεται από την παραπάνω διατύπωση, ουσιαστικά η κάθε αντικειμενική συνάρτηση ενός προβλήματος πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού, μετατρέπεται σε έναν περιορισμό, στο δεξιό μέλος του οποίου εντάσσεται η αντίστοιχη ιδανική τιμή της κάθε αντικειμενικής συνάρτησης (στόχος).

Η επίλυση πλέον του παραπάνω προβλήματος οδηγεί στη βελτιστοποίηση των αποκλίσεων από τις προκαθορισμένες ιδανικές τιμές των στόχων του προβλήματος.

Οι ιδανικές τιμές καθορίζονται από τον αποφασίζοντα και μπορούν να αφορούν:

1) Τα ικανοποιητικά επίπεδα των στόχων του προβλήματος τα οποία ο αποφασίζοντας θεωρεί ως ιδανικές λύσεις.

2) Τις βέλτιστες δυνατές τιμές στους προκαθορισμένους στόχους.

Η ιδιαίτερη απλότητα που διέπει τη χρήση των τεχνικών προγραμματισμού στόχων τις έχει καταστήσει ιδιαίτερα δημοφιλείς μεταξύ των επιχειρησιακών ερευνητών για την επίλυση πολλών πρακτικών προβλημάτων βελτιστοποίησης υπό συνθήκες πολλαπλών στόχων. Εκτενή αναφορά στη θεωρία του προγραμματισμού στόχων παρατίθεται από τον Spronk (1981), ο οποίος παράλληλα παρουσιάζει και μια σειρά εφαρμογών στο χώρο του χρηματοοικονομικού προγραμματισμού.

Με τον όρο λοιπόν «επίλυση» στα προβλήματα ΠΜΠ εννοείται η εύρεση εκείνης της ικανής (κατά Pareto άριστης) λύσης που ικανοποιεί περισσότερο τον αποφασίζοντα. Οι μέθοδοι ΠΜΠ μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με το στάδιο στο οποίο εμπλέκεται ο αποφασίζων στη διαδικασία λήψης απόφασης (Hwang and Masud, 1979). Αν δηλαδή εκφράζει τις προτιμήσεις του πριν την επίλυση (μέθοδοι a priori, π.χ. προγραμματισμός στόχων, goal programming), κατά τη διάρκεια της επίλυσης (αλληλεπιδραστικές μέθοδοι, interactive methods) ή μετά την επίλυση (μέθοδοι παραγωγής, generation methods). Η πλειοψηφία των μεθόδων και των εφαρμογών ΠΜΠ ανήκουν στον προγραμματισμό στόχων και στις αλληλεπιδραστικές μεθόδους, κυρίως λόγω του τρόπου υπολογισμού των ικανών λύσεων, όπου αρκεί ένας επιλύτης Μαθηματικού Προγραμματισμού.

Οι μέθοδοι παραγωγής είναι υπολογιστικά πιο πολύπλοκες, απαιτούν ιδιαίτερο λογισμικό και το πεδίο εφαρμογής τους περιορίζεται όσο αυξάνει το μέγεθος του προβλήματος. Σήμερα υπάρχουν αλγόριθμοι εύρεσης του συνόλου Pareto (αλγόριθμοι διανυσματικής βελτιστοποίησης, vector maximum algorithms) μόνο για γραμμικά προβλήματα και είναι ουσιαστικά μέθοδοι που στηρίζονται στη μέθοδο Simplex και στις παραλλαγές της (εξαντλητικές μέθοδοι).

Τις περισσότερες φορές χρησιμοποιούνται μη-εξαντλητικές μέθοδοι παραγωγής με τις οποίες παράγεται ένα αντιπροσωπευτικό υποσύνολο των κατά Pareto άριστων λύσεων χρησιμοποιώντας κυρίως την παραμετρική επίλυση κατάλληλα διαμορφωμένων προβλημάτων Μαθηματικού Προγραμματισμού.

3.9 ***Παραδείγματα και Κριτήρια Απόφασης Προβλημάτων Μ.Π***

¨ Προβλήματα απόφασης αυτής της μορφής είναι, για παράδειγμα:

- Η κατανομή εργατικού δυναμικού
- Η κατανομή τεχνολογικού εξοπλισμού και πρώτων υλών σε διάφορες παραγωγικές διαδικασίες
- Η κατανομή κεφαλαίου σε διάφορα επενδυτικά προγράμματα
- Η ανάθεση σε περιορισμένο προσωπικό διαφόρων υπηρεσιών
- Η κατανομή γης σε διάφορες αγροτικές δραστηριότητες κ.λπ.

¨ Το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα αυτών των αποφάσεων μπορεί να αφορά:

- Τη μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους από πωλήσεις,
- Την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους παραγωγής,
- Τη μεγιστοποίηση της απασχόλησης,
- Την ελαχιστοποίηση των αρνητικών επιπτώσεων στο περιβάλλον, κ.λπ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΦΑΡΜΟΦΕΣ ΜΕΘΟΔΩΝ

Ο Μαθηματικός Προγραμματισμός, τα "παιδιά" του και οι παρόμοιες με αυτόν μέθοδοι αποτελούν κομμάτι της επιχειρησιακής έρευνας, όπως είδαμε και στα παραπάνω κεφάλαια.

Η Επιχειρησιακή έρευνα είναι ο διεπιστημονικός κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών και της πληροφορικής που χρησιμοποιεί προηγμένες μεθόδους ανάλυσης, όπως μαθηματικά μοντέλα, στατιστική ανάλυση και μεθόδους βελτίωσης με στόχο να καταλήξουμε σε βέλτιστες ή σχεδόν βέλτιστες λύσεις σε σύνθετα προβλήματα λήψης αποφάσεων που ανακύπτουν κατά την διεύθυνση και διοίκηση μεγάλων συστημάτων που αποτελούνται από ανθρώπους, μηχανές, υλικά και κεφάλαια, στη βιομηχανία, στις κυβερνητικές υπηρεσίες και στην άμυνα. Η μέθοδος που την χαρακτηρίζει είναι η ανάπτυξη επιστημονικού μοντέλου για το σύστημα που μελετάται, που περιλαμβάνει μετρήσεις τυχαίων παραγόντων, με το οποίο προβλέπονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα εναλλακτικών αποφάσεων, στρατηγικών και ελέγχων.

Σκοπός της είναι, να βοηθήσει τη διοίκηση να καθορίσει την πολιτική και τις ενέργειες, που θα ακολουθήσει ώστε να πετύχει τα βέλτιστα αποτελέσματα στην λήψη των αποφάσεων, με επιστημονικό τρόπο. Ανάλογα με τον τύπο των προβλημάτων, έχουν μελετηθεί διάφορα μοντέλα και έχουν αναπτυχθεί αντίστοιχες τεχνικές για την βελτιστοποίηση τους.

Τα μοντέλα λήψης αποφάσεων μπορούν να χωριστούν σε 1) κλασσικά οικονομικά μοντέλα τα οποία χαρακτηρίζονται από αποφάσεις βεβαιότητας και στοχεύουν στην μεγιστοποίηση του κέρδους, 2) στρατηγικά μοντέλα τα οποία χαρακτηρίζονται από αποφάσεις αβεβαιότητας ο στόχος των οποίων μεταβάλλεται συνεχώς και 3) μοντέλα ανθρώπινης συμπεριφοράς στα οποία υπάρχουν περιπτώσεις που γίνεται συνεχή επανεξέταση της προτεινόμενης απόφασης ακόμα και μετά τη λήψη της και άλλες περιπτώσεις όπου δεν αλλάζει η απόφαση ακόμη και αν στο μέλλον αποδειχθεί ότι υπήρχαν λόγοι αλλαγής της.

Τέλος, ο όρος Προγραμματισμός, τον οποίο και μελετάμε, σε μια επιχειρηματική μονάδα δηλώνει το σύνολο των διαδικασιών και ενεργειών που απαιτούνται για τη λήψη και υλοποίηση αποφάσεων που οδηγούν στην επίτευξη των στόχων της.

Οι λειτουργίες του, είναι πολυδιάστατες επειδή τα επιχειρησιακά προβλήματα μπορεί κανείς να τα εξετάσει και να τα αναλύσει από πολλές πλευρές. Η πολυδιάστατη φύση των επιχειρηματικών προβλημάτων σε συνδυασμό με το διαρκώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον, στο οποίο λαμβάνει τις αποφάσεις του ο προγραμματισμός, καθιστούν το έργο της λήψης αποφάσεων ιδιαίτερα πολύπλοκο και δύσκολο.

Για την επίλυση των διάφορων επιχειρησιακών προβλημάτων, έχουν αναπτυχθεί μεθοδολογίες και τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας. Με τις τεχνικές αυτές μπορούμε να λύσουμε όλων των ειδών τα προβλήματα, όπως επιχειρησιακά, επιχειρηματικά, διοικητικά, εργατικά και πολλά άλλα αφού ανάλογα με το είδος του προβλήματος χρησιμοποιούμε και την ανάλογη μεθοδολογία. Οι μέθοδοι και οι τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας, τα προβλήματα που βρίσκουν λύσεις από αυτές καθώς και παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων θα αναλυθούν παρακάτω.

4.1 Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο γραμμικός προγραμματισμός περιλαμβάνεται στις τεχνικές του μαθηματικού προγραμματισμού και είναι η τεχνική στην οποία ο αντικειμενικός στόχος περιγράφεται από μια γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών του προβλήματος. Έχει την έννοια του σχεδιασμού και ασχολείται με την σχεδίαση των δραστηριοτήτων του συστήματος που περιγράφει έτσι ώστε να προκύψει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.

Προβλήματα τα οποία λύνονται με τον γραμμικό προγραμματισμό είναι όλα τα προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς και αφορούν τη βέλτιστη κατανομή των περιορισμένων πόρων. Συγκεκριμένα, τα προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού ασχολούνται με καταστάσεις όπου ένας αριθμός πηγών όπως είναι ο άνθρωπος, τα μηχανήματα, τα ακίνητα και οι πρώτες ύλες, πρέπει να συνδυαστούν για να παράγουμε τα προϊόντα μας.

Στην παραγωγική δραστηριότητα οι πηγές αυτές υπόκεινται σε διάφορους περιορισμούς ανάλογα με το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε. Επίσης χρησιμοποιείται συχνά για να προσδιορίσει το βέλτιστο σχέδιο λειτουργίας μιας παραγωγικής διαδικασίας. Προβλήματα δηλαδή, καθορισμού των ποσοτήτων που πρέπει να παραχθούν από κάθε προϊόν σε σχέση με ότι βρίσκεται στις αποθήκες με σκοπό τη μεγιστοποίηση του κέρδους.

Επιπλέον, χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων ενέργειας, προστασίας του περιβάλλοντος, διοίκησης προσωπικού, καθώς και προβλημάτων που αφορούν την ανάθεση πεπερασμένων πόρων σε ανταγωνιστικές απαιτήσεις, όπως για παράδειγμα η κατανομή εργατικού δυναμικού, πρώτων υλών και τεχνολογικού εξοπλισμού σε παραγωγικές διαδικασίες, η κατανομή κεφαλαίου σε επενδυτικά προγράμματα κ.α. κατά τρόπο βέλτιστο και στις βιομηχανίες σε μεγάλη έκταση για τη βελτίωση της οικονομικής εκμετάλλευσης τους.

Η λειτουργία του γραμμικού προγραμματισμού σε επιχειρησιακά προβλήματα και συγκεκριμένα σε προβλήματα παραγωγικής δραστηριότητας, γίνεται με την εύρεση της επιθυμητής α' ύλης για κάθε επιχείρηση, ανάλογα με το αντικείμενο της, στο ελάχιστο δυνατό κόστος και στην εύρεση του καλύτερου προγράμματος λειτουργίας έτσι ώστε να πετυχαίνει τα βέλτιστα αποτελέσματα.

Σκοπός του γραμμικού προγραμματισμού είναι από όλους τους συνδυασμούς των πηγών να επιλέξουμε εκείνον που μεγιστοποιεί το κέρδος ή ελαχιστοποιεί το κόστος της επιχείρησης μας ή του προβλήματος μας. Ο προγραμματισμός μεταφορών, η επιλογή χαρτοφυλακίου και η ανάλυση της παραγωγικότητας είναι κάποια από τα καλύτερα παραδείγματα των εφαρμογών του γραμμικού προγραμματισμού στην επιχειρησιακή έρευνα.

4.1.1 Πρόβλημα κατανομής πόρων

4.1.1 α) Πρόβλημα 1:

Ένα εργοστάσιο παράγει καρέκλες και πίνακες ζωγραφικής. Για κάθε μια καρέκλα που παράγει και πουλάει έχει κέρδος 40 € ενώ για κάθε ένα πίνακα 50 €. Για να παραχθεί μια καρέκλα όμως, χρειάζονται οι εξής πόροι: 2 εργατοώρες, 1 ώρα λειτουργίας των μηχανών και 1 μονάδα ξύλου. Για να παραχθεί ένας πίνακας χρειάζονται: 2 εργατοώρες, 1 ώρα λειτουργίας των μηχανών και 4 μονάδες ξύλου. Το εργοστάσιο διαθέτει 60 εργατοώρες, 75 ώρες λειτουργίας των μηχανών και 84 μονάδες ξύλου για κάθε μέρα παραγωγής των παραπάνω προϊόντων. Πως θα έπρεπε να κατανεμηθούν οι παραπάνω πόροι ώστε το εργοστάσιο να φτάσει στο μέγιστο κέρδος;

Απάντηση:

Ας υποθέσουμε ότι x1 είναι ο αριθμός των καρεκλών που μπορεί να παραχθεί σε μία μέρα και x2 ο αριθμός των πινάκων, τότε έχουμε:

$$P=40x1+50x2 \quad (1)$$

Περιορισμοί:

$2x1+2x2 \leq 60$

$3x1+x2 \leq 75$

$x1+4x2 \leq 84$

και $x1 \geq 0,\ x2 \geq 0$

Αν μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση (1) θα έχουμε το μέγιστο κέρδος και οι περιορισμοί μας θυμίζουν πως οι εργατοώρες, οι ώρες λειτουργίας των μηχανών και οι μονάδες ξύλου δεν πρέπει να ξεπερνούν αυτές που ήδη διαθέτει το εργοστάσιο. Στο παράδειγμα αυτό μπορούμε να δούμε πως παίρνουμε τα δεδομένα ενός προβλήματος και τα μοντελοποιούμε έτσι ώστε να μπορεί να λυθεί πιο εύκολα.

4.1.1 β) ***Πρόβλημα 2:***

Μια εταιρία έχει 2 εργοστάσια και 3 αποθήκες. Η δυναμικότητα παραγωγής των δυο εργοστασίων είναι 100 και 200 μονάδες αντίστοιχα. Η χωρητικότητα της 1ης αποθήκης είναι 150 μονάδες, της 2ης 200 μονάδες και της 3ης 350 μονάδες. Η τιμή πώλησης ανά μονάδα από τις 3 αποθήκες είναι 12,14, 15 € αντίστοιχα. Το κόστος μεταφοράς μιας μονάδας του εργοστασίου i στην αποθήκη j δίνεται από τον πίνακα.

ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΑ	**ΑΠΟΘΗΚΕΣ**		
	1	**2**	**3**
1	8	10	12
2	7	9	11

Η επιχείρηση επιθυμεί να γνωρίζει τις άριστες ποσότητες παραγωγής και μεταφοράς από το κάθε εργοστάσιο στην κάθε αποθήκη ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος.

ΛΥΣΗ

Xij= Μονάδες που θα παραχθούν στο εργοστάσιο i (1,2) και θα μεταφερθούν στη αποθήκη j (1,2,3).

Max 4x11+5x21+4x12+5x22+3x13+4x23

Subject to

X11+x12+x13<=100

X21+x22+x23<=200

X11+x21<=150

X12+x22<=200

X13+x23<=350

Xij>=0

4.1.1 γ) <u>Πρόβλημα 3 (Lindo):</u>

Έχουμε το παρακάτω πρόβλημα το οποίο λύθηκε στο Lindo

Min 6x1+9x2

Περιορισμοί:

x1+2x2<=8

10x1+7.5x2>=30

X2>=2

Να βρεθεί

1. ποια είναι η βέλτιστη λύση και τιμή?
2. Αν το κόστος του χ1 από 6 που είναι πάρει την τιμή 4 η παραπάνω λύση θα παραμείνει βέλτιστη? Ποια είναι η βέλτιστη τιμή του προβλήματος με την νέα αντικειμενική συνάρτηση?
3. Κατά πόσο μπορεί να ελαττωθεί ο συντελεστής στην αντικ. συνάρτηση της μεταβλητής x2 χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη μας λύση.
4. Αν ταυτόχρονα το κόστος του χ1 αυξηθεί στο 7.5 και το κόστος του χ2 μειωθεί στην τιμή 6 στην αντικ. συνάρτηση, η βέλτιστη μας λύση θα αλλάξει?
5. Αν η δεξιά σταθερά του περιορισμού 3 αυξηθεί κατά 1 μονάδα τι επίδραση θα έχουμε στη βέλτιστη τιμή?

Αποτελέσματα Lindo

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 27.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	1.500000	0.000000
X2	2.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	2.500000	0.000000
3)	0.000000	-0.600000
4)	0.000000	-4.500000

NO. ITERATIONS= 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	6.000000	6.000000	6.000000
X2	9.000000	INFINITY	4.500000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	8.000000	INFINITY	2.500000
3	30.000000	25.000000	15.000000
4	2.000000	2.000000	2.000000

4.1.2 Γραφική Επίλυση [34]

Έχουμε το εξής πρόβλημα με τους περιορισμούς του:

$X + Y \geq 12$
$X + 2 \cdot Y \leq 16$
$X \geq 0$, και, $Y \geq 0$

Να βρεθούν οι εφικτές λύσεις.

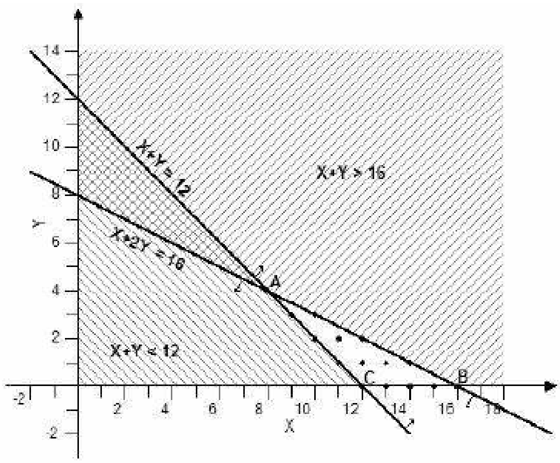
Απάντηση:

Αρχικά σχεδιάζουμε τις ανισότητες του μοντέλου μας σε ένα σύστημα αξόνων (X,Y)

α) $X + Y \geq 12$,

β) $X + 2 \cdot Y \leq 16$,

γ) $X \geq 0$, και, $Y \geq 0$



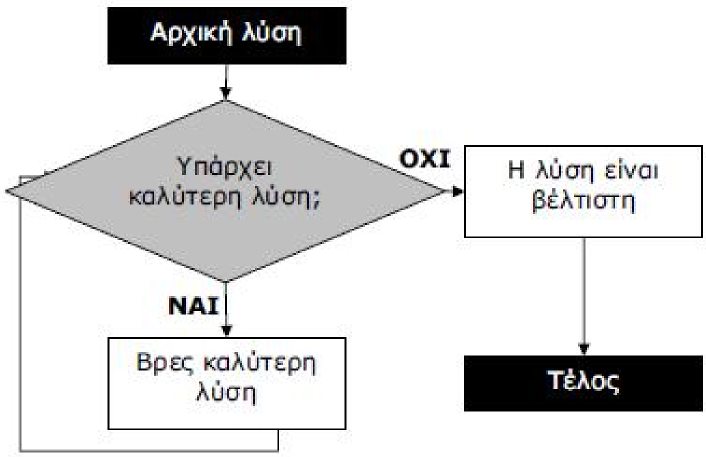
[34] http://users.teiath.gr/vmouss/ebooks/optimee/sections/section11_GrafikiMethodos.html

Στην περιοχή ABC φαίνονται όλες οι αποδεχτές λύσεις του προβλήματος. Αν το πρόβλημα μας είχε συγκεκριμένο σκοπό τότε θα παίρναμε σαν βέλτιστη λύση το σημείο που θα μας ικανοποιούσε. Δηλαδή, αν μας ζητούσε να βρούμε το μέγιστο Y, τότε θα δίναμε ως λύση το σημείο A (8,4) ή αν μας ζητούσε το μέγιστο X+Y, τότε θα δίναμε ως λύση το σημείο B (0,16).

4.1.3 <u>Μέθοδος simplex</u>

Ο G.B.Dantzig ήταν ο πρώτος που ανέπτυξε τον αλγόριθμο simplex για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Πρόκειται για μια αλγεβρική διαδικασία με μεγάλο αριθμό βημάτων, η οποία επιλύει ακριβώς, οποιοδήποτε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με εκατοντάδες ή και χιλιάδες ακόμη μεταβλητές και περιορισμούς για να φτάσει τελικά στη βέλτιστη λύση.

Η μέθοδος simplex είναι ένας αλγόριθμος, συνεπώς είναι μια επαναληπτική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, επαναλαμβάνοντας την διαδικασία λύσης του όσες φορές χρειαστεί ώστε να φτάσουμε στη βέλτιστη και άριστη λύση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα:



*Σχεδιάγραμμα: διαδικασίας λύσης προβλημάτων με την **simplex*** (Μαναμσίδης Οδυσέας,2010).

Δημιουργεί βασικές δυνατές λύσεις στα προβλήματα που καλείται να επιλύσει και ταυτόχρονα ελέγχει την "αριστότητα" τους. Η μέθοδος simplex στηρίζεται σε δύο έννοιες, της εφικτής και της άριστης λύσης. Είναι μια μέθοδος που απευθύνεται κυρίως στον κλάδο της βιομηχανίας. Ένας τρόπος παραγωγής ιδεών και λήψης αποφάσεων που αφορούν κυρίως το marketing της κάθε επιχείρησης. Εφαρμόζεται επίσης και σε επιχειρηματικά προβλήματα που προκύπτουν από την έρευνα αγοράς και σχετίζονται με την τροποποίηση και βελτίωση της ποιότητας των προϊόντων που παράγει ή τις υπηρεσίες που προσφέρει μια επιχείρηση με βάση τις προτιμήσεις των πελατών, τον τρόπο λειτουργίας των ανταγωνιστικών επιχειρήσεων του ίδιου κλάδου, το μικρότερο κόστος και ταυτόχρονα το βέλτιστο κέρδος στην παραγωγή του προϊόντος που παράγουμε, ακόμα και τις σχέσεις που έχουν μεταξύ τους οι εργαζόμενοι μέσα στην επιχείρηση.

Βάση όσων αναφέραμε παραπάνω, γίνεται ο εντοπισμός του προβλήματος και καθορίζεται ο τρόπος που θα εφαρμόσουμε την μέθοδο simplex ώστε να καταλήξουμε στο καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Η εφαρμογή της μεθόδου αυτής, γίνεται με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών και του λογισμικού που χρησιμοποιούν για την επεξεργασία των δεδομένων μας και τη λύση του προβλήματος μας. Η χρήση της και η σύνδεση της με ηλεκτρονικούς υπολογιστές είναι αυτό που την κάνει να δίνει λύσεις με μεγάλη ταχύτητα ακόμα και στα πιο πολύπλοκα προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού.

Ο αλγόριθμος simplex για τη λύση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, χρησιμοποιεί τους λεγόμενους πίνακες simplex, όπως φαίνεται παρακάτω:

	x_1	x_2	...	x_n		
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1	x_{b1}
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2	x_{b2}
...	...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m	x_{bm}
z_i-c_i	z_1-c_1	z_2-c_2	...	z_n-c_n	f(b)	

Στον παραπάνω πίνακα υπάρχουν οι γραμμές m που είναι οι περιορισμοί και οι στήλες n που είναι οι μεταβλητές του προβλήματος. Σε κάθε γραμμή του πίνακα αντιστοιχεί ένας περιορισμός και σε κάθε στήλη μια μεταβλητή.

Τα δεδομένα του πίνακα αλλάζουν συνεχώς καθώς επαναλαμβάνεται ο αλγόριθμος και οι επαναλήψεις σταματούν μόνο όταν βρούμε την άριστη λύση του προβλήματος.

Ακόμη το $z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c(x_{bi})$ και $c(x_{bi})$ αντιστοιχεί στην κατάλληλη στήλη της βάσης. Η στήλη της βάσης δείχνει ποιες στήλες του πίνακα αποτελούν το μοναδιαίο πίνακα.

Η επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με τους πίνακες simplex αποτελεί ένα συστηματικό τρόπο καταχώρησης των δεδομένων του προβλήματος, έτσι ώστε τα βήματα του αλγορίθμου simplex να εκτελούνται με πιο απλό, γρήγορο και αποτελεσματικό τρόπο. Όπου ο αλγόριθμος simplex, βάση της αντικειμενικής συνάρτησης που έχουμε κάθε φορά, ξεκινάει από μια αρχική κορυφή σε ένα σύστημα αξόνων x,y και πηγαίνει στην αμέσως γειτονική κορυφή μόνο αν υπάρχει βελτίωση στην αντικειμενική μας συνάρτηση. Σε περίπτωση που καμία από τις γειτονικές κορυφές δεν βελτιστοποιεί την αντικειμενική μας συνάρτηση, έχουμε φτάσει στη βέλτιστη λύση του προβλήματος μας.

Σημαντικό στοιχείο της μεθόδου simplex είναι ότι εντοπίζει και τις περιπτώσεις όπου το πρόβλημα είναι αδύνατο να λυθεί ή έχει μη πεπερασμένη λύση.

4.1.3 α) ***Παράδειγμα 1***[35]

Min z=2x1-3x2-4x3

s.t.

x1+x2+x3=<30

2x1+x2+3x3>=60

x1-x2+2x3=20

Βήμα:1ο μετατρέπουμε τις ανισότητες των περιορισμών σε ισότητες (Η διαδικασία αυτή που πραγματοποιείται στο βήμα 1 ονομάζεται κανονική μορφή) προσθέτοντας τις μεταβλητές περιθωρίου Si (i=1,2,…) στους περιορισμούς που είναι της μορφής <= και αφαιρώντας στους περιορισμούς που είναι της μορφής >=. Οι μεταβλητές περιθωρίου Si εκφράζουν τους μη χρησιμοποιημένους πόρους της επιχείρησης.

[35] Παραδείγματα από ασκήσεις εργαστηρίου (Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα 1) Κα. Μιχοπούλου. ΤΕΙ Πατρών.

$$\left.\begin{array}{ll} x1+x2+x3=<30 & =>x1+x2+x3+S1=30 \\ 2x1+x2+3x3>=60 & =>2x1+x2+3x3-S2=60 \\ x1-x2+2x3=20 & =>x1-x2+2x3=20 \end{array}\right\} \textbf{(A)}$$

Σε 1ο στάδιο η επιχείρηση δεν έχει ξεκινήσει την παραγωγή των μονάδων άρα τα xi=0 δηλαδή x1=x2=x3=0. Αντικαθιστώ στους περιορισμούς (Α) και έχουμε τα εξής

S1=30

-S2=60 **πρόβλημα**

0=20 **πρόβλημα**

Παρατηρούμε ότι 2 περιορισμοί παρουσιάζουν *πρόβλημα* (στον μεν πρώτο γιατί δεν είναι δυνατό να έχουμε αρνητική τιμή στο δε δεύτερο γιατί το 0 δεν ισούται με 20)

Στους περιορισμούς οι οποίοι παρουσιάζουν αρνητικές τιμές ή ισότητες που δεν ισχύουν προσθέτουμε τις τεχνικές μεταβλητές ai

Στους περιορισμούς της μορφής (>=)εκτός από μεταβλητή περιθωρίου Si προσθέτουμε και μια τεχνίτη μεταβλητή(ai). Η τεχνική αυτή μεταβλητή **δεν εκφράζει τίποτα** όπως η μεταβλητή περιθωρίου, την χρησιμοποιούμε απλά για να βγει η άσκηση με τη μέθοδο αυτή. Αυτό εξηγείται αν παρατηρήσετε πιο κάτω.

Άρα οι περιορισμοί (Α) μετατρέπονται όπως οι παρακάτω:

x1+x2+x3+S1=30

2x1+x2+3x3-S2+a2=60

x1-x2+2x3+a3=20

Βήμα2ο:Πρέπει να βρω την νέα αντικειμενική συνάρτηση στην οποία πρέπει να εμφανίζονται όλες οι μεταβλητές. Οι μεταβλητές περιθωρίου (Si) παίρνουν την τιμή 0 σαν συντελεστή τους. Οι τεχνητές μεταβλητές ai παίρνουν **συντελεστή -Μ για max και +Μ για min**.

Το Μ είναι ένας μεγάλος αριθμός που πλησιάζει το άπειρο. Άρα η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται:

Minz=2x1-3x2-4x3+0S1+0S2+Ma2+Ma3

Αρα ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΑΣ ΣΕ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΙΝΑΙ :

Min z=2x1-3x2-4x3+0S1+0S2+Ma2+Ma3

St

x1+x2+x3+S1=30

2x1+x2+3x3-S2+a2=60

x1-x2+2x3+a3=20

Βήμα3ο: Βρίσκω τις βασικές μεταβλητές. Είναι αυτές οι οποίες έχουν συντελεστή +1 σε έναν περιορισμό και στους υπόλοιπους περιορισμούς έχουν συντελεστή 0. Αυτές είναι οι S1, a2, a3

Βήμα4ο:Συμπληρώνω τον πίνακα. Για κάθε μεταβλητή βρίσκω τους συντελεστές της από όλους τους περιορισμούς.

Συντελ.	Βασικές		2	-3	-4	0	0	+M	+M
Cj	Μεταβλητές	χ1	χ2	χ3	S1	S2	a2	a3	Bi
0	**S1**	1	1	1	1	0	0	0	30
+M	**a2**	2	-1	3	0	-1	1	0	60
+M	**a3**	1	1	2	0	0	0	1	20
	Zj	3M	0	5M	0	-M	M	M	
	Cj-Zj	2-3M	-3	-4-5M	0	M	0	0	

Βήμα5ο:Υπολογισμός του Zj. Πολλαπλασιάζω τους συντελεστές των βασικών μεταβλητών με τους συντελεστές κάθε μετβλητής μέσα στον ίνακα

Για τη μεταβλητή χ1 το Zj είναι

0 1=0 |

M * 2=2M |=> αθροίζω το αποτέλεσμα άρα είναι = 3M

M 1=M |

Βήμα6ο:Σε κάθε πίνακα Simplex πρέπει να βρίσκω τη βέλτιστη τιμή και βέλτιστη λύση. Βέλτιστη τιμή ισούται με τον πολλαπλασιασμό των συντελεστών των βασικών μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης με τη στήλη Bi**. Βέλτιστη τιμή στο πρόβλημα είναι** 0*30+M*60+M*20=80M

Βέλτιστη λύση αντιστοιχώ τις βασικές μεταβλητές με τις τιμές της στήλης Bi

S1=30, a2=60, a3=20

	Βασικές	2	-3	-4	0	0	+M	+M	
Cj	Μεταβλητές	χ1	χ2	χ3	S1	S2	a2	a3	Bi
0	S1	1	1	1	1	0	0	0	30
+M	a2	2	-1	3	0	-1	1	0	60
+M	a3	1	1	2	0	0	0	1	20
	Zj	3M	0	5M	0	-M	M	M	
	Cj-Zj	2-3M	-3	-4-5M	0	M	0	0	

min=0*30+M60+M20=80M **οδηγός στήλη**

Βήμα7ο:Επιλέγω από τη σειρά Cj- Zj, τη μεγαλύτερη αρνητική τιμή για προβλήματα Min (την μεγαλύτερη θετική τιμή για max) και ονομάζω τη στήλη αυτή οδηγό στήλη, η μεταβλητή αυτή γίνεται βασική στον επόμενο πίνακα.

Βήμα8ο:Διαιρώ τις τιμές της στήλης Bi με τα στοιχεία της οδηγού στήλης, και το μικρότερο αποτέλεσμα εκφράζει τη μεταβλητή που θα φύγει (σε περιπτώσεις που διαιρούμε με αρνητική τιμή ή με μηδέν βάζουμε μετά το = ----) *σε περίπτωση που τελικά διώξω τεχνίτη μεταβλητή δεν υπολογίζω τις τιμές της για όλους τους επόμενους πίνακες Simplex που ακολουθούν*.

	Βασικές	2	-3	-4	0	0	+M	+M		
Cj	Μεταβλητές	χ1	χ2	χ3	S1	S2	a2	a3	Bi	
0	S1	1	1	1	1	0	0	0	30	30/1=30
+M	a2	2	-1	3	0	-1	1	0	60	60/3=20
+M	a3	1	1	2	0	0	0	1	20	2 0/2=10 -->
	Zj	3M	0	5M	0	-M	M	M		
	Cj-Zj	2-3M	-3	-4-5M	0	M	0	0		

min=0*30+M60+M2=80M **οδηγός στήλη άρα η χ3 θα γίνει βασική στο επόμενο πίνακα**

Πίνακας 2

	Βασικές	2	-3	-4	0	0	+M	+M	
Cj	Μεταβλητές	χ1	χ2	χ3	S1	S2	a2	a3	Bi
0	S1	1/2	3/2	0	1	0	0	/	20 40/3=13
+M	a2	1/2	5/2	0	0	-1	1	\	30 60/5=12-> -4
	χ3	1/2	-1/2	1	0	0	0	/	10 10/-0.5= ---
	Zj	(M/2)-2	(5M/2)+2	-4	0	-M	M	\	min= M30-40
	Cj-Zj	(M/2)-4	-5-(5M/2)	0	0	M	0	/	

Βήμα9ο:Σε κάθε νέο πίνακα Simplex υπολογίζω πάντα τη σειρά της μεταβλητής που έγινε βασική (εδώ η χ3). Η σειρά της νέας βασικής μεταβλητής = αν διαιρέσω όλη τη σειρά της μεταβλητής που έφυγε (δηλ. α3) με το οδηγό της στοιχείο της σειράς αυτής (δηλ. στην οδηγό στήλη πιο είναι το οδηγό στοιχείο της α3? Είναι το **2**).

Βήμα10ο: Για τις μεταβλητές που ήταν και στον προηγούμενο και στον νέο πίνακα οι σειρές τους υπολογίζονται από τον ακόλουθο τύπο

Νέα σειρά νέου πίνακα= αντίστοιχη γραμμή προηγούμενου πίνακα- (οδηγό στοιχείο της μεταβλητής * νέα σειρά βασικής μεταβλητής)

Υπολογισμός για την S1	**χ1**	**χ2**	**χ3**	**S1**	**S2**	**a2**	**Bi**
προηγούμενη σειρά s1	1	1	1	1	0	0	30

Οδηγό. Στοιχείο *Νέα σειρά	1*1/2	1(-1/2)	1*1	0*1	0*1	0*1	10*1

αφαιρώ	1/2	3/2	0	1	0	0	→ 20

αυτή είναι η νέα σειρά της S1. Ομοίως υπολογίζω τη νέα σειρά της a2.

	Βασικές	2	-3	-4	0	0	+M	+M	
Cj	Μεταβλητές	χ1	χ2	χ3	S1	S2	a2	a3	Bi
0	S1	1/5	0	0	1	3/5	\	/	2 2/(3/5)=10/3 ->
-3	χ2	1/5	1	0	0	-2/5	/	\	12 --
-4	χ3	3/5	0	1	0	-1/5	\	/	16 --
	Zj	-3	-3	-4	0	2	/	\	min= 2*0+(-3)*12+
	Cj-Zj	5	0	0	0	-2	\	/	+(-4)*16=-100

οδηγός στήλη

	Βασικές	2	-3	-4	0	0	+M	+M	
Cj	Μεταβλητές	χ1	χ2	χ3	S1	S2	a2	a3	Bi
0	S2	1/3	0	0	5/3	1	\	/	10/3
-3	χ2	1/3	1	0	2/3	0	/	\	40/3
-4	χ3	2/3	0	1	1/3	0	\	/	50/3
	Zj	-11/3	3	-4	-10/3	0	/	\	min= -320/3
	Cj-Zj	17/3	0	0	10/3	0	\	/	

Βήμα11ο: Όταν οι τιμές της σειράς Cj-Zj είναι όλες μηδενικές ή αρνητικές (για προβλήματα max) **ή** θετικές ή μηδενικές (για προβλήματα min) τότε ο πίνακας αυτός είναι ο βέλτιστος πίνακας και γράφουμε τη λύση του και τη βέλτιστη τιμή του.

Τιμή:

Min= -320/3

Λύση: S2=10/3 x3=50/3 x2=40/3 (από τη στήλη Bi)

Για τις υπόλοιπες μεταβλητές τις θέτουμε =0 δηλ. s1=a1=a2=0

4.1.3 β) Παράδειγμα 2[36]

Το παράδειγμα βρίσκεται ήδη σε τυποποιημένη μορφή:

Αρχ. συνάρτηση μέγιστο P=60X1+40X2

περιορισμοί:

1) X1+X2≤50
2) 40X1+20X2≤1400
3) X1,X2≥0

Οι παραπάνω ανισότητες βάση των νέων μεταβλητών γίνονται:

1) X1+X2+S1=50
2) 40X1+20X2+S2=1400

36 http://users.teiath.gr/vmouss/ebooks/optimee/sections/section13_MethodosSimplex.html

Για να καταλάβουμε το ρόλο των νέων μεταβλητών αρκεί να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα X1=20 και X2=30

Δημιουργούμε αυτό που αποκαλούμε Αρχικό Σύστημα της Μεθόδου *Simplex*:

α) X1+X2+S1=50
β) 40X1+20X2+S2=1400
γ) -60X1-40X2+P=0

Για να διευκολύνουμε τους υπολογισμούς της μεθόδου τοποθετούμε το αρχικό σύστημα των τριών εξισώσεων σε μορφή πίνακα ως εξής:

Β.μ.	X_1	X_2	S_1	S_2	P	
S_1	1	1	1	0	0	50
S_2	40	20	0	1	0	1400
P	-60	-40	0	0	1	0

Ο αρχικός πίνακας simplex περιέχει την αρχική βασική εφικτή λύση που είδαμε παραπάνω. Για (X1=0, X2=0) οι τιμές των βασικών μεταβλητών δίνονται στην τελευταία στήλη.

Το επόμενο στάδιο περιλαμβάνει τόσα επαναληπτικά βήματα όσα χρειαστεί ώστε να φτάσουμε στη βέλτιστη λύση..

Β.μ.	**X_1**	X_2	S_1	S_2	P		
S_1	1	1	1	0	0	50	50/1=50
S_2	40	20	0	1	0	1400	**1400/40=35**
P	**-60**	-40	0	0	1	0	

Η αντικατάσταση της μεταβλητής S2 από την εισερχόμενη X1 γίνεται ως εξής:

A) Διαιρούμε την οδηγό γραμμή με το οδηγό στοιχείο ώστε αυτό να γίνει 1 (αν είναι ήδη 1 τότε το βήμα αυτό παραλείπεται).

40	20	0	1	0	1400

/ 40=

1	1/2	0	1/40	0	35

Επομένως ο πίνακας simplex γίνεται:

Β.μ.	X_1	X_2	S_1	S_2	P	
S_1	1	1	1	0	0	50
S_2	1	1/2	0	1/40	0	35
P	-60	-40	0	0	1	0

B) Προσθαφαιρούμε ανάλογα την οδηγό γραμμή στις υπόλοιπες γραμμές, όσες φορές χρειάζεται, για να γίνουν μηδέν τα υπόλοιπα στοιχεία της οδηγού στήλης.

1	1	1	0	0	50

\-

1	1/2	0	1/40	0	35

=

0	1/2	1	-1/40	0	15

Και

-60	-40	0	0	1	0

\+ 60 ·

1	1/2	0	1/40	0	35

=

0	-10	0	60/40	0	2100

<u>Επομένως ο πίνακας Simplex γίνεται:</u>

Β.μ.	X_1	X_2	S_1	S_2	P	
S_1	0	1/2	1	-1/40	0	15
X_1	1	1/2	0	1/40	0	35
P	0	-10	0	60/40	1	2100

Γ) Τοποθετούμε τη μεταβλητή Χ1 στις βασικές μεταβλητές και βλέπουμε το αποτέλεσμα στην τελευταία στήλη. Η λύση που παίρνουμε είναι Χ1=35, Χ2=0 και δίνει κέρδος P=2100 που είναι σαφώς καλύτερο από το 0 της αρχικής λύσης. Η παρουσία αρνητικών αριθμών μας δείχνει ότι η λύση μπορεί να βελτιωθεί κι άλλο.

Στο βήμα αυτό επιλέγουμε σαν εισερχόμενη τη μεταβλητή Χ2 που αυξάνει το P περισσότερο και σαν εξερχόμενη την S1 που περιορίζει την Χ2.

Β.μ.	X_1	X_2	S_1	S_2	P		
S_1	0	1/2	1	-1/40	0	15	15/ ½=30
X_1	1	1/2	0	1/40	0	35	35/ ½=70
P	0	-10	0	60/40	1	2100	

Α) Κάνουμε 1 το οδηγό στοιχείο διαιρώντας όλη τη γραμμή με αυτό

0	1/2	1	-1/40	0	15

/ ½=

0	1	2	-2/40	0	30

Και έτσι ο πίνακας παίρνει τη μορφή:

Β.μ.	X_1	X_2	S_1	S_2	P	
S_1	0	1	2	-2/40	0	30
X_1	1	1/2	0	1/40	0	35
P	0	-10	0	60/40	1	2100

Β) Κάνουμε 0 τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης προσθαφαιρώντας ανάλογα την οδηγό γραμμή

1	1/2	0	1/40	0	35

- ½·

0	1	2	-2/40	0	30

=

1	0	-1	2/40	0	20

Και

0	-10	0	60/40	1	2100

+ 10 ·

0	1	2	-2/40	0	30

=

0	0	20	2	1	2400

Και έτσι ο πίνακας παίρνει τη μορφή:

Β.μ.	X_1	X_2	S_1	S_2	P	
X_2	0	1	2	-2/40	0	30
X_1	1	0	-1	2/40	0	20
P	0	0	20	2	1	2400

Γ) Τοποθετούμε τη μεταβλητή X2 στις βασικές μεταβλητές και διαβάζουμε τη λύση στην τελευταία στήλη. Η λύση που παίρνουμε είναι X1=20, X2=30 και δίνει κέρδος P=2400, που είναι καλύτερο από το 2100 της προηγούμενης λύσης.

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε την γραμμή του P ότι δεν έχουμε πλέον αρνητικούς αριθμούς. Συνεπώς έχουμε βρει τη βέλτιστη λύση.

4.1.4 Δυϊκή Μέθοδος

Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού συνδέεται με ένα νέο πρόβλημα το οποίο ονομάζεται δυϊκό (dual), ενώ το αρχικό πρόβλημα ονομάζεται πρωτεύον (primal). Το δυϊκό πρόβλημα παρέχει σημαντικές πληροφορίες οικονομικού χαρακτήρα σχετικά με τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος, διευρύνοντας τον κύκλο των αποτελεσμάτων στην περιοχή της οριακής οικονομικής ανάλυσης.

Ενώ το πρωτεύον π.γ.π. διαπραγματεύεται το πρόβλημα εντοπισμού βέλτιστου προγράμματος που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος ή ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος, το δυϊκό μοντέλο από την άλλη πλευρά διαπραγματεύεται ακριβώς το ίδιο πρόβλημα από την πλευρά των πόρων. Πολλές φορές δυνατό αλλά και σημαντικότερο για την επιχείρηση να μπορεί να εξασκήσει έλεγχο στους διαθέσιμους πόρους και στον τρόπο με τον οποίο συνεισφέρουν στο κέρδος. Το δυϊκό π.γ.π. (και η λύση του) συνδράμει στη θεώρηση το ιδίου προβλήματος από την πλευρά της αξίας των πόρων που χρησιμοποιούνται στο βέλτιστο πρόγραμμα και μπορεί να βοηθήσει στη λήψη αποφάσεων σχετικά με την απόκτηση ή μη επιπλέον πόρων.

4.1.4.1 Κατασκευή του δυϊκού π.γ.π.

Το δυϊκό π.γ.π. μπορεί να κατασκευαστεί από οποιοδήποτε αρχικό π.γ.π. χρησιμοποιώντας τους παρακάτω κανόνες:

1. Το δυϊκό π.γ.π. είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης όταν το πρωτεύον είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης (και αντίστροφα).

2. Σε κάθε περιορισμό του πρωτεύοντος π.γ.π. αντιστοιχεί μια μεταβλητή του δυϊκού προβλήματος. Το δυϊκό π.γ.π. έχει τόσες μεταβλητές απόφασης (πλήθους m) όσοι και οι περιορισμοί του πρωτεύοντος οι οποίες ονομάζονται δυϊκές μεταβλητές (dual variables).

3. Αν ένας περιορισμός i ($i = 1, 2, \ldots, m$) του αρχικού π.γ.π. είναι της μορφής $\leq$ η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή w_i θα είναι μη αρνητική δηλαδή $w_i \geq 0$.

Εάν ένας περιορισμός i του αρχικού είναι της μορφής η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή θα είναι μη θετική δηλαδή $\geq$ η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή w_i θα είναι μη θετική δηλαδή $w_i \leq 0$.

Εάν ένας περιορισμός i του αρχικού προβλήματος είναι ισότητα, η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή w_i δε θα περιορίζεται ως προς το πρόσημο δηλαδή $w_i \in R$.

4. Σε κάθε μεταβλητή απόφασης του πρωτεύοντος π.γ.π. αντιστοιχεί ένας δυϊκός περιορισμός - το δυϊκό π.γ.π. έχει τόσους περιορισμούς (πλήθους n) όσες και οι μεταβλητές απόφασης του πρωτεύοντος.

5. Εάν μία μεταβλητή απόφασης του αρχικού είναι μη αρνητική δηλαδή $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του δυϊκού είναι της μορφής $\geq$.

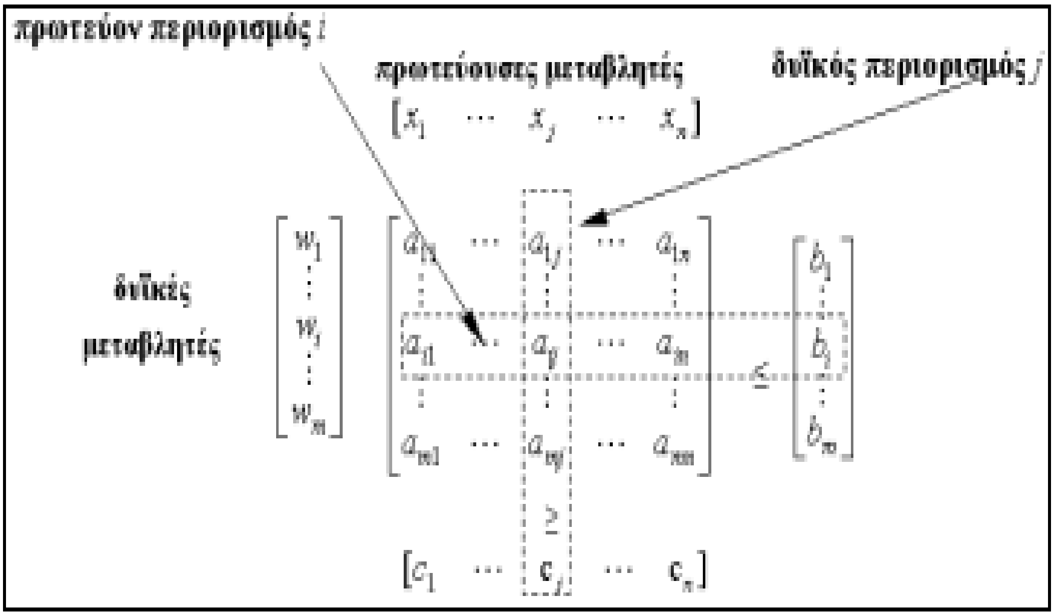
Εάν μία μεταβλητή απόφασης του αρχικού είναι μη θετική δηλαδή $x_j \leq 0$, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του δυϊκού είναι της μορφής ≤.

Εάν μία μεταβλητή απόφασης του αρχικού δεν περιορίζεται ως προς το πρόσημο Δηλαδή $x_j \in R$, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του δυϊκού είναι ισότητα.

6. Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού π.γ.π. προκύπτουν από τα δεξιά μέλη των περιορισμών του αρχικού π.γ.π., $(b_1,b_2, \ldots, b_m)$

7. Τα δεξιά μέλη των περιορισμών του δυϊκού π.γ.π. προκύπτουν από τους αντικειμενικούς συντελεστές του πρωτεύοντος π.γ.π. $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Ο τρόπος αντιστοίχισης των μεταβλητών του ενός προβλήματος με τους περιορισμούς του άλλου, καθώς και η σχέση μεταξύ των δομών του πρωτεύοντος π.γ.π. και του δυϊκού του, αποδίδονται παραστατικά στο παρακάτω σχήμα:



4.1.4.2 Προβλήματα Ελαχιστοποίησης – Δυϊκό Πρόβλημα

Μέχρι εδώ παρουσιάστηκε αναλυτικά και με παραδείγματα η μέθοδος Simplex για τα προβλήματα **μεγιστοποίησης** του «κέρδους», δηλ., για τα προβλήματα που έχουν τους περιορισμούς με « $\leq$ » και την αντικειμενική συνάρτηση « max(P) ».

Η άλλη μεγάλη κατηγορία προβλημάτων είναι τα **προβλήματα ελαχιστοποίησης** του «κόστους», δηλ., τα προβλήματα που έχουν τους περιορισμούς με « $\geq$ » και την αντικειμενική συνάρτηση « min(C) ».

Όπως αποδεικνύεται θεωρητικά, για κάθε πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να διατυπωθεί ένα αντίστοιχο πρόβλημα μεγιστοποίησης το οποίο λέγεται **δυϊκό πρόβλημα**. Όταν λύσουμε το δυϊκό πρόβλημα μεγιστοποίησης με τη μέθοδο Simplex, έχουμε ταυτόχρονα λύσει και το αρχικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Έστω ότι μας δίνεται ένα ΠΓΠ ελαχιστοποίησης όπως το παρακάτω:

ΥΤΠ:

$2 \cdot X1 + 5 \cdot X2 \geq 50$

$X1 + 3 \cdot X2 \geq 27$

$X1, X2 \geq 0$

ΑΣ:

Να ελαχιστοποιηθεί το: $C = 16 \cdot X1 + 45 \cdot X2$

Το Δυϊκό Πρόβλημα ορίζεται ως εξής: α) γράφουμε τους συντελεστές των περιορισμών και του κόστους σε μορφή πίνακα, β) βρίσκουμε τον ανάστροφό του, και, γ) από τον νέο πίνακα ξαναδημιουργούμε νέους περιορισμούς με ≤ και την νέα ΑΣ κέρδους P:

$$\begin{array}{c} 2\cdot X1 + 5\cdot X2 \geq 50 \\ X1 + 3\cdot X2 \geq 27 \\ 16\cdot X1 + 45\cdot X2 = C \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 2 & 5 & 50 \\ \mathbf{1} & 3 & 27 \\ \mathbf{16} & \mathbf{45} & C \end{array} \underset{\Rightarrow}{\text{Αναστροφή}} \begin{array}{ccc} 2 & \mathbf{1} & \mathbf{16} \\ 5 & 3 & \mathbf{45} \\ 50 & 27 & P \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 2\cdot Y1 + Y2 \leq 16 \\ 5\cdot Y1 + 3\cdot Y2 \leq 45 \\ 50\cdot Y1 + 27\cdot Y2 = P \end{array}$$

ΥΤΠ:

$2\cdot Y1 + Y2 \leq 16$
$5\cdot Y1 + 3\cdot Y2 \leq 45$
$Y1, Y2 \geq 0$

ΑΣ:

Να μεγιστοποιηθεί το: $P = 50\cdot Y1 + 27\cdot Y2$

Λύνοντας το δυϊκό πρόβλημα μεγιστοποίησης με τη μέθοδο Simplex, όταν βρούμε τη βέλτιστη λύση, οι μεταβλητές περιθωρίου θα περιέχουν τη βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος ελαχιστοποίησης. Για το λόγο αυτό τις μεταβλητές περιθωρίου τις ονομάζουμε με X1, X2, κλπ., αντί των S1, S2, κλπ.

4.1.4.2 α) Παράδειγμα Λύσης

Αν λύσουμε το παραπάνω παράδειγμα θα έχουμε:

Αρχικό Σύστημα Simplex:

$$\begin{array}{l} 2\cdot Y1 + Y2 + X1 = 16 \\ 5\cdot Y1 + 3\cdot Y2 + X2 = 45 \\ -50\cdot Y1 - 27\cdot Y2 + P = 0 \end{array}$$

Αρχικός Πίνακας Simplex:

β.μ.	**Y1**	Y2	X1	X2	P		
X1	2	1	1	0	0	16	**16/2=8**
X2	5	3	0	1	0	45	45/5=9
P	**-50**	-40	0	0	1	0	

1η επανάληψη της Simplex:

β.μ.	Y1	**Y2**	X1	X2	P		
Y1	1	½	½	0	0	8	16
X2	0	½	-5/2	1	0	5	**10**
P	0	**-2**	25	0	1	400	

2η επανάληψη της Simplex:

β.μ.	Y1	Y2	**X1**	**X2**	P	
Y1	1	0	3	-1	0	3
Y2	0	1	-5	2	0	10
P	0	0	**15**	**4**	1	**420**

Το δυϊκό πρόβλημα έχει βέλτιστη λύση τη Y1 = 3, Y2 = 10 & P = 420,

Το αρχικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης θα έχει βέλτιστη λύση τη X1 = 15, X2 = 4 & C = 420, η οποία δίνεται από τη τελευταία γραμμή του πίνακα Simplex της τελικής λύσης στις αντίστοιχες στήλες των μεταβλητών περιθωρίου.

4.1.4.2 β) Γενική Μεθοδολογία Επίλσης[37]

- Να βρεθεί το δυικό πρόβλημα του αρχικού:

Min 6x1+5x2-3x3

s.t.

2x1-7x2 +3x3>=5

x1+4x2+2x3=7

3x1+2x2+ x3=<10

x1+ x2 =<8

μεταβλητές x1, x2>=0

x3ER

[37] Παραδείγματα από ασκήσεις εργαστηρίου (Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα 1) Κα. Μιχοπούλου. ΤΕΙ Πατρών.

- Οι δυϊκές τιμές του προβλήματος εκφράζουν την αξία των πρώτων υλών και μπορούμε να υπολογίσουμε τα επιπλέον κόστη που αποτελούν μεγάλης οικονομικής σημασίας.
- Η λύση (βέλτιστη τιμή) του δυϊκού προβλήματος είναι ίδια με την βέλτιστη τιμή του αρχικού προβλήματος.

Βήμα 1ο: Ορίζω νέες μεταβλητές yi όσοι είναι οι περιορισμοί του αρχικού προβλήματος

Τις μεταβλητές αυτές τις αναγράφουμε δεξιά από τους περιορισμούς του αρχικού προβλήματος

2x1-7x2+3x3>=5	y1
X1+4x2+2x3=7	y2
3x1+2x2+x3=<10	y3
X1+x2=<8	y4

Βήμα 2ο: Πολλαπλασιάζω τις μεταβλητές yi με τις δεξιές σταθερές των περιορισμών του αρχικού προβλήματος. Η εξίσωση αυτή εκφράζει την αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού προβλήματος

Max=5y1+7y2+10y3+8y4

Βήμα 3ο: Υπολογισμός των περιορισμών: πολλαπλασιάζω τη στήλη yi με τους συντελεστές όλων των περιορισμών της κάθε μεταβλητής στο αρχικό πρόβλημα.

(X1)=>2y1+y2+3y3+y4	π.χ.	**2x1**-7x2+3x3>=5	y1
		x1+4x2+2x3=7	y2
		3x1+2x2+x3=<10	y3
		x1+x2=<8	y4

(x2)=>-7y1+4y2+2y3+y4

(x3)=>3y1+2y2+y3+0y4

Βήμα 4ο: Δεξιές σταθερές των περιορισμών του δυϊκού προβλήματος: ο συντελεστής της αντίστοιχης μεταβλητής στην αντικειμενική συνάρτηση του αρχικού προβλήματος είναι η δεξιά σταθερά του κάθε περιορισμού στο δυϊκό πρόβλημα.

(X1)=>2y1+y2+3y3+y4	6	
(x2)=>-7y1+4y2+2y3+y4	5	Min **6**x1+**5**x2-**3**X3
(x3)=>3y1+2y2+y3+0y4	-3	

Βήμα 5ο: Η φορά των περιορισμών και οι τιμές του δυϊκού προβλήματος βρίσκονται από τον πίνακα αυτόν που έχουμε σχεδιάσει.

max=>min

min=>max

	>=	>=	
Περιορισμοί	=	εR	Μεταβλητές
	=<	=<	
	>=	=<	
Μεταβλητές	=<	>=	Περιορισμοί
	εR	=	

Η φορά των μεταβλητών του δυικού τη βρίσκουμε από τη φορά των περιορισμών στο αρχικό πρόβλημα.

2x1-7x2+3x3>=5 y1 άρα με βάση τον αρχικό πίνακα το y1>=0. Ομοίως για τις υπόλοιπες μεταβλητές

X1+4x2+2x3= 7 y2 αφού ο περιορισμός είναι = βάση του πίνακα το y2 ER κλπ………

$3x1+2x2+x3=<10$ y3

$X1+x2=<8$ y4

Βρήκαμε λοιπόν την φορά των μεταβλητών

$Y1>=0$

Y2 ER

$Y3=<0$

$Y4=<0$

Μένει να βρούμε την φορά των περιορισμών. Κοιτάμε πάλι τον πίνακα αλλά τώρα για να βρούμε την φορά των περιορισμών του δυικού κοιτάμε την φορά των μεταβλητών στο αρχικό πρόβλημα.

Οι μεταβλητές του αρχικού προβλήματος είναι x1, x2>=0 & x3 ER

(X1)=> $2y1+y2+3y3+y4<=6$ (ο 1ος περιορισμός του δυικού δημιουργήθηκε από τους συντελεστές του x1 από **όλους** τους περιορισμούς. Άρα αφού η μεταβλητή x1 είναι >= με βάση τον πίνακα ο περιορισμός του δυικού θα είναι <=)

(x2)=> $7y1+4y2+2y3+y4 <=5$

(x3)=> $3y1+2y2+y3+0y4 =-3$

Βήμα 6ο: Γράφω το τελικό δυικό πρόβλημα

Αρχικό	**Δυικό**
Min 6x1+5x2-3X3	Max=5y1+7y2+10y3+8y4
s.t.	s.t.
2x1-7x2+3x3>=5	2y1+y2+3y3+y4<=6
X1+4x2+2x3=7	7y1+4y2+2y3+y4<=5
3x1+2x2+x3=<10	3y1+2y2+y3+0y4=-3
x1+x2=<8	
μεταβλητές x1, x2>=0	μεταβλητές y1>=0
x3ER	y2 ER,
	y3=<0
	y4=<0

4.2 <u>Προσομοίωση</u>

Προσομοίωση (simulation) ονομάζουμε την τεχνική αναπαράστασης της λειτουργίας ενός πραγματικού συστήματος σε ένα μοντέλο, στο οποίο απεικονίζονται τα χαρακτηριστικά του πραγματικού συστήματος με σκοπό τη διεξαγωγή πειραμάτων είτε για να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά του, είτε για να εκτιμήσουμε τις στρατηγικές που χρησιμοποιεί. Είναι μια από τις πιο σημαντικές τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας την οποία τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιούν διάφοροι κλάδοι όπως, η ιατρική, η φυσική, οι μηχανικοί αεροσκαφών, οι μηχανικοί-σχεδιαστές κτιρίων, γεφυρών και πολλών άλλων, για τη μελέτη πολύπλοκων συστημάτων. Παρ' ότι εμφανίζεται αρκετά μεταγενέστερα, η τεχνική προσομοίωσης εφαρμόζεται αρκετές φορές επειδή η ανάπτυξη ενός αναλυτικού μαθηματικού μοντέλου για ένα πολύπλοκο σύστημα είναι δύσκολη έως αδύνατη.

Η προσομοίωση είναι μια τεχνική που δεν οδηγεί στη βέλτιστη λύση μέσω μιας συγκεκριμένης μαθηματικής διαδικασίας, αλλά μας δίνει την ευχέρεια να πειραματιστούμε με το σύστημα δοκιμάζοντας διάφορες λύσεις ώσπου να πετύχουμε τη βέλτιστη. Στη μέθοδο αυτή χρησιμοποιούνται κυρίως λογικά μοντέλα παρά μαθηματικές σχέσεις. Ο τρόπος αυτός παράστασης με τον οποίο μελετούνται τέτοιου είδους προβλήματα είναι τα διαγράμματα ροής. Πρόκειται για μια ιδιαίτερα αποτελεσματική τεχνική που χρησιμοποιείται για να δοκιμάσουμε διάφορες αλλαγές και να πάρουμε αποφάσεις σχετικά με τη λειτουργία της επιχείρησης μας. Δημιουργεί ένα εικονικό επιχειρηματικό περιβάλλον πάνω στο οποίο εφαρμόζονται εναλλακτικές λύσεις και εξετάζονται σε πραγματικές συνθήκες δίνοντας μας αποτελέσματα που θα παίρναμε εάν τις είχαμε εφαρμόσει σε επιχειρήσεις σε πραγματικό περιβάλλον. Οι δοκιμές αυτές αν γίνονταν σε πραγματικό επιχειρηματικό περιβάλλον θα ήταν αφενός πολύ χρονοβόρες και αφετέρου θα κόστιζαν τόσο πολύ που θα ήταν σχεδόν αδύνατον να επιβιώσει οικονομικά μια επιχείρηση. Έτσι η τεχνική της προσομοίωσης μπορεί να αποτρέψει επιχειρήσεις από λανθασμένες αποφάσεις που θα τους κόστιζαν πάρα πολύ χρόνο και χρήμα.

Στο χώρο των επιχειρήσεων η προσομοίωση είναι η τεχνική η οποία ελέγχει πόσο αποτελεσματικά χρησιμοποιούνται, το εργατικό δυναμικό, τα μηχανήματα, οι εγκαταστάσεις και οποιαδήποτε άλλα μέσα διαθέτει η κάθε επιχείρηση και τις διαδικασίες εκείνες που πρόκειται να πραγματοποιηθούν κατά την παραγωγική διαδικασία και να λαμβάνει βέλτιστες αποφάσεις για θέματα εξοπλισμού, στελέχωσης και ροής εργασιών μιας επιχείρησης. Τις βοηθάει να βελτιώσουν τις παραγωγικές τους διαδικασίες και μπορεί να εξετάσει ολόκληρο το τμήμα της παραγωγικής διαδικασίας, τον τρόπο λειτουργίας της αποθήκης, τα ωράρια εργασίας του προσωπικού, την χρήση του εξοπλισμού της επιχείρησης και μας βοηθά στον εντοπισμό και στην διόρθωση των προβλημάτων που θα προκύψουν.

Σκοπός της προσομοίωσης είναι να γνωρίζουμε εκ των προτέρων την αντίδραση των αποφάσεων που λαμβάνουμε και τη μελέτη εναλλακτικών σεναρίων στο σύστημα που εξετάζουμε και συνίσταται η χρήση της από επιχειρήσεις:

- για τη μελέτη πολύπλοκων προβλημάτων-συστημάτων
- για τη μελέτη και σύγκριση εναλλακτικών σχεδίων σε ένα σύστημα που δεν υπάρχει
- για τη μελέτη μεταβολών και επιπτώσεων που τυχών φέρουν σε ένα υπάρχον σύστημα
- για την επαλήθευση αναλυτικών λύσεων.

4.2.1 Παραδείγματα προσομοίωσης (simulation)

1) Ένα από τα πιο γνωστά παραδείγματα προσομοίωσης είναι το σύστημα εκμάθησης χειρισμού αεροπλάνων. Τα κέντρα και οι σχολές εκπαίδευσης πιλότων χρησιμοποιούν την μέθοδο της προσομοίωσης ως βασικό εργαλείο για την εκπαίδευση πιλότων πολιτικών και πολεμικών αεροσκαφών. Οι υποψήφιοι μαθαίνουν να χειρίζονται τα αεροσκάφη κατά την απογείωση, την προσγείωση σε καλές αλλά και σε άσχημες καιρικές συνθήκες, μαθαίνουν να αντιμετωπίζουν τυχόν μηχανικά προβλήματα την ώρα της πτήσης σε εικονικό πιλοτήριο το οποίο είναι ακριβές αντίγραφο του πραγματικού. Είναι ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα εφαρμογής της προσομοίωσης αν σκεφτεί κανείς τις συνέπειες που θα είχε η εκπαίδευση των πιλότων σε πραγματικά αεροσκάφη και σε πραγματικό περιβάλλον. Το ίδιο ισχύει και για το χειρισμό πλοίων, αγωνιστικών αυτοκινήτων και όλων των οχημάτων που

χρήζουν ιδικού χειρισμού. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η προσομοίωση χρησιμοποιείται και ως παιχνίδια σε χώρους διασκέδασης.

2) Ένα ακόμα παράδειγμα προσομοίωσης είναι η αυτοκινητοβιομηχανία. Στον τομέα αυτόν η προσομοίωση είναι ένα σημαντικό εργαλείο, τη στιγμή που τα εργοστάσια παραγωγής αυτοκινήτων έχουν περάσει σε ένα νέο είδος ανταγωνισμού μεταξύ τους. Η εφαρμογή ηλεκτρικών και ηλεκτρονικών συστημάτων καθώς και ο συνδυασμός μεγάλης ιπποδύναμης, της ταυτόχρονης μείωσης της κατανάλωσης καυσίμου και της μείωσης του χρόνου παραγωγής των νέων αυτοκινήτων, είναι κάποιοι από τους λόγους εφαρμογής της προσομοίωσης. Με τη μέθοδο της προσομοίωσης οι αυτοκινητοβιομηχανίες δεν χρειάζεται να κατασκευάζουν πρότυπα μοντέλα, ελαχιστοποιούν τους ελέγχους και παραλείπουν τους τεχνικούς ελέγχους κατά την παραγωγή των αυτοκινήτων.

4.2.2 <u>Ουρές αναμονής</u>

Η μέθοδος αυτή της επιχειρησιακής έρευνας δεν είναι τίποτα άλλο παρά η καθημερινότητα μας και πιο συγκεκριμένα οποιαδήποτε ουρά θα μπορούσε να αντιμετωπίσει ο καθένας από εμάς στην καθημερινή του ζωή. Η λειτουργία και η διαχείριση των ουρών αναμονής παίζει σημαντικό ρόλο στις επιχειρηματικές δραστηριότητες (διακίνηση α’ υλών στα παραγωγικά στάδια, από τη στιγμή που θα φύγουν από την αποθήκη μέχρι και τη στιγμή που θα ολοκληρωθεί το προϊόν, θα συσκευαστεί και θα διατεθεί στην αγορά) τόσο στον ιδιωτικό όσο και στο δημόσιο τομέα.

4.2.2.1 <u>Προβλήματα που βρίσκουν λύση στις Ουρές αναμονής</u>

Ουρές αναμονής θα μπορούσαμε να συναντήσουμε σε αρκετά σημεία και αρκετούς κλάδους όπως:

• αυτοκίνητα που περιμένουν να περάσουν διόδια
• αυτοκίνητα που περιμένουν σε πρατήριο υγρών καυσίμων
• ασθενείς στα έκτακτα ενός νοσοκομείου
• φοιτητές την ημέρα των εγγραφών
• στις τράπεζες, οι πελάτες που περιμένουν στα ταμεία
• φαντάροι που περιμένουν να τους σερβίρουν το φαγητό
• προγραμματισμός εργασιών σε μικρές και μεγάλες επιχειρήσεις

• τις υποθέσεις στο δικαστήριο που εκδικάζονται σε απόλυτη σειρά
• στο supermarket στο ταμείο που περιμένουμε να πληρώσουμε
• στις στάσεις λεωφορείων και ταξί όπου πηγαίνει με προτεραιότητα

Σχεδόν σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις για να βελτιώσουμε την κάθε μια κατάσταση και να ελαττώσουμε το χρόνο αναμονής, συνεπάγεται μεγάλο κόστος.

Οι τρόποι με τους οποίους εξυπηρετούνται οι πελάτες των ουρών αναμονής είναι:
• FIFO (first in-first out): είναι ο πιο επικρατέστερος τρόπος κατά τον οποίο, όποιος εισέρχεται πρώτος στην ουρά αναμονής, εξυπηρετείται και πρώτος
• LIFO (last in-first out): είναι ο πιο σπάνιος τρόπος και εμφανίζεται σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, κατά τον οποίο όποιος εισέρχεται τελευταίος εξυπηρετείται πρώτος
• τυχαία επιλογή, όπου συνήθως η εξυπηρέτηση γίνεται με κλήρωση
• ο πιο γρήγορος και πιο δυνατός εξυπηρετείται πρώτος. Τον τρόπο αυτόν συνήθως τον συναντάμε κυρίως σε δημόσιες υπηρεσίες όπως ενώσεις, ΟΑΕΔ, ΚΕΠ κ.α. όπου δεν ισχύει το χαρτάκι προτεραιότητας.
• βάση προτεραιότητας όπου στον τρόπο αυτό επιλέγονται τα άτομα με την μεγαλύτερη προτεραιότητα να εξυπηρετηθούν πρώτα (άτομα με ειδικές ανάγκες, άτομα μεγάλης ηλικίας, κ.α.).

Σκοπός της μελέτης των προβλημάτων των ουρών αναμονής αλλά και γενικότερα της επιχειρησιακής έρευνας, είναι ο προσδιορισμός του βέλτιστου σημείου ισορροπίας ή της βέλτιστης λύσης του κάθε προβλήματος. Από τη μια έχουμε την βέλτιστη εξυπηρέτηση του πελάτη και να μειώσουμε όσο το δυνατό περισσότερο το χρόνο αναμονής στην ουρά αναμονής. Έτσι θα πετύχουμε την ικανοποίηση των πελατών αλλά το κόστος μας θα είναι πολύ μεγάλο. Από την άλλη έχουμε την περίπτωση του να έχουμε λιγότερες μονάδες εξυπηρέτησης, με αποτέλεσμα το σχηματισμό τεράστιων ουρών από δυσαρεστημένους πελάτες και το κόστος μας όχι και τόσο μειωμένο όσο θα περιμέναμε λόγω της δυσαρέσκειας, της επιλογής ανταγωνιστών, τις απώλειες σε φθορές μηχανημάτων και δαπανών.

Η ανάλυση της οικονομικής μεριάς των ουρών αναμονής αποσκοπεί στη βέλτιστη λειτουργία τους και ταυτόχρονα στην μείωση του συνολικού κόστους της λειτουργίας τους.

Ο χρόνος αναμονής των πελατών σε μια ουρά αναμονής είναι αντίστοιχος με το κόστος που επιβαρύνεται ο κάθε πελάτης. Τόσο το κόστος από τη μεριά των πελατών όσο και το κόστος των ίδιων των επιχειρήσεων από τις δαπάνες της αναμονής σε μηχανήματα και εργαζομένους είναι εξίσου απώλεια κέρδους.

Στη μέθοδο αυτή μπορούμε να περιγράψουμε πολλά χαρακτηριστικά με την βοήθεια μαθηματικών μοντέλων για να λύσουμε προβλήματα ουρών αναμονής τα οποία δεν θα αναλύσουμε περαιτέρω στην παρούσα εργασία, όπως:

• Μέσο χρόνο αναμονής πελατών
• Μέσο αριθμό πελατών και μονάδων εξυπηρέτησης σε ένα σύστημα
• Μην περίπτωση όπου στο σύστημα μας δεν εξυπηρετείται κανείς
• Μην περίπτωση όπου το σύστημα μας να εξυπηρετεί κάποιον εκείνη την στιγμή
• Μην περίπτωση όπου στο σύστημα μας να εισέλθει πελάτης και να μην μπει σε ουρά αναμονής (να εξυπηρετηθεί απευθείας)
• Μην περίπτωση όπου στο σύστημα μας να μην υπάρχει άλλη θέση στην ουρά αναμονής για να περιμένει άλλος πελάτης

Η μέθοδος αυτή λοιπόν δεν χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό του κόστους αναμονής ή εξυπηρέτησης, αλλά και στην σύγκριση διάφορων αποτελεσμάτων ή σεναρίων για την λήψη αποφάσεων και για την βέλτιστη εξυπηρέτηση των σκοπών μας.

Στην περίπτωση μιας τράπεζας για παράδειγμα, στην οποία οι ουρές αναμονής είναι καθημερινό φαινόμενο, μια λύση που θα μπορούσαμε να αναφέρουμε είναι, ο διευθυντής να φτιάξει το εβδομαδιαίο ή μηνιαίο πρόγραμμα εργασίας της τράπεζας έτσι ώστε να βρει ποιές μέρες της εβδομάδας ή του μήνα σχηματίζονται οι μεγαλύτερες ουρές πελατών και για εκείνες μόνο τις μέρες να έχει σε λειτουργία περισσότερα ταμεία να εξυπηρετούν το κοινό ενώ τις υπόλοιπες ημέρες να πηγαίνει τους υπαλλήλους σε άλλα πόστα με μεγαλύτερη ανάγκη εργατικού προσωπικού, με στόχο πάντα την μείωση της χρόνου αναμονής στις ουρές αναμονής.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο θα μπορούσαμε να περιγράψουμε πως θα μπορούσε να μειωθεί ο μέσος χρόνος αναμονής ή ακόμα και να εξαλειφθούν οι ουρές αναμονής σε ένα supermarket, στα διόδια ενός αυτοκινητόδρομου ή σε ένα νοσοκομείο στα επείγοντα περιστατικά με τα ταμεία, τις διόδους και τους γιατρούς που εφημερεύουν αντίστοιχα.

Ως πλεονεκτήματα που μπορούμε να αναφέρουμε στη θεωρία αυτή είναι ότι μπορούμε να λύσουμε από τα πιο εύκολα πράγματα, όπως τις ουρές στα supermarket και σε άλλες επιχειρήσεις που αναφέραμε παραπάνω, μέχρι στο να μελετήσουμε διάφορες εκδοχές ενός συστήματος και να πάρουμε σημαντικές αποφάσεις για την επιχείρησή μας. Ακόμα μπορεί να εφαρμοστεί σχεδόν σε όλους τους τομείς και τις επιστήμες και να λύσουμε τα προβλήματα τους και με διάφορες τεχνικές και μαθηματικές μεθόδους να ελαχιστοποιήσουμε τον χρόνο αναμονής χωρίς να αυξήσουμε το κόστος εξυπηρέτησης.

Τέλος, ως ένα, αλλά βασικό, μειονέκτημα της θεωρίας των ουρών αναμονής μπορούμε να πούμε πως, για να μειώσουμε το χρόνο αναμονής των πελατών σε μια ουρά αναμονής, τις περισσότερες φορές συνεπάγεται και αύξηση του κόστους για την υπηρεσία ή το κατάστημα. Οι γνώσεις που θα πρέπει να έχει κάποιος για να βρει τα χαρακτηριστικά μιας ουράς αναμονής με μαθηματικά μοντέλα, είναι επίσης ένα μειονέκτημα της μεθόδου αυτής.

4.2.2.1 α) __Παράδειγμα Επίλυσης Προβλήματος με Ουρές Αναμονής 1__

Σε ένα συνεργείο ο μηχανικός μπορεί και ελέγχει 3 αυτοκίνητα τη ώρα. Ο ρυθμός άφιξης των αυτοκινήτων στο συνεργείο είναι κατά μέσο όρο 2 αυτοκίνητα την ώρα.

Α) Υπολογίστε τα μέσα χαρακτηριστικά του συστήματος (χρόνο αναμονής πελατών, συνολικό χρόνο παραμονής τους στο συνεργείο, κλπ.)

Β) Αν προσλάβει ένα βοηθό ώστε να τελειώνει κάθε αυτοκίνητο σε 15 λεπτά, τι βελτιώσεις θα έχουμε στα χαρακτηριστικά του συστήματος;

Γ) Τι θα συμβεί αν, αντί του βοηθού, προσληφθεί και 2ος μηχανικός που θα ελέγχει παράλληλα με την ίδια επίδοση 3 αυτοκίνητα ανά ώρα;

<u>Λύση:</u>

Α) Πρόκειται για ένα σύστημα **Μ/Μ/1** με Μ.Ο. αφίξεων $\boldsymbol{\lambda = 2}$ ανά ώρα και Μ.Ο. εξυπηρετήσεων $\boldsymbol{\mu = 3}$ ανά ώρα. Τα κύρια χαρακτηριστικά του συστήματος θα είναι:

	$\lambda = 2$, $\mu = 3$
Ποσοστό απασχόλησης του συνεργείου $\boldsymbol{\rho}$	67%
Ποσοστό νεκρού χρόνου **P(0)**	33%
Χρόνος αναμονής ***Wq***	40 λεπτά
Πελάτες (αυτοκίνητα) σε αναμονή ***Lq***	1.33 αυτοκ.
Συνολικός χρόνος στο συνεργείο ***W***	1 ώρα
Συνολικά αυτοκίνητα στο συνεργείο ***L***	2 αυτοκ.

Β) Πρόκειται για το ίδιο σύστημα **Μ/Μ/1** με Μ.Ο. αφίξεων $\boldsymbol{\lambda = 2}$ ανά ώρα, αλλά με τον βοηθό, ο Μ.Ο. εξυπηρετήσεων αυξάνει σε $\boldsymbol{\mu = 4}$ ανά ώρα.

Γ) Εδώ πρόκειται για ένα σύστημα **Μ/Μ/s** με $\boldsymbol{s = 2}$ ή (**Μ/Μ/2**), με Μ.Ο. αφίξεων $\boldsymbol{\lambda = 2}$ ανά ώρα και Μ.Ο. εξυπηρετήσεων $\boldsymbol{\mu = 3}$ ανά ώρα.

Τα κύρια χαρακτηριστικά των συστημάτων Β & Γ θα είναι:

	$\lambda = 2$, $\mu = 4$	$\lambda = 2$, $\mu = 3$, $s= 2$
Ποσοστό απασχόλησης του συνεργείου $\boldsymbol{\rho}$	50%	33%
Ποσοστό νεκρού χρόνου **P(0)**	50%	50%
Χρόνος αναμονής ***Wq***	15 λεπτά	2.5 λεπτά
Πελάτες (αυτοκίνητα) σε αναμονή ***Lq***	0.5 αυτοκ.	0.083 αυτοκ.
Συνολικός χρόνος στο συνεργείο ***W***	30 λεπτά	22.5 λεπτά
Συνολικά αυτοκίνητα στο συνεργείο ***L***	1 αυτοκ.	0.75 αυτοκ.

Παρατηρούμε ότι ενώ η επιτάχυνση της εξυπηρέτησης με ένα βοηθό μειώνει το χρόνο αναμονής σχεδόν στο 1/3 (15'), η προσθήκη δεύτερης μονάδας επεξεργασίας βελτιώνει δραματικά το χρόνο αναμονής των πελατών από 40' σε 2.5' μόνο. Παρόμοια αλλά μικρότερη βελτίωση έχουν και τα άλλα χαρακτηριστικά.

4.3 *Θεωρία παιγνίων*

Η θεωρία παιγνίων είναι μία ακόμη μέθοδος της επιχειρησιακής έρευνας η οποία χρησιμοποιείται στη λήψη των αποφάσεων για να περιγράψει καταστάσεις ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης και για να δώσει απάντηση στα προβλήματα όπου εμπλέκονται περισσότεροι από ένα λήπτες αποφάσεων. Έχει εμφανιστεί τα τελευταία χρόνια στην επιχειρησιακή έρευνα και ειδικότερα στην λήψη αποφάσεων και έχει αποσκοπεί στην εύρεση της βέλτιστης λύσης σε συνθήκες αβεβαιότητας. Είναι η επιστήμη της σύγκρουσης και της συνεργασίας. Προβλήματα δηλαδή, ύπαρξης δύο ή περισσότερων πλευρών με συγκρουόμενα συμφέροντα.

Παίγνιο θεωρούμε την ανταγωνιστική κατάσταση λήψης αποφάσεων, ενώ ως παίκτες τους ανταγωνιστές οι οποίοι επιλέγουν τρόπους ενέργειας που δημιουργούν συνθήκες ανταγωνισμού. Μια βασική μεταβλητή στο επιχειρηματικό περιβάλλον στο οποίο λαμβάνουμε αποφάσεις είναι ο ανταγωνισμός και είναι το αντικείμενο με το οποίο ασχολείται η θεωρία παιγνίων. Γι’ αυτό το λόγο η θεωρία παιγνίων θεωρείται πως παίζει πολύ μεγάλο ρόλο στην επιστήμη της επιχειρησιακής έρευνας και στην λήψη αποφάσεων.

Μελετάει ότι έχει να κάνει με τον ανταγωνισμό, την έρευνα αγοράς και την εξέλιξη των προϊόντων και των υπηρεσιών βάση των αναγκών των καταναλωτών. Προσπαθεί κατά κάποιο τρόπο να ανακαλύψει τον τρόπο που «σκέφτονται» οι ανταγωνίστριες επιχειρήσεις και να πάρει καλύτερες αποφάσεις από αυτές, με στόχο την βελτιστοποίηση του κέρδους. Οι τρόποι ενέργειας που επιλέγουμε κάθε φορά είναι οι στρατηγικές που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ώστε να έχουμε το καλύτερο αποτέλεσμα. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει από την εύρεση της στρατηγικής που επιλέγουμε εμείς και των στρατηγικών που επιλέγουν οι ανταγωνιστές μας. Όταν λοιπόν βρούμε όλες τις στρατηγικές, επιλέγουμε την καλύτερη και έχουμε αυτόματα την λύση του παιγνίου.

Η θεωρία παιγνίων εξετάζει τον τρόπο με τον οποίο οι άνθρωποι παίρνουν αποφάσεις, οι συνέπειες των οποίων εξαρτώνται από τις αποφάσεις που παίρνουν οι άλλοι. Συνεπώς, οι καλύτερες αποφάσεις βασίζονται στις προβλέψεις για τις αποφάσεις των άλλων γιατί συχνά και οι άλλοι μπορεί να σκέφτονται με τον ίδιο τρόπο. Η κλασική έννοια της θεωρίας των παιγνίων είναι η ισορροπία Nash, κατά την οποία κάθε άνθρωπος επιλέγει την απόφαση που αυτός θεωρεί καλύτερη έχοντας υπόψη και τις αποφάσεις των άλλων.

4.3.1 <u>Προβλήματα που βρίσκουν λύση στη θεωρία παιγνίων</u>

Η θεωρία παιγνίων είναι μια μέθοδος στην οποία μπορούν να βρουν πολλά προβλήματα λύση από διάφορους τομείς πέραν του οικονομικού όπως βλέπουμε παρακάτω:

• κούρσα εξοπλισμών (π.χ. Ελλάδα-Τουρκία)
• χρήση προηγμένων τεχνολογιών πληροφορικής
• χρηματοδότηση έρευνας
• κλέψιμο στις εξετάσεις
• πληθωρισμός βαθμών
• βιομηχανική οργάνωση
• στην πολιτική επιστήμη
• στη βιολογία
• στη διαδικασία λήψης αποφάσεων ανάμεσα σε επιχειρήσεις, σε εργαζομένους και εργοδότες
• στην πληροφορική
• στον σχεδιασμό μηχανισμών

4.3.2 <u>Παράδειγμα Θεωρίας Παιγνίων</u>

Ένα από τα πιο αντιπροσωπευτικά παραδείγματα στη θεωρία παιγνίων είναι το δίλημμα του φυλακισμένου. Έχουμε 2 φυλακισμένους οι οποίοι υιοθετούν κάποιες στρατηγικές χωρίς να γνωρίζουν ο ένας τον άλλον.

Εδώ παρουσιάζεται ο ανταγωνισμός των δυο φυλακισμένων και το πώς προσπαθεί ο καθένας να καταλάβει τον τρόπο σκέψης του άλλου και να δράσει έτσι ώστε να ωφεληθεί αυτός.

		B	
		ΟΜΟΛΟΓΕΙ	ΔΕΝ ΟΜΟΛΟΓΕΙ
A	ΟΜΟΛΟΓΕΙ	4 ΧΡΟΝΙΑ ΦΥΛΑΚΗ ΕΚΑΣΤΟΣ	1 ΧΡΟΝΟ ΦΥΛΑΚΗ Ο Α ΚΑΙ 8 ΧΡΟΝΙΑ Ο Β
	ΔΕΝ ΟΜΟΛΟΓΕΙ	8 ΧΡΟΝΙΑ ΦΥΛΑΚΗ Ο Α ΚΑΙ 1 ΧΡΟΝΟ Ο Β	3 ΧΡΟΝΙΑ ΦΥΛΑΚΗ ΕΚΑΣΤΟΣ

Αν ο Β ομολογήσει, τότε ο Α: ομολογεί → 4 χρόνια φυλακή

δεν ομολογεί → 8 χρόνια φυλακή

Αν ο Α ομολογήσει, τότε ο Β: ομολογεί → 1 χρόνο φυλακή

δεν ομολογεί → 3 χρόνια φυλακή

4.4 Δέντρα Αποφάσεων

Μια από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους εξαγωγής λογικών συμπερασμάτων και κανόνων μέσα από δεδομένα αποτελεί αυτή των δέντρων αποφάσεων. Σε μαθηματικούς όρους, ένα δέντρο αποφάσεων είναι μια ιεραρχημένη συλλογή σύνθετων διαζευκτικών προτάσεων οι όποιες αποτελούνται από ένα σύνολο λογικών συζεύξεων που αναφέρονται σε τιμές χαρακτηριστικών συγκεκριμένων παραδειγμάτων:

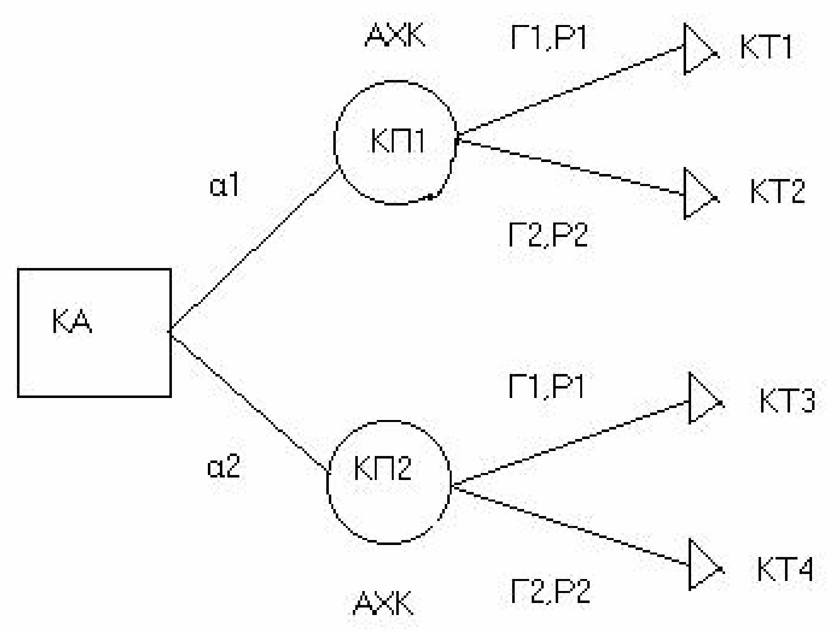
Τα δέντρα απόφασης είναι προϊόντα της μη καθοδηγούμενης εκμάθησης. Ένα δέντρο απόφασης επάγεται από ένα σύνολο εκμάθησης, που αποτελείται από αντικείμενα. Κάθε αντικείμενο περιγράφεται πλήρως από ένα σύνολο ιδιοτήτων και από μία ετικέτα κλάσης, που όπως έχουμε αναφέρει, είναι το χαρακτηριστικό εξόδου. Οι ιδιότητες μπορούν να έχουν συνεχόμενες τιμές ή διακριτές. Για παράδειγμα α, οι ακέραιες τιμές είναι συνεχόμενες, ενώ οι δυαδικές είναι διακριτές. Ο στόχος ενός αλγορίθμου μηχανικής μάθησης αναφορικά με τη κατασκευή ενός μοντέλο από ένα σύνολο δεδομένων, είναι η εύρεση ή η μεγαλύτερη δυνατή προσέγγιση της πραγματικής αντιστοίχησης ανάμεσα στο σύνολο των ιδιοτήτων και στο χαρακτηριστικό εξόδου.

Ένα δέντρο απόφασης περιέχει έναν ή περισσότερους εσωτερικούς κόμβους και έναν ή περισσότερους κόμβους – φύλλα. Όλοι οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν δύο ή περισσότερους κόμβους – παιδιά. Όλοι οι μη τερματικοί κόμβοι, περιέχουν τεμαχισμούς στους οποίος ελέγχεται η τιμή μιας μαθηματικής ή μιας λογικής έκφρασης των ιδιοτήτων. Μόλις χτιστεί τα δέντρο, εφαρμόζεται σε κάθε μια εγγραφή, στη βάση δεδομένων, και καταλήγει σε μια κατηγοριοποίηση για κάθε πλειάδα. Υπάρχουν δύο βασικά βήματα σε αυτήν την τεχνική: η κατασκευή του δέντρου και η εφαρμογή του στη βάση δεδομένων. Η περισσότερη έρευνα έχει επικεντρωθεί στον τρόπο κτίσης των δέντρων, καθώς η διαδικασία εφαρμογής είναι αρκετά προφανής.

4.4.1 Δομή ενός Δ.Α

ΚΑ είναι ένας κόμβος απόφασης (τετράγωνο)

- ΚΠ1 και ΚΠ2 είναι κόμβοι πιθανότητας (κύκλος)
- Οι δεσμοί α1, α2 συμβολίζουν τις εναλλακτικές ενέργειες
- Ρ1, Ρ2 είναι οι πιθανότητες να εμφανιστούν τα γεγονότα Γ1 και Γ2 αντίστοιχα
- Οι τερματικοί κόμβοι ΚΤ1,...,ΚΤ4 συμβολίζουν τα αποτελέσματα (κέρδη) που θα προκύψουν από τα αντίστοιχα γεγονότα (τρίγωνο)
- ΑΧΚ είναι το αναμενόμενο χρηματικό κέρδος (expected monetary value)



4.4.2 Κατασκευή ενός Δ.Α

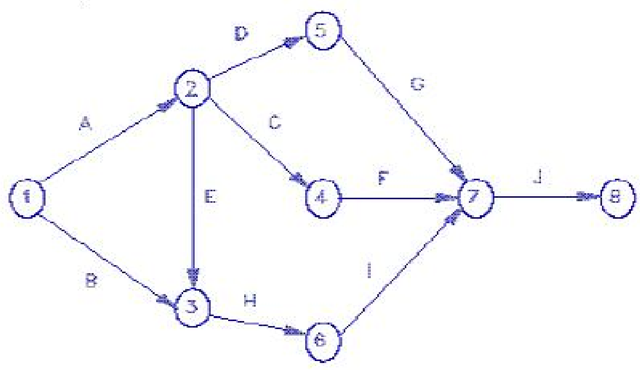
Για την κατασκευή ενός δέντρου απόφασης ακολουθούνται οι εξής πληροφορίες:

- Η κατασκευή του ΔΑ γίνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά (πάνω-κάτω), από τη ρίζα, που τις περισσότερες φορές δηλώνει ένα κόμβο απόφασης, έως ότου καταλήξει στα φύλλα (τερματικούς κόμβους) στους οποίους δηλώνονται τα αποτελέσματα.
- Από τους κόμβους απόφασης διακλαδίζονται εναλλακτικές ενέργειες
- Από τους κόμβους πιθανότητας διακλαδίζονται τα ενδεχόμενα γεγονότα
- Μεταξύ των εναλλακτικών ενεργειών συμπεριλαμβάνεται και η επιλογή «καμία ενέργεια» ως μία απόφαση που είναι πιθανό να ληφθεί
- Η δενδροειδής δομή διασφαλίζει ότι η διαδρομή (path) που ξεκινάει από τη ρίζα του ΔΑ και καταλήγει σε έναν τερματικό κόμβο είναι μοναδικός και αποτυπώνει ένα συγκεκριμένο τρόπο δράσης.
- Για κάθε μία εναλλακτική ενέργεια υπολογίζεται το αναμενόμενο χρηματικό κέρδος (ΑΧΚ) και από αυτές επιλέγεται εκείνη με το μεγαλύτερο ΑΧΚ. Η τελευταία αυτή διαδικασία γίνεται πάνω στο ΔΑ από το τέλος προς την αρχή.

4.5 Θεωρία δικτύων

Η θεωρία δικτύων είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται από πολλές επιστήμες δίνοντας λύσεις σε διάφορα προβλήματα. Στην επιχειρησιακή έρευνα χρησιμοποιείται για να λαμβάνονται αποφάσεις που μεγιστοποιούν το κέρδος και ελαχιστοποιούν το κόστος της κάθε επιχείρησης.

Η θεωρία δικτύων απευθύνεται σε προβλήματα που μπορούν να αναπαρασταθούν με δίκτυα, με μορφή διαγράμματος το οποίο αποτελείται από τους κόμβους, που είναι τα σταθερά σημεία και τις ακμές, που είναι οι διαδρομές που συνδέουν τους κόμβους μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



[Διάγραμμα δικτύου] [38]

Με τη θεωρία δικτύων μπορούμε να λύσουμε προβλήματα που αφορούν διάφορες διαδικασίες οι οποίες έχουν κάποιο κόστος και κάποια διάρκεια. Προσπαθεί να καθορίσει την επικοινωνία των κόμβων μεταξύ τους, ακολουθώντας τις ακμές με το μικρότερο κόστος, αυξάνοντας έτσι το κέρδος της επιχείρησης. Η θεωρία δικτύων περιλαμβάνει μεθόδους τις οποίες χρησιμοποιεί ανάλογα με το πρόβλημα που αντιμετωπίζει κάθε φορά. Οι μέθοδοι αυτές είναι η μέθοδος της σύντομης διαδρομής και η μέθοδος της μέγιστης ροής και πρόκειται για αλγόριθμους οι οποίοι λύνονται με τη χρήση Η/Υ.

Το πρόβλημα της σύντομης διαδρομής, έχει ως στόχο να εντοπίσει και να επιλέξει τη διαδρομή εκείνη με το μικρότερο μήκος ακμών από ένα αρχικό κόμβο μέχρι τον κόμβο που έχουμε επιλέξει ως τελικό προορισμό. Εξετάζει μία μία την κάθε ακμή και την επεξεργάζεται μέχρι να μην μπορεί να βελτιωθεί άλλο και προχωράει στην επόμενη και ούτω καθεξής, μέχρι τον τελικό κόμβο. Το πρόβλημα της σύντομης διαδρομής θεωρείται από τα πιο σημαντικά στη Θεωρία δικτύων.

Χρησιμοποιείται για να λύσουμε προβλήματα που αφορούν χιλιομετρικές αποστάσεις, τον ελάχιστο χρόνο που μπορούμε να διανύσουμε μια ακμή στο δίκτυο που εξετάζουμε και το πόσο θα κοστίσει αυτή η διαδρομή. Για παράδειγμα, μια επιχείρηση η οποία θέλει να μεταφέρει α' ύλες από τις αποθήκες της για την παραγωγή προϊόντων, θα πρέπει να υπολογίσει αρχικά και να επιλέξει την πιο κοντινή διαδρομή για να τις μεταφέρει και γρήγορα αλλά και οικονομικά στον τόπο παραγωγής.

[38] *www.metal.ntua.gr/uploads/3571/512/pm_chapter06.ppt*

Το πρόβλημα της ελάχιστης κάλυψης είναι η μέθοδος με την οποία προσπαθούμε να συνδέσουμε όλους τους κόμβους του δικτύου επιλέγοντας τις πιο σύντομες και τις πιο οικονομικές ακμές του. Για παράδειγμα, όταν εταιρίες εγκατάστασης δικτύων ύδρευσης ή αποχέτευσης πρέπει να υπολογίσουν την ελάχιστη διαδρομή εκσκαφής και σωληνώσεων σε μήκος που θα τοποθετήσουν. Το ίδιο ισχύει και σε περιπτώσεις δικτύων Η/Υ σε επιχειρήσεις, σε τηλεπικοινωνιακά και σε οδικά δίκτυα.

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής, η οποία χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να πετύχουμε την ταχύτερη και την μεγαλύτερη (σε όγκο) μεταφορά από ένα κόμβο σε ένα άλλο. Για παράδειγμα, όταν μια επιχείρηση θέλει να μεταφέρει τα προϊόντα που παράγει από το εργοστάσιο παραγωγής στα καταστήματα της. Η επιχείρηση θα πρέπει να συνδυάσει τα μεταφορικά μέσα που διαθέτει και τους δρόμους που μπορεί να ακολουθήσει και να μεταφέρει όσο το δυνατό μεγαλύτερη ποσότητα προϊόντων το συντομότερο δυνατό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σ’αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε τα πλεονεκτήματα αλλά και τα πλεονεκτήματα των μεθόδων της επιχειρησιακής έρευνας, για να οδηγηθούμε σε ένα συμπέρασμα.

5.1 Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο γραμμικός προγραμματισμός (ο οποίος εντάσσεται στον μαθηματικό προγραμματισμό) έχει και πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα στην χρήση του στα διάφορα προβλήματα, με τα πλεονεκτήματα να υπερτερούν.

Πλεονεκτήματα:

1. Μπορούμε να λύσουμε προβλήματα οποιασδήποτε διάστασης X, Y (X μεταβλητές, Y περιορισμούς).

2. Μπορούμε να λύσουμε περισσότερα προβλήματα από κάθε άλλα μέθοδο, γιατί εντάσσει και χρησιμοποιεί και άλλες μεθόδους όπως είναι η γραφική μέθοδος και η μέθοδος Simplex.

3. Λύνει όσο το δυνατό λιγότερους κόμβους για να φτάσουμε στη βέλτιστη λύση. Και τον κυριότερο και σπουδαιότερο όλων,

4. Εφαρμόζεται σε προβλήματα με τη χρήση Η/Υ, πράγμα που θα μετέφραζε κανείς ως ταχύτητα επίλυσης προβλημάτων.

Μειονεκτήματα:

1. Ο γραμμικός προγραμματισμός ισχύει μόνο για τα προβλήματα όπου η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί είναι γραμμικές, δηλαδή, όπου μπορούν να εκφραστούν οι εξισώσεις με ευθείες γραμμές. Σε πραγματικές συνθήκες ζωής, όταν οι περιορισμοί ή αντικειμενικές συναρτήσεις δεν είναι γραμμικές, η τεχνική αυτή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

2. Συντελεστές αβεβαιότητας, όπως οι καιρικές συνθήκες, δεν λαμβάνονται υπόψη.

5.2 Πλεονεκτήματα - μειονεκτήματα προσομοίωσης

Κάποια από τα πλεονεκτήματα της προσομοίωσης είναι:

• Ευελιξία και πειραματισμός

• Έγκαιρος εντοπισμός προβλημάτων

• Είναι πολύ απλή μέθοδος

• Είναι πολύ πρακτική

• Απαιτεί λιγότερο χρόνο

• Έχει μικρότερο κόστος από κάθε άλλη μέθοδο

• Γίνεται εύκολα κατανοητή από κάθε χρήστη

• Είναι τελείως ακίνδυνη μέθοδος, καθώς όλα γίνονται σε μη πραγματικό περιβάλλον

• Είναι μια από τις μόνες μεθόδους που μπορεί να λύσει σύνθετα προβλήματα

• Μας επιτρέπει την επανάληψη του συστήματος όσες φορές θέλουμε στο ίδιο ακριβώς περιβάλλον πράγμα τελείως αδύνατον σε πραγματικό χρόνο

• Μπορεί να ελέγξει περισσότερους παράγοντες απ' ότι άλλη μέθοδος σε

πραγματικό χρόνο.

• Μας δίνει τη δυνατότητα να εξετάσουμε το σύστημα μας απ' όλες τις πλευρές

Τα μειονεκτήματα που έχει η προσομοίωση είναι:

• Δεν μας εγγυάται την καλύτερη δυνατή λύση

• Βασίζεται σε τυχαίους αριθμούς και μια πιθανή μεροληψία μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα αποτελέσματα

• Μπορεί να μην είναι πάντα η πιο κατάλληλη μέθοδος

• Μπορεί να μην αντανακλά με ακρίβεια την υπό μελέτη κατάσταση.

• Κάποιες φορές απαιτεί πολύ χρόνο και χρήμα

5.3 Πλεονεκτήματα – μειονεκτήματα θεωρίας παιγνίων

Κάποια από τα πλεονεκτήματα της θεωρίας παιγνίων που θα μπορούσαμε να τονίσουμε είναι:

• Μας επιτρέπει να βρούμε λύση ακόμα και στα πιο δύσκολα προβλήματα λόγω των στρατηγικών που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε.

• Μπορούμε να λύσουμε προβλήματα με την πρόβλεψη, αποτελεσματικά και χωρίς πολύ χρόνο και δαπάνες.

Κάποια από τα μειονεκτήματα της θεωρίας παιγνίων είναι:

• Απαιτείται ανάλυση καταστάσεων πριν την εφαρμογή της μεθόδου.

• Η εφαρμογή της θεωρίας παιγνίων γίνεται υπό ορισμένες συνθήκες και ορισμένους κανόνες.

• Απωθεί αρκετούς ανθρώπους από την επιλογή της ως μέθοδο λύσης, εξαιτίας των μαθηματικών που χρησιμοποιεί.

5.4 Πλεονεκτήματα – Μειονεκτήματα δέντρων απόφασης

Ως πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου θεωρούνται τα εξής:

- Εύκολη η κατανόησή τους
- Όμορφη γραφική απεικόνιση των επιχειρηματικών κανόνων
- Όχι ιδιαίτερες προϋποθέσεις για τα πρωτογενή δεδομένα
- Μπορούν να αναλυθούν τόσο μεταβλητές λόγου όσο και οικονομικές
- Παράγεται αυτόματα εκτελέσιμος κώδικας εφόσον κάθε δέντρο μεταφράζεται σε μια ακολουθία **if-then-else** εντολών
- Παραδοσιακό μοντέλο μηχανικής μάθησης

Και ως Μειονεκτήματα:

- Η μεταβλητή στόχος πρέπει να είναι ονομαστική (categorical)
- Περιορίζονται σε μια μεταβλητή στόχο
- Οι σχετικοί αλγόριθμοι έχουν αποδεχτεί ασταθής
- Δέντρα αποφάσεων στηριζόμενα σε αριθμητικά δεδομένα (μεταβλητές λόγου) μπορεί να είναι ιδιαιτέρως πολύπλοκα.

5.5 Πλεονεκτήματα – Μειονεκτήματα θεωρίας δικτύων

Πλεονεκτήματα που μπορούμε να αναφέρουμε είναι ότι με θεωρία δικτύων μπορούμε να λύσουμε όλα τα προβλήματα που μπορούν να αναπαρασταθούν με μορφή δικτύων. Είναι μια μέθοδος που βοηθάει στη λήψη αποφάσεων, που αφορούν την επιχειρηματική δραστηριότητα, με μεγάλη ακρίβεια, πολύ μεγάλη ταχύτητα λόγω του ότι χρησιμοποιεί Η/Υ για την εφαρμογή της και μπορεί να μειώσει πάρα πολύ τις δαπάνες των επιχειρήσεων σε ότι αφορά αποστάσεις που θέλει να διανύσει και όγκο που θέλει να μεταφέρει.

Μειονεκτήματα της θεωρίας δικτύων όπως και όλων των αλγοριθμικών μεθόδων που χρησιμοποιούμε σήμερα, είναι το κόστος αγοράς και εγκατάστασης των Η/Υ και του λογισμικού που χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή της στα προβλήματα που καλείται να αντιμετωπίσει. Ένα ακόμα που μπορούμε να αναφέρουμε ως μειονέκτημα είναι ότι η εφαρμογή της θεωρίας δικτύων απευθύνεται σε συγκεκριμένα προβλήματα.

Συμπέρασμα:

Οι στόχοι της επιχείρησης αποτελούν τους λόγους για τη δημιουργία της, η επίτευξη όμως αυτών αποτελεί παράλληλα τον όρο για την επιβίωσή της. Έτσι, ψάχνει συνεχώς τρόπους προκειμένου να επιτύχει την επιχειρηματική αριστεία, λειτουργώντας κάτω από αβέβαιο και δυσμενές οικονομικό περιβάλλον. Προσπαθώντας λοιπόν, να ερμηνεύσει τη βέλτιστη στρατηγική της, υιοθετεί και υλοποιεί τις μεθόδους που αναπτύξαμε παραπάνω, προκειμένου να φτάσει τον επιδιωκόμενο στόχο της, την αριστεία σε όλους τους τομείς της επιχειρηματικής δραστηριότητας.

Τέλος, εξετάζοντας τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, ανάλογα με τη φύση, τις απαιτήσεις του εκάστοτε κλάδου και τη δραστηριότητα αυτού, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη μέθοδο, μία ή περισσότερες, , επιτυγχάνεται το βέλτιστο αποτέλεσμα.

Βιβλιογραφία

Ελληνικά Βιβλία

1) Υψηλάντης Π.(γ' έκδοση 2010), Επιχειρησιακή Έρευνα: Εφαρμογές στη σύγχρονη επιχείρηση, Εκδόσεις Προπομπός, Αθήνα.

2) Βασιλείου, Π.-Χ. Γ., Γ. Τσακλίδης, και Ν.%. Τσάντας, (2000), Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα: Τόμος 1 Γραμμικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/νίκη.

3) Οικονόμου, Γ.Σ., και Α. Γεωργίου (2006), Ποσοτική Ανάλυση για τη Λήψη διοικητικών Αποφάσεων, Τόμος Α', Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα.

4) Γεωργίου, Α. Κ., Γ.Σ., Οικονόμου, και Γ.Δ. Τσιότρας (2006), Μελέτες Περιπτώσεων Επιχειρησιακής Έρευνας, Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα.

5) Τσάντας, Ν.Δ., και Π.-Χ.Γ. Βασιλείου (2000), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/νίκη.

6) Παναγιώτης Α. Μηλιώτης (1994), Επιχειρησιακή έρευνα μέθοδοι και προβλήματα, Εκδόσεις Α. Σταμούλης, Αθήνα-Πειραιάς.

7) Χ.Δ. Αλιπράντης – S.K. Chakrabarti (2004), Παίγνια και λήψη αποφάσεων, Ελληνική μαθηματική εταιρεία, Αθήνα.

8) Δημήτρης Α. Ξηροκώστας (1999), Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

9) Παπαγεωργίου Γ. (2004), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Γραμμικός Προγραμματισμός και εφαρμογές), Εκδόσεις Ε.Μ.Π.

10)) Π.Μηλιώτη, (1994), Επιχειρησιακή έρευνα-Μέθοδοι και Προβλήματα, Εκδόσεις Σταμούλης

11) Ζάχος Στ., "Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα", Εκδόσεις Ε.Μ.Π, 2004.

12) Μπακόπουλος Α., Χρυσοβέργης Ι., "Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση", Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ.

13) Ξηρόκωστας Δ., "Γραμμικός Προγραμματισμός" Αθήνα, 1980

14) Παπαγεωργίου Γ., "Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Γραμμικός Προγραμματισμός και Εφαρμογές", Εκδόσεις Ε.Μ.Π, 2004.

Ξενόγλωσσα Βιβλία

1) Hillier, F. S., and G. Lieberman (1995), Introduction to Operations Research, 6th Edition, McGraw Hill, New York.

2) Taha, H.A. (1992), Operations Research: An Introduction, 5th Ed., MacMillan, New York.

3) C.P. Bonini, W.H. Hausman, H. Bierman., "Quantitive Analysis for Management" 9th edition, IRWIN.

4) Gass S.I, "Γραμμικός Προγραμματισμός" μετάφραση Κάκουλλος Θ., Αθήνα 1974.

5) Luenberger D., "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison Wesley, 1973

Πηγές στο διαδίκτυο

1) Ευστράτιος Ιωαννίδης, Γραμμικός Προγραμματισμός http://myria.math.aegean.gr/epeaek/pdfs/linear-programming.pdf (τελευταία πρόσβαση 15/05/2012)

2) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, (2006), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/integer%20programming.pdf

3) Β.Κώστογλου, Γραμμικός Προγραμματισμός http://www.docstoc.com/docs/89770601/kefalaio-3-vivliou-EE, (τελευταία πρόσβαση 12/05/2012)

4) Μηνάς Πάλλας, (2008), Σχέση Ν-διάστατης γεωμετρίας-Γραμμικού Προγραμματισμού-Γραφοθεωρίας-Πληροφορικής http://dspace.lib.ntua.gr/bitstream/123456789/3031/3/pallasm_linearprogramming.pdf

5) Γραμμικός Προγραμματισμός και Βελτιστοποίηση http://www.teiser.gr/icd/staff/dvarsam/lp/upload/lp_theory2.pdf, (τελευταία πρόσβαση 12/05/2012)

6) Σπ.Κάντα-Στ.Καποδίστρια, Σημειώσεις για το μάθημα της Επιχειρησιακής Έρευνας,

http://mathbooksgr.files.wordpress.com/2011/11/askhseis_eee.pdf, (τελευταία πρόσβαση 14/05/2012)
7) Χρήστος Νικολαϊδης, (2005) Στοιχεία Πιθανοτήτων και Θεωρίας Ουρών, http://www.scribd.com/doc/74482147/stoixeia-pithanotitwn-tei.pdf
8) Μαναμσίδης Οδυσσέας, (2010), Αλγόριθμος simplex και ειδικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού με χρήση Η/Υ, http://utopia.duth.gr/~odysmana/duth/d22.doc.
9) ΤΕΙ Αθήνας, Η μέθοδος simplex, (τελευταία πρόσβαση 15/04/2012), http://users.teiath.gr/vmouss/ebooks/optimee/sections/section13_MethodosSimplex.html
10) Ζώϊκα Δήμητρα, (2010), Προσομοίωση Πραγματικού Συστήματος Επιχείρησης, http://invenio.lib.auth.gr/record/124076/files/%CE%A0%CE%A4%CE%A5%CE%A7%CE%99%CE%91%CE%9A%CE%97%20%CE%95%CE%A1%CE%93%CE%91%CE%A3%CE%99%CE%91-1258.pdf