Τ.Ε.Ι. ΜΕΣΟΛΟΓΓΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΕΛΕΧΩΝ ΣΥΝΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΣΕΩΝ
ΚΑΙ ΕΚΜΕΤΑΛΛΕΥΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Θέμα:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Επιβλέπων Καθηγητής:
Αποστολόπουλος Γεώργιος

Βαρώτσου
Γεωργία

Γκλιάτη
Θεανώ

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ 2002

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Αρ.Εισ 608

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ 2002

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{o}
<u>ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ</u>

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{o}
<u>ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ</u>

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό, γράφτηκε στα πλαίσια που απαιτούνται για την ολοκλήρωση των σπουδών μας στο τμήμα Στελεχών Συνεταιριστικών Οργανώσεων και Εκμεταλλεύσεων του Τ.Ε.Ι. Μεσολογγίου.

Το περιεχόμενο του βιβλίου αυτού, αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια και τις επιμέρους παραγράφους αυτών.

Το πρώτό κεφάλαιο αποτελεί μια γενική εισαγωγή αναφερόμενη στον Μαθηματικό Προγραμματισμό. Περιλαμβάνονται επίσης κάποιες χρήσιμες έννοιες προκειμένου για την περαιτέρω κατανόηση ορισμένων στοιχείων που αναφέρονται στις αναγραφόμενες θεωρίες και ασκήσεις.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μία ειδική αναφορά στην θεωρία των Πινάκων, με όλες τις σημαντικές πληροφορίες που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν στην σειρά των ασκήσεων που περιλαμβάνονται.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται η έννοια των Γραμμικών Συστημάτων, ακολουθούμενη από ασκήσεις και από αναλυτική μεθοδολογία που ακολουθείται για την επίλυση αυτών.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στις ορίζουσες και συμπληρώνεται από ασκήσεις, παραδείγματα και παρατηρήσεις.

Θεωρούμε χρέος μας, να ευχαριστήσουμε όλους τους καθηγητές που μέχρι τώρα μας προσέφεραν τις γνώσεις τους και πολλές φορές τις πολύτιμες συμβουλές τους και ιδιαίτερα τον καθηγητή μας κύριο Αποστολόπουλο Γεώργιο που μας βοήθησε στην συγγραφή του βιβλίου αυτού. Επίσης, ευχαριστούμε όλους εκείνους, συγγενείς και φίλους, που συνέβαλαν με τον δικό τους τρόπο στην εκπλήρωση της εργασίας μας και ελπίζουμε η εργασία αυτή να σταθεί ικανοποιητική για όποιον την χρειαστεί.

Ιούνιος 2002

Γκλιάτη Θεανώ, Βαρώτσου Γεωργία

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κεφάλαιο 1°

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Τα πρώτα προβλήματα optimization παρουσιάσθηκαν σε θέματα Φυσικής και Γεωμετρίας, στα οποία εζητείτο να ευρεθούν οι ακρότατες τιμές συναρτήσεων κάτω από περιορισμούς.

Η ραγδαία όμως εξέλιξη, αμέσως μετά τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, της επιχειρησιακής έρευνας και των μαθηματικών μεθόδων της Οικονομικής, έδωσαν σαν νέα μορφή του τομέα αυτού τον μαθηματικό προγραμματισμό.

1.1 Αντικείμενο του Μαθηματικού Προγραμματισμού

Πολλά πραγματικά συστήματα ή ακόμα και θεωρητικά προβλήματα αποτελούνται από μεγέθη που συνδέονται μεταξύ τους με ορισμένους νόμους. Οι νόμοι αυτοί εκφράζονται είτε ακριβώς είτε προσεγγιστικά με έναν τρόπο λογικά αυστηρό από ένα σύνολο περιορισμών ανισοτικών ή και ισοτικών. Η περιγραφή του προβλήματος είναι προσεγγιστική όταν στους νόμους αυτούς αφενός υπεισέρχονται ποιοτικά στοιχεία που δεν είναι πάντα δυνατό να περιγραφούν με μαθηματικές σχέσεις, και, αφετέρου όταν η λειτουργία του συστήματος από τη φύση της υπόκειται σε αβεβαιότητες. Ακόμα η περιγραφή του συστήματος είναι προσεγγιστική όταν για λόγους απλούστευσης χρησιμοποιούνται συναρτήσεις απλούστερες από αυτές που πράγματι περιγράφουν ακριβώς το φαινόμενο.

Η μελέτη του συστήματος ή του προβλήματος προϋποθέτει την ανάλυση της συμπεριφοράς του, όταν τα μεγέθη που περιγράφουν τη λειτουργία του μεταβάλλονται. Όταν η μελέτη του συστήματος γίνεται με βάση το μαθηματικό υποκατάστατο του τότε τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν το σύστημα πρέπει να ικανοποιούν το σύνολο των περιορισμών που περιγράφουν τους νόμους λειτουργίας του. Η αξιολόγηση της κάθε μιας δυνατής "κατάστασης της φύσης" του συστήματος γίνεται με τη βοήθεια ενός κριτηρίου, μιας αντικειμενικής συνάρτησης, που πρέπει να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί. Βασικό στοιχείο της μελέτης της συμπεριφοράς ενός συστήματος είναι επομένως η αριστοποίηση μιας συνάρτησης κάτω από περιορισμούς ισοτικούς ή ανισοτικούς. Αυτό είναι και το κεντρικό θέμα που πραγματεύεται ο Μαθηματικός Προγραμματισμός.

Οι διάφορες μορφές της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών δημιουργούν τις διάφορες κατηγορίες προβλημάτων Μαθηματικού Προγραμματισμού (ΜΠ):

-Γραμμικός Προγραμματισμός (ΓΠ), όπου και η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί είναι γραμμικές συναρτήσεις (συναρτήσεις πρώτου βαθμού).

-Προβλήματα δικτύων και μεταφοράς, τα οποία εξαιτίας της ειδικής μορφής τους αποτελούν μία μεγάλη υποκατηγορία προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού με πολλές πρακτικές εφαρμογές.

-Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός (ΑΠ), όπου μερικές τουλάχιστον από τις μεταβλητές περιορίζονται μόνο σε ακέραιες τιμές.

-Μη Γραμμικός Προγραμματισμός, όπου και η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί ενδέχεται να είναι μη γραμμικές συναρτήσεις.

-Τετραγωνικός Προγραμματισμός, όπου η αντικειμενική συνάρτηση είναι δευτέρου βαθμού, ενώ οι περιορισμοί είναι συναρτήσεις πρώτου βαθμού.

Το αντικείμενο του ΜΠ είναι αρκετά πλατύ και δύσκολο να οριοθετηθεί. Από τη μια μεριά, η εύρεση των ακρότατων είναι ένα κλασικό θέμα. Από την άλλη μεριά, η ραγδαία εξέλιξη του τομέα του ΜΠ τα τελευταία 25-30 χρόνια είναι χαρακτηριστικό ενός μοντέρνου θέματος. Η ανάπτυξη αυτή υποκινήθηκε από την παράλληλη ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών και το πρόσφορο κλίμα για πρακτικές εφαρμογές.

Η εξέλιξη του ΜΠ έχει ακολουθήσει τρεις διαφορετικές κατευθύνσεις που όμως έχουν στενή σχέση μεταξύ τους.

Η πρώτη εξετάζει τη μαθηματική θεωρία, στην οποία βασίζεται η επίλυση των διαφορετικών προβλημάτων του ΜΠ. Εδώ επιχειρείται η διατύπωση των αναγκαίων και ικανών συνθηκών για να είναι δυνατή η ύπαρξη λύσης στις διαφορετικές περιπτώσεις. Η αναλυτική διατύπωση των συνθηκών αυτών περιορίζει το ψάξιμο για τον προσδιορισμό των λύσεων. Η ανάπτυξη της θεωρίας αυτής βασίζεται στη γραμμική άλγεβρα και τη θεωρία των κυρτών συνόλων.

Η δεύτερη, η αλγοριθμική, ασχολείται με τη δυνατότητα προσδιορισμού της λύσης του προβλήματος στις διαφορετικές περιπτώσεις του. Η δυνατότητα επίλυσης ενός τέτοιου προβλήματος καθορίζεται από δύο παράγοντες. Πρώτα θα πρέπει να είναι δυνατή η διατύπωση μιας αυτόματης μεθόδου επίλυσης, δηλαδή μιας μεθόδου που να λύνει όλα τα προβλήματα που ανήκουν στην ίδια κατηγορία ακολουθώντας πάντα τα ίδια συγκεκριμένα βήματα. Μια τέτοια μέθοδος, που ονομάζεται αλγόριθμος, είναι απαραίτητη για να είναι δυνατός ο «προγραμματισμός» της μεθόδου και επομένως και η επίλυση του προβλήματος με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Δεύτερο, θα πρέπει οι απαιτήσεις της μεθόδου σε χρόνο και μνήμη να είναι μέσα στα όρια που προσδιορίζονται από της διαθέσιμες υπολογιστικές μηχανές. Η ανάλυση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας των αλγορίθμων είναι σήμερα ένα από τα πιο σύγχρονα διακλαδικά θέματα του Μαθηματικού Προγραμματισμού και της επιστήμης των υπολογιστών.

Τέλος, η τρίτη κατεύθυνση είναι πλευρά των πρακτικών εφαρμογών, όπου το κύριο βάρος δίνεται στη σημασία που έχει ο ΜΠ στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων.

Οι τρεις αυτές κατευθύνσεις, ενώ σε ορισμένο βαθμό αναπτύσσονται παράλληλα και ανεξάρτητα, παρ'όλα αυτά συνδέονται στενά.

Το μαθηματικό υπόβαθρο αποτελεί τη βάση για να αναπτυχθούν επιτυχείς και αποτελεσματικοί αλγόριθμοι. Οι μαθηματικές ιδιότητες έχουν πολλές φορές χρήσιμες και αποκαλυπτικές ερμηνείες. Η ικανότητα των αλγορίθμων να λύνουν αποτελεσματικά τα διάφορα προβλήματα είναι καθοριστική για το τι είδους και τι κλίμακας εφαρμογές μπορούν να αντιμετωπισθούν.

1.2 Βασικές έννοιες

Το σύνολο $\Re$ των πραγματικών αριθμών αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

Ρητοί αριθμοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι με $\beta \neq 0$.Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με Q.

$$Q = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \middle| \alpha, \beta \ \text{ ακέραιοι με } \ \beta \neq 0 \right\}$$

Το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι το παρακάτω και συμβολίζεται με Z.

$$Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το παρακάτω και συμβολίζεται με N.

$$\mathrm{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

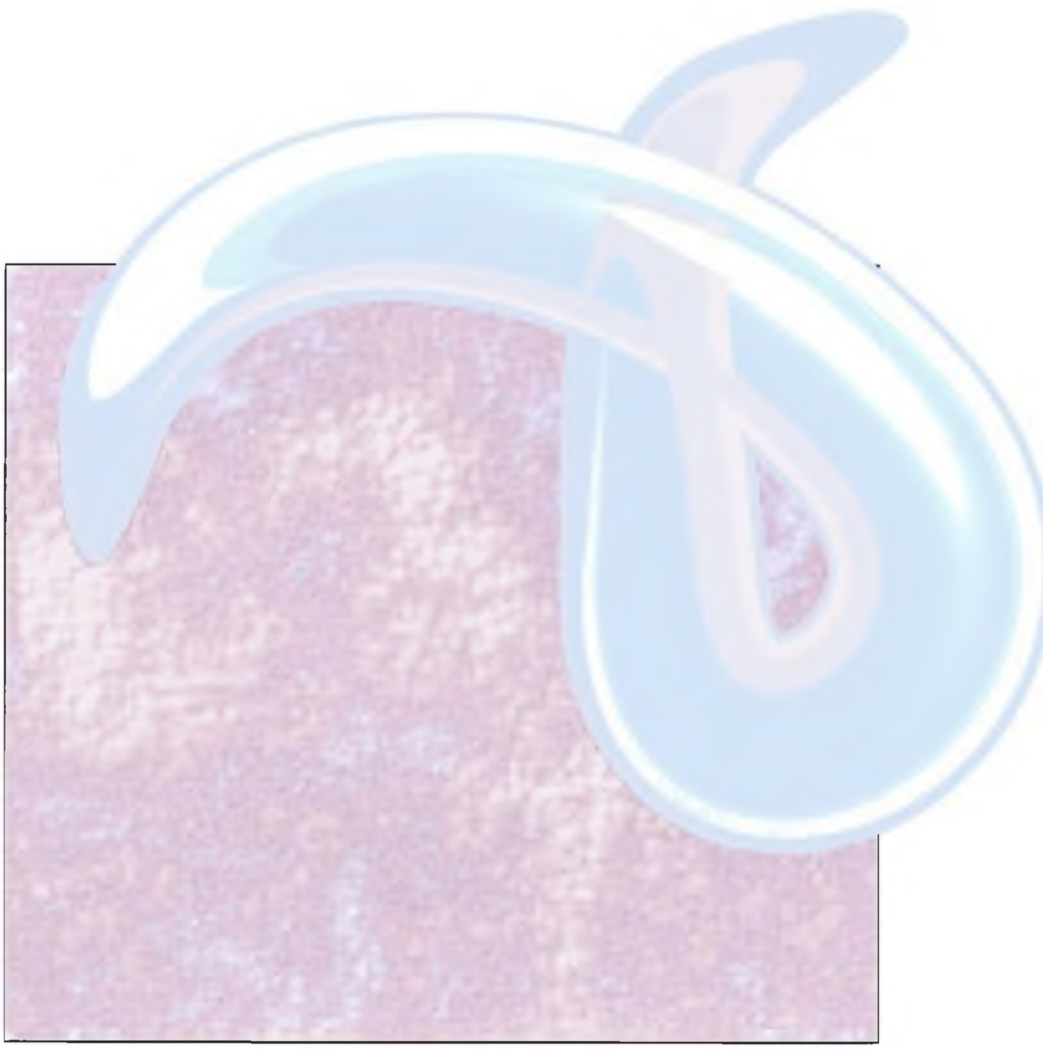
Για τα σύνολα N, Z, Q και $\Re$ ισχύει:

$\mathrm{N} \subseteq \mathrm{Z} \subseteq \mathrm{Q} \subseteq \Re$

Τα σύνολα N-{0}, Z-{0}, Q-{0} και $\Re$-{0} τα συμβολίζουμε συντομότερα με N^*, Z^*, Q^*και $\Re^*$ αντιστοίχως.

Αντίθετοι αριθμοί ονομάζονται οι αριθμοί α και –α, που έχουν άθροισμα 0, ενώ αντίστροφοι αριθμοί οι αριθμοί α και $\frac{1}{a}$,με $\alpha \neq 0$.

ΠΙΝΑΚΕΣ



Κεφάλαιο 2^o

ΠΙΝΑΚΕΣ

2.1 Εισαγωγή στους πίνακες

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Πίνακας (ή Μήτρα) είναι μία ορθογώνια διάταξη αντικειμένων (συνήθως πραγματικών αριθμών) με συγκεκριμένη θέση και διάταξη. Συμβολίζεται από κεφαλαία γράμματα και τα στοιχεία περικλείονται από ορθογώνιες παρενθέσεις. Δηλαδή είναι μία ορθογώνια διάταξη (μ x ν) πλήθους στοιχείων σε μ- γραμμές και ν-στήλες και ονομάζεται πίνακας μ x ν ή διάστατος πίνακας μ x ν.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

όπου $a_{i1},a_{i2},\dots,a_{i\nu}$ αντιπροσωπεύει τη i- γραμμή και $a_{1j},a_{2j},\dots,a_{\mu j}$ αντιπροσωπεύει την j- στήλη.

Επίσης $A=[a_{ij}]_{\mu\nu}$ $1\leq i \leq \mu$, $1\leq j \leq \nu$

Παραδείγματα Πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -20 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & -3 & 4 & 1 \\ 8 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \pi & 0 \\ 0.3 & 1 & \frac{2}{3} \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1. Οι αριθμοί που εμφανίζονται σε ένα πίνακα, ονομάζονται στοιχεία του πίνακα. Όπως παρατηρούμε και από τα παραδείγματα που προαναφέρθηκαν, ένα στοιχείο μπορεί να είναι ένας ακέραιος, κλασματικός ή δεκαδικός αριθμός. Στις περισσότερες εφαρμογές, σαν στοιχεία ενός πίνακα εμφανίζονται πραγματικοί αριθμοί.

2. Για τον συμβολισμό των πινάκων χρησιμοποιούμε τα κεφαλαία γράμματα του Λατινικού ή Ελληνικού αλφαβήτου:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & \sqrt{2} & -6 \\ -\frac{4}{3} & -5 & 0,6 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Οι πίνακες αποτελούνται από γραμμές και στήλες. Έτσι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -7 & 0,9 & 1,3 \end{bmatrix}$$

αποτελείται από δύο γραμμές και τρεις στήλες. Οι δύο γραμμές R1 και R2 είναι:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \kappa\alpha\iota\ R_2 = \begin{bmatrix} -7 & 0.9 & 1.3 \end{bmatrix}$$

Οι τρεις στήλες C1, C2 και C3 είναι:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0,9 \end{bmatrix} \kappa\alpha\iota\ C_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1,3 \end{bmatrix}$$

Στην γενική του μορφή ένας πίνακας με μ γραμμές (R_1, R_2,…,R_μ) και ν στήλες (C_1, C_2,…,C_ν) μπορεί να γραφεί:

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} \textit{και } A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix}$$

2.2 Είδη Πινάκων

1.<u>Πίνακας Στοιχείο</u> τύπου 1*1 λέγεται ο πίνακας, όπου μ=ν=1. Δηλαδή είναι ο πίνακας που έχει 1 μόνον στοιχείο.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

2.<u>Πίνακας Γραμμή</u> τύπου 1*ν λέγεται ο πίνακας, όπου μ=1 ν>1.Δηλαδή είναι ο πίνακας που έχει μόνο μία γραμμή.

Παράδειγμα:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & \ln x & 7 \end{bmatrix}$$

3.<u>Πίνακας Στήλη</u> τύπου μ*1 λέγεται ο πίνακας, όπου ν=1και μ>1.Δηλαδή είναι ο πίνακας που έχει μόνο μία στήλη.

Παράδειγμα:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

4.<u>Τετραγωνικός Πίνακας</u> τύπου ν*ν λέγεται ο πίνακας, όπου μ=ν. Δηλαδή το πλήθος των γραμμών είναι ίσο με το πλήθος των στηλών. Σε ένα τετραγωνικό πίνακα τα στοιχεία a_{11}, $1 \leq i \leq ν$, αποτελούν την κύρια διαγώνιο του πίνακα.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Όπου α_{11}, α_{22},...,$\alpha_{\mu\nu}$ αποτελούν την κύρια διαγώνιο του τετραγωνικού πίνακα.

Παράδειγμα:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & -7 & 9 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο Β είναι τετραγωνικός πίνακας τύπου 3x3 και τα στοιχεία 5, -7 και 1 αποτελούν την κύρια διαγώνιό του.

5.Κλιμακωτός Άνω τύπου μ x ν είναι ο πίνακας για τον οποίο ισχύει $a_{ij}=0$ για $i<j$.

Παράδειγμα:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

6.Κλιμακωτός Κάτω τύπου μ x ν είναι ο τετραγωνικός πίνακας για τον οποίο ισχύει $a_{ij}=0$ για $i>j$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

7.Τριγωνικός άνω είναι ο τετραγωνικός πίνακας, του οποίου τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο, είναι ίσα με μηδέν. Δηλαδή $a_{ij}=0$ για $i<j$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8.<u>Τριγωνικός Κάτω</u> είναι ο τετραγωνικός πίνακας, του οποίου τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο, είναι ίσα με μηδέν. Δηλαδή $a_{ij}=0$ για $i<j$.

Παράδειγμα:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

9.<u>Διαγώνιος Πίνακας</u> είναι ο τετραγωνικός πίνακας, του οποίου τα στοιχεία πάνω και κάτω από την κύρια διαγώνιο, είναι ίσα με μηδέν. Δηλαδή είναι συγχρόνως ο τριγωνικός Άνω και Κάτω και $a_{ij}=0$ όταν $i=j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10.<u>Ταυτοδύναμος Πίνακας</u> είναι ο τετραγωνικός πίνακας Α, όταν από τον πολλαπλασιασμό (βλέπε παράγραφο 2.8) με τον εαυτό του, παραμένει αμετάβλητος. Δηλαδή Α x Α=Α.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας A είναι ταυτοδύναμος διότι:

$$A \times A = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 & -0,5 \times 0,5 - 0,5 \times 0,5 \\ -0,5 \times 0,5 - 0,5 \times 0,5 & 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,25 + 0,25 & -0,25 - 0,25 \\ -0,25 - 025 & 0,25 + 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} = A$$

11.<u>Συμμετρικός Πίνακας</u> είναι ο τετραγωνικός πίνακας $A=[a_{ij}]$, όταν τα συμμετρικά στοιχεία ως προς την κύρια διαγώνιο, είναι ίσα. Δηλαδή $a_{ij}=a_{ij}$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

12.<u>Αντισυμμετρικός Πίνακας</u> είναι ο συμμετρικός πίνακας A, όπου όλα τα στοιχεία του είναι αντίθετα και τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου, είναι ίσα με το μηδέν. Αυτό γιατί, $a_{ii}= -a_{ii}$ ή $2a_{ii}=0$ ή $a_{ii}=0$. Συμβολίζεται με $A^t= -A$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Α, είναι αντισυμμετρικός και $a_{ij}= -a_{ji}$.

2.3 Ειδικές μορφές πινάκων

1.Μοναδιαίος πίνακας τύπου μxν, λέγεται ο διαγώνιος πίνακας που τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι ίσα με την μονάδα και συμβολίζεται με I_ν ή Ι.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι, ο πίνακας Ι είναι μοναδιαίος τύπου 2x2.

2.Μηδενικός πίνακας τύπου μxν, λέγεται ο πίνακας όπου όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με μηδέν και συμβολίζεται με $0_{\mu x\nu}$ ή 0. Δηλαδή $a_{ij}=0$.

Παράδειγμα:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες Β και Δ, είναι μηδενικοί πίνακες τύπου 2x3 και 3x2 αντίστοιχα.

3.Αντίθετος ενός πίνακα Α τύπου μxν είναι ο πίνακας του ίδιου τύπου (μxν), του οποίου όλα τα στοιχεία είναι αντίθετα των αντίστοιχων στοιχείων του Α και συμβολίζεται με –Α. Επίσης, όταν τον πίνακα Α τον πολλαπλασιάσουμε με το –1 (βλέπε παράγραφο 2.7) τότε το αποτέλεσμα θα είναι –Α, που είναι ο αντίθετος του Α.

Παράδειγμα:

Έστω Α ο παρακάτω πίνακας:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο αντίθετος του Α, θα είναι

$$-\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

ή -Α=(-1)Α οπότε

$$-\mathrm{A} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>4.Ανάστροφος πίνακας</u> προκύπτει αν αλλάξουμε τις γραμμές ενός πίνακα με τις στήλες του αρχικού πίνακα και συμβολίζεται με A^T.

Παράδειγμα:

Άν $\quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

τότε ο ανάστροφος του Α θα είναι

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Άν $\quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

τότε ο ανάστροφος του Β θα είναι

$$B^{T} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση:
Για κάθε συμμετρικό πίνακα ισχύει ότι $A=A^T$, δηλαδή ισούται με τον ανάστροφό του.

Παράδειγμα:

Έστω ότι ο παρακάτω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

τότε ο ανάστροφος του A θα είναι:

$$A^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

δηλαδή $A=A^T$.

<u>5.Πίνακας του Gram</u> ονομάζεται ο πίνακας A^T*A δηλαδή αν $A=(a_1,\ldots,a_v)$ και $B=(b_1,\ldots,b_v)$,τότε:
$A^T*B=(a_1,\ldots,a_v)^T*(b_1,\ldots,b_v)=$

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \ldots & a_2b_n \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

Όταν A=B, τότε $A^T*B=A^T*A$.
Επίσης, αν $A^T*A=O$ αν και μόνο αν $A=O$

<u>6.Λοξά συμμετρικός</u> λέγεται ένας πίνακας A, όταν ισχύει η σχέση $A= -A^T$. Δηλαδή $a_{ij}= -a_{ji}$.

Παρατηρήσεις:

1.Από τον ορισμό του λοξά συμμετρικού πίνακα, προκύπτει ότι $A+A^T=O$ και αυτό γιατί αφού $A=-A^T$ τότε $A+A^T$ γράφεται και $-A^T+A^T=O$.

2. Κάθε πίνακας Α, τύπου ν*ν μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός λοξά συμμετρικού πίνακα. Δηλαδή αν Α είναι τύπου ν*ν τότε έχουμε: $A-A^T \rightarrow$ λοξά συμμετρικός

$A+A^T \rightarrow$ συμμετρικός

Έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι:

$A=\frac{1}{2}(A-A^T)+\frac{1}{2}(A+A^T)=A.$

<u>7.Ορθογώνιος πίνακας</u> ονομάζεται ένας πίνακας Α όταν ισχύει η σχέση $A^T*A=A*A^T=I$.

2.4 Ισότητα Πινάκων

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>:

Δύο πίνακες είναι ίσοι όταν και μόνο όταν έχουν και οι δυο τις ίδιες διαστάσεις και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Δηλαδή δυο πίνακες $A=[a_{ij}]$ και $B=[b_{ij}]$ είναι ίσοι όταν $a_{ij}=b_{ij}$ για κάθε i,j.

Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{2} & 2 & 5 \\ \frac{2}{2} & x-x & 7 \end{bmatrix}$$

Οι δύο παραπάνω πίνακες, είναι ίσοι γιατί τα στοιχεία τους είναι αντίστοιχα ίσα.

2.5 Πρόσθεση πινάκων

Άθροισμα δυο μ*ν πινάκων με τις ίδιες διαστάσεις, είναι ένας νέος πίνακας μ*ν με στοιχεία το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων. Αν Α, Β είναι πίνακες τύπου μ*ν, τότε το άθροισμά τους είναι ο πίνακας Γ=Α+Β τύπου μ*ν του οποίου τα στοιχεία προκύπτουν από τη σχέση $\gamma_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Ιδιότητες:
1. Α+Β=Β+Α (αντιμεταθετική)
2. Α+(Β+Γ)=(Α+Β)+Γ (προσεταιριστική)
4. Α+Ο= Ο+Α
5. Α+(-Α)=(-Α)+Α=Ο

Παράδειγμα:

$$A=\begin{bmatrix}7 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 8 & 0\end{bmatrix},\ \text{τότε}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}7 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 8 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7+(-2) & 2+5\\ 3+8 & 1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 7\\ 11 & 1\end{bmatrix}$$

2.6 Αφαίρεση πινάκων

Αφαίρεση δύο πινάκων, με τις ίδιες διαστάσεις, είναι ένας νέος πίνακας, όπου προκύπτει αν στον πρώτο προσθέσουμε τον αντίθετο του δεύτερου.

Ιδιότητες:
1. Α+(-Α)= -Α+Α=Ο
2. Α-Β=Α+(-Β)

Παράδειγμα:

$$A=\begin{bmatrix}7 & -1 & 5\\ 6 & 2 & -2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}5 & 2 & -7\\ -2 & 4 & -8\end{bmatrix}\ ,\ \text{τότε}$$

$$A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix}7 & -1 & 5\\ 6 & 2 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & -2 & 7\\ 2 & -4 & 8\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}7+(-5) & -1+(-2) & 5+7\\ 6+2 & 2+(-4) & -2+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 12\\ 8 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

2.7 Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

Αν είναι πίνακας τύπου μ*ν και λ ανήκει στο R, τότε ο λ*A είναι πίνακας τύπου μ*ν που τα στοιχεία του προκύπτουν από τη σχέση $B_{ij}=\lambda * A_{ij}$. Δηλαδή, ο πίνακας A πολλαπλασιάζεται με αριθμό λ, όπου όλα τα στοιχεία του πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό λ και συμβολίζεται με λ*A ή λA, $\lambda A=[\lambda a_{ij}]$.

Ιδιότητες:

1. λ(A+B)=λA+λB
2. (λμ)A=λ(μA)=μ(λA)
3. Αν λ*A=O τότε λ=0 ή A=O
4. 1*A=A
5. (λ+μ)A=λA+μ

$$\lambda *\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \lambda\alpha_{13}\\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \lambda\alpha_{23}\\ \lambda\alpha_{31} & \lambda\alpha_{32} & \lambda\alpha_{33}\end{bmatrix}$$

Παράδειγμα:

$$4*\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 20\\ 12\end{bmatrix}$$

2.8 Πολλαπλασιασμός πινάκων

Το αποτέλεσμα του γινομένου δυο πινάκων $A_{\mu\nu}$ και $B_{\nu\rho}$, είναι ένας νέος πίνακας $\Gamma=(AB)_{\mu\rho}$. Τα στοιχεία του νέου πίνακα Γ ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

Το στοιχείο γ_{ij}, του πίνακα Γ, ορίζεται από τον πολλαπλασιασμό του πρώτου στοιχείου της i-γραμμής του πίνακα Α, με το πρώτο στοιχείο της j-στήλης του πίνακα Β και προσθέτοντας το αποτέλεσμα αυτό ,στο γινόμενο του δεύτερου στοιχείου της i-γραμμής του πίνακα Α με το δεύτερο στοιχείο της στήλης j του πίνακα Β κ.ο.κ. Δηλαδή, $\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\beta_{1j}+\alpha_{i2}\beta_{2j}+\ldots+\alpha_{ir}\beta_{vj}$.

Ιδιότητες:

1. $A*B \neq B*A$
2. $A(B*\Gamma)=(A*B)\Gamma$ (προσεταιριστική)
3. $A(B+\Gamma)=A*B+A*\Gamma$ (επιμεριστική)
4. $(B+\Gamma)*A=B*A+\Gamma*A$ (επιμεριστική)
5. Αν $A*B=O$ τότε, $A\neq O$ και $B\neq O$
6. $A*O=O$
7. $A*I=A$
8. $(\lambda A)*(\mu B)=(\lambda\mu)*(AB)$

Παράδειγμα:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & 1\\ 6 & \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & -2 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Gamma=A*B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & 1\\ 6 & \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & -2 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}0+1-3 & 1-4-6 & 1-8-3\\ 0+0+1 & 4+0+2 & 4+0+1\\ 0+\frac{1}{4}-1 & 6-1-2 & 6-2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -9 & -10\\ 1 & 6 & 5\\ -\frac{3}{4} & 3 & 3\end{bmatrix}$$

Παρατήρηση:

Σε αντίθεση με την πράξη της πρόσθεσης και αφαίρεσης, η πράξη του πολλαπλασιασμού δύο πινάκων, δεν περιορίζεται μόνο σε πίνακες με τις ίδιες διαστάσεις. Πρέπει μόνον, ο πρώτος πίνακας να έχει αριθμό στηλών ίδιο με τον αριθμό γραμμών του δεύτερου πίνακα. Προκύπτει ότι ο νέος πίνακας έχει αριθμό γραμμών ίσο με τον αριθμό γραμμών του πρώτου πίνακα και αριθμό στηλών ίσο με τον αριθμό στηλών του δεύτερου πίνακα.

Παράδειγμα:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -4\\ -3 & 7 & 5\end{bmatrix}, \text{δηλαδή οι διαστάσεις } \textit{του} \text{ είναι } 2*3$$

$$B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}, \text{δηλαδή οι διαστάσεις } \textit{του} \text{ είναι } 3*2$$

$$\text{τότε } \Gamma = A*B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -4\\ -3 & 7 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}3+2-8 & -1+4-12\\ 9+7+10 & -3+14+15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -9\\ 26 & 26\end{bmatrix}$$

Δηλαδή οι διαστάσεις του είναι 2*2.

2.9 Δύναμη πίνακα

Αν A είναι πίνακας τύπου ν*ν, τότε $A^{\kappa}=A^{\kappa-1}*A$

Ιδιότητες:

1. $(A^{\kappa})^{\lambda}=A^{\kappa\lambda}$,
2. $A^{\kappa}*A^{\lambda}=A^{\kappa+\lambda}, \kappa,\lambda \in N^*$

Είδη ασκήσεων:

1. Όταν ζητείται μεγάλη δύναμη πίνακα Α, υπολογίζουμε τον $A^2, A^3, \ldots$ μέχρι να βρούμε μικρή δύναμη του Α που να έχει σχέση με τον μοναδιαίο ή τον Α ή τον μηδενικό. Έστω $A^3=I$, για να βρούμε τον A^v, διαιρούμε το ν με το 3 και γράφουμε την ταυτότητα της διαίρεσης (διαιρετέος = διαιρέτης * πηλίκο + υπόλοιπο). Δηλαδή, $A^v=A^{3\pi+v}=(A^3)^\pi * A^v$, αφού $A^3=I$, τότε $I^\pi * A^v=A^v$, ν=1,2.

Άσκηση:

Έστω Α πίνακας της μορφής ν*ν έτσι ώστε: $A^3+A^2+A+I=O$, να αποδειχτεί ότι $A^{33}+A^{22}+A^{11}+I=O$.

Λύση:

$A^3+A^2+A+I=O$. Αν το πολλαπλασιάσουμε με Α, τότε $A^4+A^3+A^2+A=O$ ή $A^4=-A^3-A^2-A$ (1)
Από την υπόθεση $A^3+A^2+A+I=O$ ή $I=-A^3-A^2-A$ (2)
Από (1), (2) το $A^4=I$.
Τότε $A^{33}+A^{22}+A^{11}+I=A^{(4*8)+1}+A^{(4*5)+2}+A^{(4*2)+3}+I=$
$(A^4)^8 * A+(A^4)^5 * A^2+(A^4)^2 * A^3+I$ αφού $A^4=I$ άρα $A+A^2+A^3+I=O$.

2. Όταν δίνεται μία σχέση με δυνάμεις του Α και ζητείται να δειχτεί μία άλλη σχέση με μεγάλες δυνάμεις του Α, τότε πολλαπλασιάζουμε την υπόθεση με κατάλληλη δύναμη του Α.

Άσκηση:

Έστω Α πίνακας της μορφής ν*ν έτσι ώστε: $A^2-I=A$, να αποδειχτεί ότι $A^{1000}-A^{999}=A^{998}$.

Λύση:

$A^2-I=A$. Αν πολλαπλασιάσουμε με το A^{998} τότε
$A^2 * A^{998}-I * A^{998}=A * A^{998}$ ή $A^{1000}-A^{998}=A^{999}$ ή $A^{1000}-A^{999}=A^{998}$.

Παρατήρηση

Από τον ορισμό του ταυτοδύναμου πίνακα, προκύπτει ότι

$A^2=A * A=A$

$A^3=A^2 * A=A * A=A$

:

$A^3=A^2*A=A*A=A$

$\vdots$

$A^{\kappa}=A^{\kappa-1}*A=A$

2.10 Αντίστροφος πίνακας

Αν ο A είναι πίνακας τύπου ν∗ν και υπάρχει ο πίνακας B τύπου ν∗ν, ώστε $A*B=B*A=I$, τότε ο A αντιστρέφεται (ή A είναι αντιστρέψιμος) και ο αντίστροφος του συμβολίζεται με $A^{-1}=B$. Αν ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες: $A*X=B$ ή $X=A^{-1}*B$, $X*A=B$ ή $X=B*A^{-1}$.

Παρατήρηση:
Από τον ορισμό του ορθογώνιου πίνακα προκύπτει ότι αν ισχύει η σχέση $A^T*A=I$ τότε $A^{-1}=A^T$, δηλαδή ο αντίστροφος πίνακας είναι ίδιος με τον ανάστροφο, επειδή

$$\left.\begin{array}{l} A^T - A = I \\ A^{-1} \cdot A = I \end{array}\right\} \quad ή \quad A^T = A^{-1}$$

Είδη ασκήσεων:

1. Όταν δίνονται οι πίνακες A, B και ζητείται να δειχτεί ότι $A^{-1}=B$ τότε αρκεί να δείξουμε ότι $A*B=I$ (προσοχή γιατί τότε ισχύει $BA=I$).

2. Όταν δίνεται ο A με τα στοιχεία του και ζητείται ο A^{-1} τότε υποθέτουμε ότι υπάρχει, τότε θέτουμε τα στοιχεία του με γράμματα και απαιτώντας $A*A^{-1}=I$, καταλήγουμε σε ένα σύστημα το οποίο ή δίνει μοναδική λύση ή είναι αδύνατο.

3. Όταν δίνεται μία σχέση για τον A που περιέχει τον μοναδιαίο και θέλουμε να βρούμε τον A^{-1}, τότε λύνουμε ως προς τον μοναδιαίο και στο άλλο μέλος βγάζουμε κοινό παράγοντα τον A. Ότι μένει στην παρένθεση είναι ο A^{-1}.

Άσκηση:

Έστω A πίνακας της μορφής ν∗ν έτσι ώστε
$3A^4-2A^2+5A-7I=O$, να βρεθεί (αν υπάρχει) ο A^{-1}.

Λύση:

$3A^4-2A^2+5A-7I=O$ ή $3A^4-2A^2+5A=7I$ ή $\frac{3}{7}A^4-\frac{2}{7}A^2+\frac{5}{7}A=\mathbf{I}$ ή $A(\frac{3}{7}A^3-\frac{2}{7}A+\frac{5}{7}\mathbf{I})=\mathbf{I}$.

Άρα ο Α αντιστρέφεται και ο αντίστροφός του είναι ο $A^{-1}=\frac{3}{7}A^3-\frac{2}{7}A+\frac{5}{7}\mathbf{I}$.

4. Όταν δίνεται σχέση για τον Α και ζητείται ο αντίστροφος κΑ+λΙ, $\kappa,\lambda \in \Re$, τότε θέτουμε κΑ+λΙ=Β και λύνουμε ως προς Α, στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην υπόθεση και τέλος έχουμε πρόβλημα της προηγούμενης κατηγορίας.

Άσκηση:

Έστω Α πίνακας της μορφής ν∗ν έτσι ώστε $A^3=O$, να βρεθεί ο πίνακας $(I-A)^{-1}$.

Λύση:

(1^ος^ τρόπος)
Θέτουμε $I-A=B$ ή $A=I-B$ επειδή $A^3=O$ τότε $(I-B)^3=O$ ή
$I-3B+3B^2-B^3=O$ ή $I=B(3I-3B+B^2)$, άρα ο Β αντιστρέφεται και
$B^{-1}=3I-3B+B^2$ αφού $B=I-A$ τότε $(I-A)^{-1}=A^2+A+I$.

(2^ος^ τρόπος)
$A^3=O$ ή $-A^3=O$ ή $I-A^3=I$ ή $(I-A)*(I+A+A^2)=I$
Αν πολλαπλασιάσουμε το $(I-A)^{-1}$ τότε
$(I-A)^{-1}*(I-A)*(I+A+A^2)=(I-A)^{-1}$ ή $I(A^2+A+I)=(I-A)^{-1}$ ή
$(I-A)^{-1}=A^2+A+I$.

5. Όταν σε μία άσκηση υπάρχει η έκφραση "ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος ή αντιστρέφεται", τότε με παραγοντοποίηση τον εμφανίζουμε στην υπόθεση και τον διώχνουμε πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφό του σαν σύμβολο.

Άσκηση:

Έστω οι ν∗ν πίνακες Α, Χ με $2A^2+3A+I=(2A+I)*(3AX+I)$.
Αν οι πίνακες Α και 2Α+Ι είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθεί ο πίνακας Χ και ο πίνακας X^{1996}.

Λύση:

$2A^2+3A+I=(2A+I)*(3AX+I)$ ή $(2A+I)A+(2A+I)*(3AX+I)$ ή $(2A+I)*(A+I-3AX-I)=O$ ή $(2A+I)*(A-3AX)=O$. Αν πολλαπλασιάσουμε με τον $(2A+I)^{-1}$ τότε $(2A+I)^{-1}*(2A+I)*(A+3AX)=O$ ή $I(A-3AX)=O$ ή $A-3AX=O$ αν πολλαπλασιάσουμε με τον A^{-1} τότε $A^{-1}A-3A^{-1}AX=O$ ή

$I-3X=O$ ή $X=\frac{1}{3}I$.

Άρα $X^{1996}=\frac{1}{3}^{1996}*I$.

6. Αν δίνεται σχέση για τον Α που περιέχει δυνάμεις του και ζητείται να δειχτεί μία σχέση με δυνάμεις του A^{-1}, τότε πολλαπλασιάζουμε την υπόθεση με την κατάλληλη δύναμη του A^{-1}, αφού πρώτα αποδείξω ότι ο Α είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση:

Έστω $\mu*\nu$ πίνακας Α για τον οποίο ισχύει
$A^4+5A^3-A^2+2A+3I_\nu=O_\nu$. Δείξτε ότι:
α)ο Α είναι αντιστρέψιμος και
β) $3(A^{-1})^4+2(A^{-1})^3-(A^{-1})^2+5A^{-1}+I_\nu=O_\nu$.

Λύση:

α) $A^4+5A^3-A^2+2A+3I=O$ ή $-\frac{1}{3}A^4-\frac{5}{3}A^3+\frac{1}{3}A^2-\frac{2}{3}A=I$ ή

$A(-\frac{1}{3}A^3-\frac{5}{3}A^2+\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}I)$, άρα ο Α αντιστρέφεται και

$A^{-1}=-\frac{1}{3}A^3-\frac{5}{3}A^2+\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}I$.

β) $A^4+5A^3-A^2+2A+3I=O$ αν πολλαπλασιάσουμε με $(A^{-1})^4$, τότε $(A^{-1})^4A^4+5(A^{-1})^4A^3-(A^{-1})^4A^2+2(A^{-1})^4A+3(A^{-1})^4=O$ ή
$I+A^{-1}-5(A^{-1})^2+2(A^{-1})^3+3(A^{-1})^4=O$ ή
$3(A^{-1})^4+2(A^{-1})^3-(A^{-1})^2+5A^{-1}+I=O$.

7.Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένας πίνακας δεν αντιστρέφεται, τότε χρησιμοποιούμε την μέθοδο της επαγωγής σε άτοπο.

Άσκηση:

Έστω μ∗ν πίνακας Α για τον οποίο ισχύει $A^3=O$ και $A \neq O$, να αποδειχτεί ότι ο Α δεν αντιστρέφεται.

Λύση:

Έστω ότι ο Α αντιστρέφεται δηλαδή υπάρχει A^{-1}, τότε έχουμε:
$A^3=O$ πολλαπλασιάζουμε με το A^{-1}, τότε $A^{-1}A^3=O$ ή
$A^2=O$ πολλαπλασιάζουμε με το A^{-1}, τότε $A^{-1}A^2=O$ ή
$A=O$ άτοπο.
Άρα ο Α δεν αντιστρέφεται.

2.11 Εύρεση αγνώστου πίνακα ‘Χ’

Είδη ασκήσεων:

1.Αν ζητείται να βρεθεί πίνακας Α τύπου ν∗ν, τότε:
α) αν δίνεται σχέση για τα στοιχεία του, συμβολίζουμε τον Α στην γενική του μορφή και υπολογίζουμε από την δοσμένη σχέση ένα από τα στοιχεία του.

Άσκηση:

Να βρεθεί 3∗3 πίνακας $A=[a_{ij}]$ για τον οποίο ισχύει:
$a_{ij}+a^2_{ij}=6*(i-1) \rightarrow (1)$.

Λύση:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Τότε από (1) για i=j=1 έχουμε $a_{11}+a^2_{11}=6*(1-1)$ ή $a_{11}(1+a_{11})=0$ οπότε $a_{11}=-1$ επειδή $a_{11}\neq 0$
-και από (1) για i=1, j=2 έχουμε $a_{12}+a^2_{12}=6*(1-1)$ ή $a_{12}(1+a_{12})=0$ οπότε $a_{12}=-1$ επειδή $a_{12}\neq 0$
-και από (1) για i=1, j=3 έχουμε $a_{13}+a^2_{13}=6*(1-1)$ ή $a_{13}(1+a_{13})=0$ οπότε $a_{13}=-1$ επειδή $a_{13}\neq 0$

-και από (1) για i=2, j=1 έχουμε $a_{21}+a^2_{21}=6*(2-1)$ ή $a^2_{21}+a_{21}-6=0$ οπότε $a_{21}=-3$ ή $a_{21}=2$ απορρίπτεται γιατί $a_{21}<0$. Άρα $a_{21}=-3$

-και από (1) για i=2, j=2 έχουμε $a_{22}+a^2_{22}=6*(2-1)$ ή $a^2_{22}+a_{22}-6=0$ οπότε $a_{22}=-3$ ή $a_{22}=2$ απορρίπτεται γιατί $a_{22}<0$. Άρα $a_{22}=-3$

-και από (1) για i=2, j=3 έχουμε $a_{23}+a^2_{23}=6*(2-1)$ ή $a^2_{23}+a_{23}=6$ ή $a^2_{23}+a_{23}-6=0$ οπότε $a_{23}=-3$ ή $\alpha_{23}=2$ απορρίπτεται γιατί $a_{23}<0$. Άρα $a_{23}=-3$

-και από (1) για i=3, j=1 έχουμε $a_{31}+a^2_{31}=6*(3-1)$ ή $a^2_{31}+a_{31}=12$ ή $a^2_{31}+a_{31}-12=0$ οπότε $a_{31}=-4$ ή $a_{31}=3$ απορρίπτεται γιατί $a_{31}<0$. Άρα $a_{31}=-4$

-και από (1) για i=3, j=2 έχουμε $a_{32}+a^2_{32}=6*(3-1)$ ή $a^2_{32}+a_{32}=12$ ή $a^2_{32}+a_{32}-12=0$ οπότε $a_{32}=-4$ ή $a_{32}=3$ απορρίπτεται γιατί $a_{32}<0$. Άρα $a_{32}=-4$

-και από (1) για i=3, j=3 έχουμε $a_{33}+a^2_{33}=6*(3-1)$ ή $a^2_{33}+a_{33}=12$ ή $a^2_{33}+a_{33}-12=0$ οπότε $a_{33}=-4$ ή $a_{33}=3$ απορρίπτεται γιατί $a_{33}<0$. Άρα $a_{33}=-4$

$$\text{Άρα } A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ -3 & -3 & -3\\ -4 & -4 & -4\end{bmatrix}$$

β) όταν δίνεται σχέση που περιέχει τον πίνακα Α, τότε αφού βρούμε τον τύπο του, ώστε να γίνονται οι πράξεις, συμβολίζουμε τα στοιχεία του με γράμματα, εκτελούμε τις πράξεις και καταλήγουμε σε ισότητα πινάκων.

Άσκηση:

Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι πίνακες Α και Β έτσι ώστε να ισχύει:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}\cdot A+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot B=\begin{bmatrix}9\\ 4\end{bmatrix}$$

Λύση:

Οι παρακάτω πίνακες, είναι τύπου 2*2:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Ενώ ο παρακάτω πίνακας, είναι τύπου 2*1 (1)

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Τότε, ο πίνακας Α είναι τύπου 2*ρ και ο Β είναι τύπου 2*μ. Αφού από (1) το αποτέλεσμα είναι τύπου 2*1, τότε 2*ρ=2*μ=2*1 άρα ρ=μ=1, οπότε Α, Β είναι τύπου 2*1.

Έστω:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

τότε,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x+y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha + x + y \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + x + y = 9 \\ 2\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + x + y = 9 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

Επομένως, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \beta \in \Re, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 7-y \\ y \end{bmatrix}, \quad y \in \Re$

γ) αν ο άγνωστος πίνακας είναι τριγωνικός ή διαγώνιος, τότε χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο ορισμό, συμβολίζουμε τα στοιχεία του με γράμματα και δουλεύουμε όπως στο β. Ειδικά αν γίνεται σχέση για τον Α και ζητείται να δειχτεί ότι ο Α, ή κάποια δύναμή του είναι διαγώνιος, τότε αρκεί να δείξω ότι ο Α είναι ίσος με κ-φορές τον μοναδιαίο όπου $\kappa \in \Re$.

Άσκηση 1:

Να βρεθούν οι διαγώνιοι πίνακες X τύπου 2*2, ώστε $X^2+5X=6I$.

Λύση:

Έστω: $X=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}$ τότε, είναι $X^2+5X=6I$ οπότε

$$X^2=X*X=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \alpha^2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \beta^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\alpha & 0\\ 0 & 5\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\alpha^2+5\alpha & 0\\ 0 & \beta^2+5\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha^2+5\alpha-6=0, & \alpha=-6 \quad ή \quad \alpha=1\\ \beta^2+5\beta-6=0, & \beta=-6 \quad ή \quad \beta=1\end{cases}$$

άρα:

$$X=\begin{bmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix} \quad ή \quad X=\begin{bmatrix}-6 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \quad ή \quad X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix} \quad ή \quad X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

Άσκηση 2:

Έστω $\alpha\in\Re$ και A πίνακας της μορφής μ*ν, έτσι ώστε:
$2(\alpha^2+1)*A^2+(\alpha^2+1)*I=O$, να αποδειχτεί ότι A^6 είναι διαγώνιος.

Λύση:

$2(\alpha^2+1)*A^2+(\alpha^2+1)*I=O$ ή $(\alpha^2+1)*(2A^2+I)=O$ επειδή $\alpha^2+1>0$ τότε $2A^2+I=O$ ή $A^2=-\frac{1}{2}I$.

Έχουμε $A^6=(A^2)^3=(-\frac{1}{2}I)^3=(-\frac{1}{2})^3*I^3=-\frac{1}{8}I$ άρα ο A^6 είναι διαγώνιος.

2.Αν σε κάποια άσκηση ζητούνται τα χ, y, ζ,... που είναι στοιχεία πινάκων για τους οποίους δίνεται μία σχέση, τότε εκτελούμε όλες τις πράξεις και καταλήγουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων.

Άσκηση:

Έστω οι παρακάτω πίνακες:

$$A=\begin{bmatrix}4 & (\ln x)^2\\ 6 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 3\ln x\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Για ποιες τιμές του $x \in \Re^*$, ο πίνακας Γ, όπου $Γ=A-B^2$, είναι διαγώνιος.

Λύση:

$$B^2=B*B=\begin{bmatrix}2 & 3\ln x\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 3\ln x\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+6\ln x & 9\ln x\\ 6 & 1+6\ln x\end{bmatrix}$$

$$Γ=A-B^2=\begin{bmatrix}4 & 3\ln^2 x\\ 6 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4+6\ln x & 9\ln x\\ 6 & 1+6\ln x\end{bmatrix}$$

$$Γ=\begin{bmatrix}-6\ln x & \ln^2 x-9\ln x\\ 0 & 1-\ln x\end{bmatrix}$$

Πρέπει $lv^2x-9lvx=0$ ή $lvx(lvx-9)=0$ τότε $lvx=0$ ή $x=1$ή $lvx=9$ ή $x=e^9$.

3.Τους πίνακες εξίσωσης της μορφής κX=A, όπου $\kappa \in \Re$ A-γνωστός πίνακας και X-άγνωστος πίνακας, τις λύνουμε όπως και στους πραγματικούς, δηλαδή κX=A ή για κ≠0 τότε

$X=\frac{1}{\kappa}*A$, ενώ για κ=0 τότε A=O {αν A≠O είναι αδύνατο, αν A=O είναι αόριστο}

Άσκηση:

$$\lambda^2 X=\lambda^2\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}=4X+\begin{bmatrix}\lambda-6 & 6-\lambda\\ 2(\lambda-6) & 3(\lambda-6)\end{bmatrix}$$

Να λύσετε την εξίσωση:

Όπου $\lambda \in \Re$.

Λύση:

$$\lambda^2 X = \lambda^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 4X + \begin{bmatrix} \lambda-6 & 6-\lambda \\ 2(\lambda-6) & 3(\lambda-6) \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 X - 4X = \lambda^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda-6 & 6-\lambda \\ 2(\lambda-6) & 3(\lambda-6) \end{bmatrix}$$

$$\left(\lambda^2 - 4\right) X = \lambda^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda-6 & 6-\lambda \\ 2(\lambda-6) & 3(\lambda-6) \end{bmatrix} (1)$$

Περίπτωση 1:
Αν $\lambda^2-4=0$ ή $\lambda=\pm 2$ τότε
-για $\lambda=2$ από την (1) τότε:

$$O = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix} \quad ή \quad O = O$$

άρα ο X είναι οποιοσδήποτε πίνακας τύπου $2*2$.

-για $\lambda=-2$ από την (1) τότε:

$$O = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 12 & -24 \end{bmatrix} \quad ή \quad O = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$$

αδύνατο.

Περίπτωση 2:
Αν $\lambda^2-4 \neq 0$ ή $\lambda \neq \pm 2$ τότε:

$$X = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda^2 - 4} \begin{bmatrix} \lambda-6 & 6-\lambda \\ 2(\lambda-6) & 3(\lambda-6) \end{bmatrix}$$

4. Τα συστήματα με γνωστούς πίνακες, τα λύνουμε με τις γνωστές μεθόδους απ' τους πραγματικούς αριθμούς.

Άσκηση:

Έστω ότι ισχύουν τα παρακάτω:

$$3X+Y=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, \qquad 2X-Y=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

Να βρεθεί ο $X_{(2*2)}$.

Λύση:

Θέτουμε τα εξής:

$$\left.\begin{aligned}3X+Y&=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\\ 2X-Y&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}3X+Y&=\mathrm{A}\\ 2X-Y&=\mathrm{B}\end{aligned}\right\}\Rightarrow 5X=\mathrm{A}+\mathrm{B} \quad \text{ή} \quad X=\frac{1}{5}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$

$$X=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

Προσοχή: Αν συναντήσουμε σε εξίσωση ή σύστημα την μορφή ΑΧ+ΒΧ=Γ , όπου Α, Β, Γ γνωστοί πίνακες, τότε αναγκαστικά θέτουμε τα στοιχεία του Χ με γράμματα και κάνουμε πράξεις.

5. Άσκηση με εξίσωση και Αντίστροφο.

Άσκηση:

Αν Α, Χ, Β είναι πίνακες της μορφής ν∗ν και υπάρχει ο A^{-1}, τότε να βρεθεί ο πίνακας Χ ώστε να ισχύει ΑΧ=Β=ΧΑ.

Λύση:

ΑΧ=Β, αν το πολλαπλασιάσουμε με τον A^{-1}, τότε
$A^{-1}AX=A^{-1}B$ ή $IX=A^{-1}B$
ΧΑ=Β, αν το πολλαπλασιάσουμε με τον A^{-1}, τότε
$XAA^{-1}=B\,A^{-1}$ ή $X=BA^{-1}$.

2.12 Παραδείγματα στις εφαρμογές πινάκων

1.Άσκηση στους ορισμούς και στις πράξεις:

Θεωρούμε ότι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $x \in \Re$, να δείξετε ότι:

i) A(x)∗A(y)=A(x+y)

ii) A(0)=I

iii) $A^{-1}(x)$-3A^2(x)=I

iv) A^3(x)-3A^2(x)+3A(x)=I

Λύση:

i) A (x)∗A (y)

$$A(x) * A(y) = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & y & \frac{y^2}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0 & y+x+6 & \frac{y^2}{2}+xy+\frac{x^2}{2} \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+y+x \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & y+x & \frac{(y^2+2xy+x^2)}{2} \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y+x & \frac{(y+x)^2}{2} \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A(x+y)$$

ii) A (0)=I

$$\mathrm{A}=(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{0}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\mathrm{I}$$

iii) A^{-1}(x)=A (-x)

Για να βρούμε τον A^{-1}(x) θα πρέπει A(x)A(-x)=I, άρα:

$$\mathrm{A}(x)\mathrm{A}(-x)=\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -x & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -x+x & -\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & -x+x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\mathrm{I}$$

Αφού ισχύει η παραπάνω σχέση τότε ο A(x) αντιστρέφεται και A^{-1}(x)=A(-x).

iv)A^3(x)-3A^2(x)+3A(x)=I

$$\mathrm{A}^2(x)=\mathrm{A}(x)*\mathrm{A}(x)=\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2x & 2x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^3(x)-3A^2(x)+3A(x)=A[A^2(x)-3A(x)+3I]$, άρα

$$A^2(x)-3A(x)+3I=\begin{bmatrix}1 & 2x & 2x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & x & \frac{x^2}{2}\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2x & 2x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & -3x & -\frac{3x^2}{2}\\ 0 & -3 & -3x\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1-3+3 & 2x-3x+0 & 2x^2-\frac{3x^2}{2}+0\\ 0 & 1-3+3 & 2x-3x+0\\ 0 & 0 & 1-3+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -x & \frac{x^2}{2}\\ 0 & 1 & -x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Οπότε:

$$A\left[A^2(x)-3A(x)+3I\right]=A\begin{bmatrix}1 & -x & \frac{1}{2}x^2\\ 0 & 1 & -x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x & \frac{x^2}{2}\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -x & \frac{1}{2}x^2\\ 0 & 1 & -x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -x+x & \frac{1}{2}x^2-x^2+\frac{1}{2}x^2\\ 0 & 1 & -x+x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{(2x^2-2x^2)}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{0}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

2. Άσκηση στις δυνάμεις και τον αντίστροφο

Αν για ένα πίνακα A ισχύει $A^3+A^2+A+I=O$ (1), να δείξετε ότι:
i) $A^{4\kappa+3}+A^{4\lambda+2}+A^{4\mu+1}+I=O$ και
ii) ο πίνακας A αντιστρέφεται και
$(A^{-1})^{4\kappa+3}+(A^{-1})^{4\lambda+2}+(A^{-1})^{4\mu+1}+I=O$ όπου κ, λ, $\mu\in\Re$

Λύση:

i)$A^3+A^2+A+I=O$ αν πολλαπλασιάσουμε με τον A τότε, $A^{4+}A^3+A^2+A=O$ ή $A^4=-A^3-A^2-A$ και $A^3+A^2+A+I=O$ ή $I=-A^3+A-A$. Άρα $A^4=I$, οπότε $A^{4\kappa+3}+A^{4\lambda+2}+A^{4\mu+1}+I=O$ ή $(A^4)^\kappa A^3+(A^4)^\lambda A^2+(A^4)^\mu A+I$, επειδή $A^4=I$ τότε $I^\kappa A^3+I^\lambda A^2+I^\mu A+I=A^3+A^2+A+I$.
Από σχέση (1): $A^3+A^2+A+I=O$ άρα $A^{4\kappa+3}+A^{4\lambda+2}+A^{4\mu+1}+I=O$.

ii)$A^3+A^2+A+I=O$ ή $I=-A^3-A^2-A-I$ ή $A(-A^2-A-I)=I$. Άρα ο A αντιστρέφεται και $A^{-1}=-A^2-A-I$ επειδή $A^4=I$ τότε $A^3A=I$ ή $A^{-1}=A^3$.
$(A^{-1})^{4\kappa+3}+(A^{-1})^{4\lambda+2}+(A^{-1})^{4\mu+1}+I=(A^3)^{4\kappa+3}+(A^3)^{4\lambda+2}+(A^3)^{4\mu+1}+I=$
$A^{12\kappa}A^9+A^{12\lambda}A^6+A^{12\mu}A^3+I=(A^4)^{3\kappa}A^{4*2+1}+(A^4)^{3\lambda}A^{4*1+2}+(A^4)^{3\mu}A^3=$
$(A^4)^{3\kappa}(A^4)^2A+(A^4)^{3\lambda}A^4A^2+(A^4)^{3\mu}A^3+I=A+A^2+A^3+I=O$.

3.α) Άσκηση στις εξισώσεις

Θεωρούμε τους πίνακες A(x) και B(x):

$$A(x)=\begin{bmatrix}\lambda\sigma\upsilon\nu x & \lambda\eta\mu x\\ \lambda\eta\mu x & \lambda\sigma\upsilon\nu x\end{bmatrix}, B(x)=\begin{bmatrix}\lambda\sigma\upsilon\nu x & -\lambda\eta\mu x\\ -\lambda\eta\mu x & \lambda\sigma\upsilon\nu x\end{bmatrix}$$

i)να βρεθεί ο $\lambda\in\Re$ ώστε να είναι $A^2(x)+B^2(x)=I$
ii)για τις τιμές του λ που βρέθηκαν, να λυθεί η εξίσωση $A^2(x)=B^2(x)$.

Λύση:

i) $A^2(x)+B^2(x)=I$.

$$A^2(x)=\begin{bmatrix}\lambda\sigma\upsilon\nu x & \lambda\eta\mu x\\ \lambda\eta\mu x & \lambda\sigma\upsilon\nu x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\lambda\sigma\upsilon\nu x & \lambda\eta\mu x\\ \lambda\eta\mu x & \lambda\sigma\upsilon\nu x\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^2\sigma\upsilon\nu^2x+\lambda^2\eta\mu^2x & 2\lambda^2\sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu x\\ 2\lambda^2\sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu x & \lambda^2\eta\mu^2\chi+\lambda^2\sigma\upsilon\nu^2x\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^2\left(\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x\right) & \lambda^2(2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x)\\ \lambda^2(2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x) & \lambda^2\left(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x\right)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda^2\eta\mu 2x\\ \lambda^2\eta\mu 2x & \lambda^2\end{bmatrix}=\lambda^2\begin{bmatrix}1 & \eta\mu 2x\\ \eta\mu 2x & 1\end{bmatrix}$$

$$B^2(x)=\begin{bmatrix}\lambda\sigma\upsilon\nu x & -\lambda\eta\mu x\\ -\lambda\eta\mu x & \lambda\sigma\upsilon\nu x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\lambda\sigma\upsilon\nu x & -\lambda\eta\mu x\\ -\lambda\eta\mu x & \lambda\sigma\upsilon\nu x\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^2\sigma\upsilon\nu^2x+\lambda^2\eta\mu^2x & -\lambda^2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\lambda^2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\\ -\lambda^2\sigma\upsilon\nu x-\lambda^2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x & \lambda^2\eta\mu^2x+\lambda^2\sigma\upsilon\nu^2x\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^2\left(\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x\right) & -\lambda^2(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)\\ -\lambda^2(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x) & \lambda^2\left(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x\right)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^2 & -\lambda^2\eta\mu 2x\\ -\lambda^2\eta\mu 2x & \lambda^2\end{bmatrix}=\lambda^2\begin{bmatrix}1 & -\eta\mu 2x\\ -\eta\mu 2x & 1\end{bmatrix}$$

$$A^2(x)+B^2(x)=\begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda^2\eta\mu 2x\\ \lambda^2\eta\mu x & \lambda^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda^2 & -\lambda\eta\mu 2x\\ -\lambda^2\eta\mu 2x & \lambda^2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda^2 & \lambda^2\eta\mu 2x-\lambda^2\eta\mu 2x\\ \lambda^2\eta\mu 2x-\lambda^2\eta\mu 2x & \lambda^2+\lambda^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad \acute{\eta}$$

$$\begin{bmatrix}2\lambda^2 & 0\\ 0 & 2\lambda^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

θα πρέπει $2\lambda^2=1$ ή $\lambda^2=\frac{1}{2}$ άρα:

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \acute{\eta}\quad \lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \acute{\eta}\quad \lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \acute{\eta}\quad \lambda=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ii) $A^2(x)=B^2(x)$

Για τις παραπάνω τιμές το λ υψώνεται στο τετράγωνο οπότε θα έχουμε τα ίδια αποτελέσματα.

$$A^2(x)=B^2(x) \quad ή \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\begin{bmatrix} 1 & ημ2x \\ ημ2x & 1 \end{bmatrix}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\begin{bmatrix} 1 & -ημ2x \\ -ημ2x & 1 \end{bmatrix}$$

$$ή \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}ημ2x \\ \frac{1}{2}ημ2x & \frac{1}{2} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}ημ2x \\ -\frac{1}{2}ημ2x & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=O$$

$$ή \quad \begin{bmatrix} 0 & 2ημ2x \\ 2ημ2x & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Θα πρέπει 2ημ2x=0 ή 2ημ2x=2ημ0.
Άρα 2x=2κπ ή 2x=2κπ+π.

β) Άσκηση στις εξισώσεις (με άγνωστο τον πίνακα X)

Να υπολογίσετε τον πίνακα X όταν:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 11 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

Λύση

Ο πίνακας X θα πρέπει να είναι τύπου 2*3, θέτω:

$$X=\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 11 & 17 & 8 \end{bmatrix} \quad ή$$

Οπότε έχουμε
$$\begin{bmatrix} \alpha+2\delta & \beta+2\varepsilon & \gamma+2\zeta \\ -\delta & -\varepsilon & -\zeta \\ 8\alpha+\delta & 8\beta+\varepsilon & 8\gamma+\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 11 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

Θα πρέπει:
$$\begin{cases} \alpha+2\delta=7 \Rightarrow \alpha+6=7 \Rightarrow \alpha=1 \\ \beta+2\varepsilon=4 \Rightarrow \beta+2=4 \Rightarrow \beta=2 \\ \gamma+2\zeta=1 \Rightarrow \gamma=1 \\ -\delta=-3 \Rightarrow \delta=3 \\ -\varepsilon=-1 \Rightarrow \varepsilon=1 \\ -\zeta=0 \Rightarrow \zeta=0 \\ 8\alpha+\delta=11 \Rightarrow 8+3=1 \quad ισχύει \\ 8\beta+\varepsilon=17 \Rightarrow 16+1=17 \quad ισχύει \\ 8\gamma+\zeta=8 \Rightarrow 8+0=8 \quad ισχύει \end{cases}$$

Άρα ο πίνακας X είναι ο παρακάτω:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Άσκηση θεωρητική

Αν για τους ν*ν πίνακες ισχύουν AB=A και B^3=O, να δείξετε ότι A=O.

Λύση:

Έχουμε AB=A (1), αν πολλαπλασιάσουμε την B^3=O με A τότε B^3=O ή ABB^2=AO (από την 1): AB^2=O ή ABB=O (από την 1): AB=O και AB=A άρα A=O.

5. Γενικές ασκήσεις

Άσκηση 1:

Δίνεται ο 3*3 πίνακας A με $A^3=A^2+A$:
α) να δειχθεί ότι ο πίνακας A-I είναι αντιστρέψιμος και β) αν X είναι ένας 3*3 άγνωστος πίνακας, να λυθούν οι εξισώσεις
$XA-X=A$ και $XA^2-X=A^2$.

Λύση:

α) Θέτουμε $\Gamma=A-I$ ή $A=\Gamma+I$ οπότε έχουμε $A^3=A^2+A$ ή
$A^3-A^2-A=O$ ή $(\Gamma+I)^3-(\Gamma+I)^2-(\Gamma+I)=O$ ή
$\Gamma^3+3\Gamma^2+3\Gamma+I^3-\Gamma^2-2\Gamma-I-\Gamma-I=O$ ή $\Gamma^3+2\Gamma=I$ ή $\Gamma(\Gamma^2+2\Gamma)=I$ άρα ο $\Gamma=A-I$ αντιστρέφεται και $\Gamma^{-1}=\Gamma^2+2\Gamma$ ή $(A-I)^{-1}=(A-I)^2+2(A-I)$ ή $(A-I)^{-1}=$ $A^2-2A+I^2+2A-2I$ ή $(A-I)^{-1}=A^2-I$.

β) $XA-X=A$ ή $X(A-I)=A$ ή $X(A-I)(A-I)^{-1}=A(A-I)^{-1}$ ή $X=A(A^2-I)$ ή
$X=A^3-A$ ή $X=A^2+A-A$ ή $X=A^2$.
$XA^2-X=A^2$ ή $X(A^2-I)=A^2$ ή $X(A-I)(A+I)=A^2$.

Θέτω $B=A+I$ ή $A=B-I$ οπότε έχουμε $A^3-A^2-A=O$ ή
$(\Gamma-I)^3-(\Gamma-I)^2-(\Gamma-I)=O$
$B^3-3B^2-3B-I-B^2+2B-I-B+I=O$ ή $B^3-4B^2+4B=I$ ή
$B(B^2-4B+4I)=I$ άρα ο B αντιστρέφεται και
$B^{-1}=B^2-4B+4I=(A+I)^2-4(A+I)+4I=A^2+2A+I-4^A-4I+4I=$
$A^2-2A+I=(A-I)^2$

$X(A-I)(A+I)(A+I)^{-1}=A^2(A+I)^{-1}$ ή $X(A-I)(A-I)^{-1}=$
$A^2(A+I)^{-1}(A-I)^{-1}$ ή $X=A^2(A-I)^2(A^2-I)$ ή $X=A^2(A-I)^2(A-I)(A+I)$ ή
$X=A^2(A-I)^3(A+I)$ ή $X=A^2(A^3-3A^2+3A-I)(A+I)$ ή
$X=A^2(A^4+A^3-3A^3-3A^2+3A^2+3A-A-I)$ ή $X=A^2(A^4-2A^3+2A-I)$ ή
$X=A^2[A(A^2+A)-2(A^2+A)+2A-I]$ ή $X=A^2(A^3+A^2-2A^2-2A+2A-I)$ ή
$X=A^2(A^3-A^2-I)$ ή $X=A^2(A^2+A-A^2-I)$ ή $X=A^2(A-I)$ ή $X=A^3-A^2$ ή
$X=A$.

Άσκηση 2:

Να βρεθούν όλοι οι διαγώνιοι πίνακες X τύπου 2*2 όταν, $X^2+X=2I$. Αν οι πίνακες αυτοί είναι αντιστρέψιμοι να βρεθούν οι αντίστροφοί τους.

Λύση:

$$X^2+X=2I \quad ή \quad \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha^2+\alpha-2=0 \quad ή \quad \begin{cases} \alpha=-2 \\ ή \\ \alpha=1 \end{cases} \\ \beta^2+\beta-2=0 \quad ή \quad \begin{cases} \beta=-2 \\ ή \\ \beta=1 \end{cases} \end{cases}$$

$$X_1=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}=-2I \quad ή \quad X_2=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ή \quad X_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

$$ή \quad X_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$X^2+X=2I$ ή $I=\frac{1}{2}X(X+\frac{1}{2}I)$, άρα $X^{-1}=\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}I$.

$$(X_1)^{-1}=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}I=\frac{1}{2}(-2I)+\frac{1}{2}I=-\frac{1}{2}I$$

$$(X_2)^{-1}=\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{2}I=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(X_3)^{-1}=\frac{1}{2}X_3+\frac{1}{2}I=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}I=I$$

$$(X_4)^{-1}=\frac{1}{2}X_4+\frac{1}{2}I=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3:

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας όπου α>0:

$$A=\begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 4 & \alpha \end{bmatrix}$$

α) να υπολογίσετε το α έτσι ώστε $A^2=0$ και
β) αν α=2 να αποδείξετε ότι ο πίνακας I+A, είναι αντιστρέψιμος και στη συνέχεια να βρείτε τον πίνακα X που να ικανοποιεί την σχέση X+A=I-AX.

Λύση:

$$\alpha)\quad A^2=O \ \text{ή}\ \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 4 & \alpha \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 4 & \alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ \text{ή}\ \begin{bmatrix} \alpha^2-4 & -\alpha+\alpha \\ 4\alpha-4\alpha & -4+\alpha^2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ή}\ \begin{bmatrix} \alpha^2-4 & 0 \\ 0 & \alpha^2-4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

άρα θα πρέπει $\alpha^2-4=0$ ή $(\alpha-2)(\alpha+2)=0$ οπότε α=2 ή α=-2.

β) Θέτω Γ=I+A ή A=Γ-I έχουμε $A^2=O$ ή $(\Gamma-I)^2=O$ ή $\Gamma^2-2\Gamma+I=O$ ή $-\Gamma^2+2\Gamma=I$ ή $\Gamma(-\Gamma+2I)=I$ άρα ο Γ είναι αντιστρέψιμος και
$\Gamma^{-1}=-\Gamma+2I$ ή $(A+I)^{-1}=-(I+A)+2I=-I-A+2I=I-A=$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

X+A=I-AX ή X+AX=I-A ή (I+A)X=I-A ή $(I+A)^{-1}(I+A)X=$ $(I-A)(I+A)^{-1}$ ή X=(I-A)(I-A) ή $X=(I-A)^2$ ή

$$X=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \text{ή}\quad X=\begin{bmatrix} 1+4 & 1+1 \\ 4+4 & 4+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4:

$$\text{Άν}\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

i) να βρείτε τους $A^2=A^{30}$ και
ii) αν $A^{30}+\mu A^6+9\nu I=O$ να δείξετε ότι $81\mu+\nu=-9^{14}$.

Λύση:

i) $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = 9I$

$A^{30}=(A^2)^{15}=(9\mathbf{I})^{15}=9^{15}\mathbf{I}$.

ii)$A^{30}+\mu A^6+9\nu\mathbf{I}=\mathbf{O}$ (1)

$A^6=(A^2)^3=9^3\mathbf{I}$ (2)

Από (1),(2) έχουμε $A^{30}+\mu A^6+9\nu\mathbf{I}=\mathbf{O}$ ή $9^{15}\mathbf{I}+9^3\mu\mathbf{I}+9\nu\mathbf{I}=\mathbf{O}$ ή $(9^{15}+9^3\mu+9\nu)\mathbf{I}=\mathbf{O}$ ή $9(9^{14}+9^2\mu+\nu)\mathbf{I}=\mathbf{O}$ επειδή $\mathbf{I}\neq\mathbf{O}$ τότε $9^{14}+81\mu+\nu=0$ ή $81\mu+\nu=-9^{14}$.

Άσκηση 5

Θεωρούμε τον 2∗2 πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$ με $\alpha_{ij}=I+3j$ $i\leq j$ και $\alpha_{ij}=j-i$ $i>j$. Να εξετάσετε αν υπάρχουν χ, y, ω τέτοια ώστε Α=Β όταν

$$B = \begin{bmatrix} x^2 & y-2 \\ \omega^2 & 8 \end{bmatrix}$$

Λύση

Ο πίνακας Α είναι ο εξής:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

-για $\alpha_{11}=1+3*1=4$
-για $\alpha_{12}=1+2*3=7$
-για $\alpha_{21}=2-1=1$
-για $\alpha_{22}=9+2-3=8$.

Άρα $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ *οπότε για* $A=B$ *ή* $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & y-2 \\ \omega^2 & 8 \end{bmatrix}$

Θα πρέπει: $\begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ y - 2 = 7 \Rightarrow y = 9 \\ \omega^2 = 1 \Rightarrow \omega = \pm 1 \\ 8 = 8 \qquad \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota \end{cases}$

Άρα x=2 ή x=-2, y=9, ω=1 ή ω=-1.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Κεφάλαιο 3^{o}

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

3.1Η έννοια του γραμμικού συστήματος

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\ldots+\alpha_\nu x_\nu=\beta$, όπου $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu,\beta$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_\nu$, άγνωστοι λέγεται γραμμική εξίσωση με ν αγνώστους. Οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu$ λέγονται συντελεστές και ο β σταθερός όρος.

Λύση της εξίσωσης αυτής θα ονομάζεται κάθε διατεταγμένη νιάδα αριθμών $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_\nu)$ οι οποίοι επαληθεύουν την εξίσωση με ν αγνώστους. Για παράδειγμα, η διατεταγμένη τριάδα (2,3,4) επαληθεύει τη γραμμική εξίσωση $0,1x_1+0,2x_2+0,3x_3=2$, αφού $0,1*2+0,2*3+0,3*4=2$. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε και την έκφραση η λύση της εξίσωσης είναι η $x_1=\lambda_1$, $x_2=\lambda_2$, $x_3=\lambda_3,\ldots$, $x_\nu=\lambda_\nu$.

Ένα πλήθος μ γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους, των οποίων ζητάμε τις κοινές λύσεις, λέγεται γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους ή απλούστερα γραμμικό σύστημα μ*ν και έχει την παρακάτω μορφή :

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1\nu}x_\nu=\beta_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2\nu}x_\nu=\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\mu1}x_1+a_{\mu2}x_2+\ldots+a_{\mu\nu}x_\nu=\beta_{\mu3} \end{cases}$$

Οι αριθμοί α_{ij}, $i=1,2,3,\ldots,\mu$ και $j=1,2,3,\ldots,\nu$ λέγονται συντελεστές των αγνώστων ή συντελεστές του συστήματος, ενώ οι αριθμοί $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\mu$ λέγονται σταθεροί όροι. Οι συντελεστές α_{ij} (δηλαδή οι $\alpha_{11},\alpha_{22},\alpha_{33}$ κτλ) λέγονται διαγώνιοι συντελεστές του συστήματος.

Κάθε διατεταγμένη νιάδα αριθμών που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις ενός μ*ν συστήματος λέγεται λύση του συστήματος. Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τις λύσεις ενός συστήματος λέγεται επίλυση του συστήματος. Ένα γραμμικό σύστημα που έχει μία τουλάχιστον λύση λέγεται συμβιβαστό, ενώ όταν δεν έχει καμία λύσει λέγεται αδύνατο.

Δύο γραμμικά συστήματα που έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις λέγονται ισοδύναμα.

Αποδεικνύεται ότι ένα συμβιβαστό σύστημα έχει μία ή άπειρο πλήθος λύσεων :

$$
\text{Γ.Σ.}\begin{cases} \text{ΑΔΥΝΑΤΟ} \\ \text{ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΟ}\begin{cases} \text{ΜΙΑ ΛΥΣΗ} \\ \text{ΑΠΕΙΡΟ ΠΛΗΘΟΣ ΛΥΣΕΩΝ} \end{cases} \end{cases}
$$

Αν στο γραμμικό σύστημα μ∗ν οι σταθεροί όροι $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$ είναι όλοι μηδέν, δηλαδή

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\nu}x_\nu = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\nu}x_\nu = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\mu1}x_1 + a_{\mu2}x_2 + \ldots + a_{\mu\nu}x_\nu = 0 \end{cases}
$$

τότε το σύστημα λέγεται ομογενές.

Η νιάδα (0,0,0,…,0) επαληθεύει πάντοτε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα μ∗ν. Άρα το ομογενές σύστημα είναι πάντοτε συμβιβαστό και έχει μοναδική λύση (τη μηδενική) ή και μη μηδενικές λύσεις, οι οποίες θα είναι στο πλήθος άπειρες.

Ο πίνακας που αποτελείται από τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων, συμπληρωμένο με τον πίνακα στήλη των σταθερών όρων λέγεται επαυξημένος πίνακας του συστήματος.

3.2 Επίλυση γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Αν σε ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόσουμε μια από τις επόμενες διαδικασίες τότε προκύπτει ισοδύναμο σύστημα:

-Εναλλαγή της θέσης δύο εξισώσεων
-Πολλαπλασιασμός των μελών μιας εξίσωσης με ένα μη μηδενικό αριθμό
-Πρόσθεση των μελών μιας εξίσωσης (πολλαπλασιασμένων με ένα αριθμό)στα μέλη μιας άλλης.

Έτσι όταν έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα προσπαθούμε, εφαρμόζοντας τις προηγούμενες διαδικασίες, να το μετασχηματίσουμε σε ένα άλλο ισοδύναμο σύστημα του οποίου η λύση είναι προφανής.

Παράδειγμα

Έστω το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ 2x-y+5\omega=-3 \\ 3x+y+2\omega=1 \end{cases}$ (Σ_1)

-Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης E_1 του (Σ_1) με -2 και τα προσθέτουμε στα αντίστοιχα μέλη της δεύτερης εξίσωσης E_2 του (Σ_1). Έτσι απαλείφεται από την E_2 ο άγνωστος x.

$E_2 \to E_2 - 2E_1$ $\begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ 3y+3\omega=-3 \\ 3x+y+2\omega=1 \end{cases}$ (Σ_2)

- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης E_1 του (Σ_2) με -3 και τα προσθέτουμε στα μέλη της E_3. Έτσι απαλείφεται από την E_3 ο άγνωστος x.

$E_3 \to E_3 - 3E_1$ $\begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ 3y+3\omega=-3 \\ 7y-\omega=1 \end{cases}$ (Σ_3)

- Πολλαπλασιάζουμε την E_2 του (Σ_3) με $\frac{1}{3}$. Έτσι ο συντελεστής του y γίνεται 1.

$E_2 \to \frac{1}{3}E_2$ $\begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ y+\omega=-1 \\ 7y-\omega=1 \end{cases}$ (Σ_4)

Συνεχίζουμε εφαρμόζοντας τις παραπάνω διαδικασίες που παριστάνουμε πλέον μόνα συμβολικά:

$$E_3 \rightarrow E_3 - 7E_2 \qquad \begin{cases} x - 2y + \omega = 0 \\ y + \omega = -1 \\ -8\omega = 8 \end{cases} \qquad (\Sigma_5)$$

$$E_3 \rightarrow -\frac{1}{8}E_3 \qquad \begin{cases} x - 2y + \omega = 0 \\ y + \omega = -1 \\ \omega = -1 \end{cases} \qquad (\Sigma_6)$$

$$E_2 \rightarrow E_2 - E_3 \qquad \begin{cases} x - 2y + \omega = 0 \\ y = 0 \\ \omega = -1 \end{cases} \qquad (\Sigma_7)$$

$$E_1 \rightarrow E_1 - E_3 \qquad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = 0 \\ \omega = -1 \end{cases} \qquad (\Sigma_8)$$

$$E_1 \rightarrow E_1 + 2E_2 \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \omega = -1 \end{cases} \qquad (\Sigma_9)$$

Επειδή το σύστημα (Σ_9) είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα (Σ_1), τότε συμπεραίνουμε ότι η λύση του συστήματος είναι η τριάδα (1,0,-1).

Μπορούμε να περιγράψουμε απλούστερα τη διαδικασία επίλυσης ενός $\mu * \nu$ γραμμικού συστήματος, αν σκεφτούμε ως εξής : αφού κάθε εξίσωση παριστάνεται με μια γραμμή του επαυξημένου πίνακα, αρκεί οι παραπάνω μετατροπές των εξισώσεων να γίνονται στις γραμμές $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\mu$ του επαυξημένου πίνακα. Οι μετατροπές αυτές λέγονται γραμμοπράξεις και είναι οι εξής:

Γραμμοπράξη	Συμβολισμός
1.Εναλλαγή της θέσης δύο γραμμών	$\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$
2.Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με ένα μη μηδενικό αριθμό	$\Gamma_i \to \lambda\Gamma_j, \lambda \neq 0$
3.Πρόσθεση των στοιχείων μιας γραμμής, πολλαπλασιασμένων με έναν αριθμό, στα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής.	$\Gamma_i \to \Gamma_i + \lambda\Gamma_j$

Όταν έχουμε δύο πίνακες Α, Β που ο ένας προκύπτει από τον άλλο με γραμμοπράξεις, τότε οι πίνακες αυτοί λέγονται γραμμοϊσοδύναμοι ή απλώς ισοδύναμοι και γράφουμε Α~Β. Είναι προφανές ότι αν οι επαυξημένοι πίνακες δύο συστημάτων είναι ισοδύναμοι, τότε και τα συστήματα είναι ισοδύναμα, αφού καθεμιά γραμμοπράξη ξεχωριστά οδηγεί σε σύστημα ισοδύναμο με το αρχικό.

Έτσι η επίλυση του προηγούμενου συστήματος μπορεί να γίνει ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & -1 & 5 & \vdots & -3 \\ 3 & 1 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & 3 & \vdots & -3 \\ 3 & 1 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \overset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & 3 & \vdots & -3 \\ 0 & 7 & -1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 7 & -1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \overset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 7\Gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & -8 & \vdots & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \frac{1}{8}\Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3 \\ \sim \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Gamma_1 \to \Gamma_1 + 2\Gamma_2 \\ \sim \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί στο σύστημα $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \omega = -1 \end{cases}$

Επομένως, η λύση του συστήματος είναι η τριάδα (1,0,-1).

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι ο μοναδιαίος 3∗3 πίνακας. Έτσι μπορούμε να «διαβάσουμε» αμέσως τη λύση του συστήματος.

Πολλές φορές για να απλοποιήσουμε και να συντομεύσουμε τη διαδικασία επίλυσης ενός συστήματος, εφαρμόζουμε περισσότερες από μία γραμμοπράξεις.

Παράδειγμα

Έστω το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 10 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & \vdots & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & -2 & \vdots & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & \vdots & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \sim \\ \Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & \vdots & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -9 & \vdots & -14 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \Gamma_2 \to \dfrac{1}{2}\Gamma_2 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & \vdots & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -9 & \vdots & -14 \end{array}\right] \quad \underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 4\Gamma_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & \vdots & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \vdots & -2 \end{array}\right] \quad \underset{\Gamma_3 \to -\Gamma_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & \vdots & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \Gamma_1 \to \Gamma_1 - 6\Gamma_3 \\ \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 5 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \Gamma_1 \to \Gamma_1 - 5\Gamma_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{array}\right]$$

Άρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το παρακάτω σύστημα :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = 2 \end{cases} \quad \text{Οπότε} \quad \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 + 3 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις ,τις διατεταγμένες πεντάδες ($3-2x_2+x_3,x_2,x_3,-1,-2$), όπου x_2,x_3 μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε πραγματικές τιμές.

Π.χ. για $x_2=1,x_3=0$ έχουμε τη λύση (1,1,0,-1,2) του συστήματος.

Ο τελευταίος από τους παραπάνω ισοδύναμους επαυξημένους πίνακες ονομάζεται ανηγμένος κλιμακωτός.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας μ*ν πίνακας λέγεται ανηγμένος κλιμακωτός, αν ισχύουν συγχρόνως τα παρακάτω:

1. Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πριν από τις μηδενικές.
2. Το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1 και βρίσκεται δεξιότερα του αντίστοιχου 1 της προηγούμενης γραμμής.
3. Το πρώτο από αριστερά 1 κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι και το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης της οποίας ανήκει.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι πίνακες $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί, ενώ οι πίνακες $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ δεν είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε πίνακας μετατρέπεται σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα με την εκτέλεση ενός πεπερασμένου πλήθους γραμμοπράξεων.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα κάθε πίνακας είναι ισοδύναμος με έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα. Μπορεί να αποδειχτεί ότι αυτός ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι και μοναδικός.

Ο παρακάτω αλγόριθμος μας δίνει μια μέθοδο με την οποία μπορούμε να βρίσκουμε κάθε φορά το μοναδικό αυτόν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

1. Βρίσκουμε την πρώτη στήλη του πίνακα που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο.
2. Μεταφέρουμε στον πίνακα πρώτη τη γραμμή που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο της στήλης (γραμμοπράξη 1).
3. Κάνουμε το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης μονάδα (γραμμοπράξη 2).
4. Κάνουμε όλα τα στοιχεία της στήλης που είναι κάτω από τη μονάδα μηδενικά (γραμμοπράξη 3).
5. Αγνοούμε την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 έως 4 για τις επόμενες γραμμές του πίνακα. Αν όμως οι γραμμές που απέμειναν είναι μηδενικές, πηγαίνουμε στο 6^o βήμα.
6. Από γραμμή σε γραμμή χρησιμοποιώντας το πρώτο από αριστερά 1 κάθε γραμμής και τη γραμμοπράξη 3 κάνουμε μηδέν όλα τα στοιχεία της στήλης στην οποία βρίσκεται η μονάδα αυτή.

Ο παραπάνω αλγόριθμος, που ονομάζεται και αλγόριθμος του Gauss ολοκληρώνεται όταν σε κάθε μη μηδενική γραμμή του πίνακα το πρώτο από αριστερά 1 είναι και το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.

Οπότε για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με τον αλγόριθμος του Gauss, μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακά του σε έναν ισοδύναμο ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν κατά την επίλυση ενός συστήματος με την βοήθεια του επαυξημένου πίνακα παρουσιαστεί μια γραμμή της μορφής 0 0 ...0:α, με $\alpha \neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Κεφάλαιο 4^{o}

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

4.1 Η έννοια της ορίζουσας

Κάθε τετραγωνικός πίνακας (δηλαδή που ο αριθμός γραμμών ισούται με τον αριθμό στηλών) τύπου ν*ν, συνδέεται με έναν πραγματικό αριθμό που ονομάζεται ορίζουσα.

Η ορίζουσα ενός πίνακα Α τύπου 2*2 είναι ο αριθμός ($\alpha_{11}*\alpha_{22}-\alpha_{12}*\alpha_{21}$) και συμβολίζεται με $|A| = D(A)$. Δηλαδή:

$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Ο αριθμός $\alpha_{11}*\alpha_{22}-\alpha_{12}*\alpha_{21}$ είναι το ανάπτυγμα ορίζουσας δεύτερης τάξης.

Για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα διαστάσεων μεγαλύτερων του 2*2, δηλαδή $\nu*\nu$, $\nu\in N$ με $\nu\geq 3$, χρειάζεται η επεξήγηση της έννοιας της ελάσσονος ορίζουσας.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \alpha_{11}*A_{11}+\alpha_{12}*A_{12}+\dots+\alpha_{1\nu}*A_{1\nu}$$

Το $\alpha_{11}A_{11}+\alpha_{12}A_{12}+\dots+\alpha_{1\nu}A_{1\nu}$ είναι το ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς την πρώτη γραμμή.

Το $A_{ij}=(-1)^{i+j}*M_{ij}$ είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του α_{ij} και το M_{ij} είναι η ελάσσονα ορίζουσα του α_{ij} η οποία προκύπτει από την αρχική ορίζουσα αν διαγράψω την i-γραμμή και τη j-στήλη.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1.Το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας το υπολογίζουμε ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη.

2.Μια ορίζουσα είναι μηδέν (χωρίς πράξεις) αν:

α) τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης είναι όλα ίσα με 0 (Παρατήρηση! Το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας το υπολογίζουμε ως προς εκείνη τη γραμμή ή στήλη που έχει τα περισσότερα 0),

β)τα στοιχεία δύο γραμμών ή δύο στηλών είναι ίσα ή ανάλογα.

Παράδειγμα:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 3 & 9 & -\ln 2 \\ 2 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad |B| = \begin{vmatrix} -3 & \ln 3 & -6 \\ 5 & 1996 & 10 \\ 9 & -4 & -18 \end{vmatrix} = 0$$

3.Ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

Παράδειγμα:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2428 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3*1*2 = -6$$

Επίσης ισχύει $|I_\nu| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$ και $|\lambda I_\nu| = \lambda^\nu$

4.2 Είδη ασκήσεων

1.Όταν δίνεται ο πίνακας Α και ζητείται να βρεθεί η ορίζουσα του, ή να δειχτεί μία σχέση για αυτήν, τότε υπολογίζουμε την ορίζουσα με τον ορισμό και τις ιδιότητες και κάνουμε πράξεις, εκτός και αν ο πίνακας Α είναι τύπου 2*2 ή 3*3, οπότε θέτουμε τα στοιχεία του με γράμματα και μετά υπολογίζουμε την ορίζουσά του.

2.Όταν δίνεται να λυθεί μια εξίσωση ή μια ανίσοση που περιέχει ορίζουσες, αφού τις υπολογίζουμε και κάνουμε αντικατάσταση προκύπτει αλγεβρική εξίσωση ή ανίσοση.

3.Όταν δίνεται άσκηση στην οποία υπάρχει το σύμβολο A_{ij} , τότε χρησιμοποιούμε τον ορισμό του αλγεβρικού συμπληρώματος διακρίνοντας περιπτώσεις για τα i,j.

Παράδειγμα:

Να λυθεί η εξίσωση $x^2-3x+2=0$ έτσι ώστε οι ρίζες του να είναι ίσες με τα ij ενός αλγεβρικού συμπληρώματος.

$x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x_1=1, x_2=2$
Αν i=1 και j=2 τότε $A_{ij}=A_{12}=(-1)^{1+2}*M_{12}$

4.Όταν δίνεται ότι ο πίνακας Α είναι τύπου 2*2 και στην άσκηση υπάρχουν πίνακες της μορφής (κΑ+λΙ), όπου $\kappa,\lambda \in \Re$, τότε θέτουμε τον πίνακα Α με στοιχεία γράμματα και υπολογίζουμε όλους τους πίνακες και όλες τις ορίζουσες που υπάρχουν είτε στην υπόθεση, είτε στο συμπέρασμα της άσκησης. Το σύστημα στο οποίο καταλήγουμε έχει δύο αγνώστους, την ορίζουσα του Α ($|A|$) και το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Όταν δύο πίνακες είναι ίσοι, τότε έχουν ίσες ορίζουσες. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

5.Όταν δίνεται ένας πίνακας Α και μας ζητάνε να βρούμε τον A^{-1} έτσι ώστε ο πίνακας Α να είναι κανονικός, τότε θα πρέπει $|A| \neq 0$ και τον A^{-1} τον βρίσκουμε σύμφωνα με τον τύπο:
$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$,όπου $A_{ij}=(-1)*\Delta_{ij}$.Υπολογίζουμε τα A_{ij} τα αντικαθιστούμε στο παραπάνω τύπο και έτσι βρίσκουμε τον A^{-1}.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Αν η ορίζουσα ενός πίνακα είναι ίση με το μηδέν τότε ο πίνακας λέγεται ιδιάζον πίνακας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Αν Α είναι ένας πίνακας τύπου 2*2 για τον οποίο ισχύει: $|A-\kappa I|=\kappa, |A-\lambda I|=\lambda$ με $\kappa,\lambda \in \Re$ και $\kappa \neq \lambda$ να δείξετε ότι $|A|=\kappa * \lambda$.

Λύση

Έστω $A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ τότε $A-\kappa I=\begin{bmatrix} \alpha-\kappa & \beta \\ \gamma & \delta-\kappa \end{bmatrix}$ και $A-\lambda I=\begin{bmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{bmatrix}$

$$|A|=\alpha\delta-\beta\gamma$$

$$|A-\kappa I|=(\alpha-\kappa)(\delta-\kappa)-\beta\gamma=\alpha\delta-\kappa\alpha-\kappa\delta+\kappa^2-\beta\gamma=\alpha\delta-\kappa(\alpha+\delta)+\kappa^2-\beta\gamma=$$
$$|A|-\kappa(\alpha+\delta)+\kappa^2$$

$$|A-\lambda I|=(\alpha-\lambda)(\delta-\lambda)-\beta\gamma=\alpha\delta-\lambda\alpha-\lambda\delta+\lambda^2-\beta\gamma=\alpha\delta-\lambda(\alpha+\delta)+\lambda^2-\beta\gamma=$$
$$|A|-\lambda(\alpha+\delta)+\lambda^2$$

Είναι $|A-\kappa I|=\kappa \Rightarrow |A|-\kappa(\alpha+\delta)+\kappa^2=\kappa$ (1)

$|A-\lambda I|=\lambda \Rightarrow |A|-\lambda(\alpha+\delta)+\lambda^2=\lambda$ (2)

Αν αφαιρέσουμε τις παραπάνω σχέσεις, δηλαδή (1)-(2) τότε προκύπτει:

$$-\kappa(\alpha+\delta)+\lambda(\alpha+\delta)+\kappa^2-\lambda^2=\kappa-\lambda \Rightarrow -(\kappa-\lambda)(\alpha+\delta)+\kappa^2-\lambda^2=\kappa-\lambda \Rightarrow$$
$$-(\kappa-\lambda)(\alpha+\delta)+(\kappa-\lambda)(\kappa+\lambda)-(\kappa-\lambda)=0 \Rightarrow (\kappa-\lambda)[-(\alpha+\delta)+\kappa+\lambda-1]=0$$

Επειδή $\kappa \neq \lambda$ τότε $-(\alpha+\delta)+\kappa+\lambda-1=0 \Rightarrow \alpha+\delta=\kappa+\lambda-1$ (3)

Οπότε $|A-\kappa I|=\kappa \Rightarrow |A|-\kappa(\alpha+\delta)+\kappa^2=\kappa$

Από (3) έχουμε:

$$|A|-\kappa(\kappa+\lambda-1)+\kappa^2=\kappa \Rightarrow |A|-\kappa^2-\kappa\lambda+\kappa+\kappa^2=\kappa \Rightarrow |A|=\kappa\lambda$$

Άσκηση 2

Αν πίνακας Α τύπου 2*2:

α)να δειχτεί ότι $|A^2| = |A|^2$

β)να δειχτεί ότι $|\lambda A| = \lambda^2|A|$ όπου $\lambda \in \Re$

γ)αν Α,Β τύπου 2*2 με $A^2 = 2AB + I$ τότε:

i)να δειχτεί ότι ο Α αντιστρέφεται,

ii)AB=BA,

iii)$|B^2 + I| \geq 0$

δ)αν $A^2 + 2A = O$,να υπολογισθεί η $|A|$.

Λύση

Έστω $A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

α) $A^2 = A*A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\delta \\ \gamma\alpha + \delta\gamma & \gamma\alpha + \delta^2 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \quad (1)$

$|A^2| = \begin{vmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\delta \\ \gamma\alpha + \delta\gamma & \gamma\beta + \delta^2 \end{vmatrix} = (\alpha^2 + \beta\gamma)(\beta\gamma + \delta^2) - (\alpha\beta + \beta\delta)(\alpha\gamma + \gamma\delta) =$

$\alpha^2\beta\gamma + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta\gamma\delta^2 - \alpha^2\beta\gamma - \alpha\beta\gamma\delta - \alpha\beta\gamma\delta - \beta\gamma\delta^2 =$

$\alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \quad (2)$

Από (1) $|A| = \alpha\delta - \beta\gamma$ οπότε $|A|^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$

Από (2) $\rightarrow |A^2| = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$

Άρα $|A^2| = |A|^2$

β) $\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{bmatrix}$

$|\lambda A| = \lambda^2\alpha\delta - \lambda^2\beta\gamma = \lambda^2(\alpha\delta - \beta\gamma)$

Από (1) $|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$,οπότε $|\lambda A| = \lambda^2|A|$

γ)i) $A^2 = 2AB + I \Rightarrow A^2 - 2AB = I \Rightarrow A(A-2B) = I$, άρα ο Α αντιστρέφεται και $A^{-1} = A - 2B$

ii) $A(A-2B) = I \Rightarrow A^2 - 2AB = I$ (3)

$(A-2B)A = I \Rightarrow A^2 - 2BA = I$ (4)

Αν αφαιρέσουμε τις παραπάνω σχέσεις, δηλαδή (3)-(4) τότε προκύπτει: $2AB = 2BA \Rightarrow AB = BA$ (5)

iii)Από (5) ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, άρα ισχύει και η ταυτότητα $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

Οι Α,Β είναι τύπου 2*2 και ο $(A-B)^2$ είναι τύπου 2*2 επομένως $|B^2 + I| = |(A-B)^2| = |A-B|^2 \geq 0$

δ) $A^2 + 2A = 0 \Rightarrow A^2 = -2A \Rightarrow |A^2| = |-2A|$

Από α),β) έχουμε $|A^2| = |-2A| \Rightarrow |A|^2 = 4|A| \Rightarrow |A|(|A| - 4) = 0$

Άρα $|A| = 0$ ή $|A| = 4$

Άσκηση 3

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$, να βρεθεί ο A^{-1}.

Λύση

Για να αντιστρέφεται ο πίνακας Α, δηλαδή για να υπάρχει ο A^{-1}, θα πρέπει ο πίνακας Α να είναι κανονικός, δηλαδή θα πρέπει $D(A) \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8 \neq 0$$

D(A)=8 άρα υπάρχει ο A^{-1}

$$A_{11} = (-1)^{1+1} * \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 24 = -24$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}*\Delta_{12}=-1\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\0 & -2\end{vmatrix}=-1(-4)=4$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}*\Delta_{13}=\begin{vmatrix}2 & 0\\0 & 6\end{vmatrix}=12$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}*\Delta_{21}=-1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\6 & -2\end{vmatrix}=-1(2-18)=16$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}*\Delta_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & -2\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}*\Delta_{23}=-1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\0 & 6\end{vmatrix}=-6$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}*\Delta_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\0 & 4\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}*\Delta_{32}=-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{vmatrix}=-1(4-6)=2$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}*\Delta_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{vmatrix}=-(-2)=2$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\A_{12} & A_{22} & A_{32}\\A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-24 & 16 & -4\\4 & -2 & 2\\12 & -6 & 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & 2 & -\frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

4.3 Κανόνας Sarrus

Σύμφωνα με τον κανόνα Sarrus η ορίζουσα ενός πίνακα A τύπου 3∗3 θα είναι:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{matrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} -$$

$$-(\alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} + \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11} + \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12})$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Ο κανόνας Sarrus εφαρμόζεται μόνο σε πίνακα τρίτης τάξης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Λύση

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{matrix} = -1\cdot 2\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 5\cdot(-1) - [1\cdot 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1\cdot(-1) + 4\cdot 5\cdot 1] =$$

$$-8+1-10-4-1-20=-42$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Λύση

$$|B|=\begin{vmatrix}5 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 6 & 2 & 5\end{vmatrix}\begin{matrix}5 & -2\\ 4 & 0\\ 6 & 2\end{matrix}=5\cdot 0\cdot 5+(-12)\cdot(-1)\cdot 6+3\cdot 4\cdot 2-[6\cdot 0\cdot 3+2\cdot(-1)\cdot 5+5\cdot 4\cdot(-2)]=$$

$0+12+24-0+10-40=6$

4.4 Μέθοδος Gramer

Έστω το σύστημα AX=B όπου $A_{\nu * \nu}$ πίνακας, $X_{\nu * 1}$ ο πίνακας των αγνώστων και $B_{\nu * 1}$ ο πίνακας των σταθερών όρων, τότε:

- αν $D(A)=|A| \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x_1, x_2, \ldots, \nu)$ προκύπτει από την D αν την i-στήλη την αντικαταστήσουμε με τους σταθερούς όρους ,
- αν D=0 τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις και το λύνουμε με επαυξημένο πίνακα,

Δηλαδή αν έχουμε το σύστημα AX=O όπου $A_{\nu * \nu}$ τότε έχω ένα ν∗ν σύστημα ομογενές οπότε:

- αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)=(0,0,\ldots,0)$
-
- αν D=0 τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και τις βρίσκω με επαυξημένο πίνακα.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στο ν∗ν ομογενές είναι $D_{x1}=D_{x2}=\ldots=D_{x\nu}=0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1.Ένα σύστημα μ∗ν ($\mu \neq \nu$ ή μ=ν) παραμετρικό ή όχι προτιμάμε να το λύσουμε με επαυξημένο πίνακα. Εκτός και αν ζητείται να βρεθεί η παράμετρος ώστε να ισχύει μία σχέση, τότε το λύνουμε με Gramer.

2.Σε ένα ομογενές ν∗ν σύστημα οι εκφράσεις :

- το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις,
- το σύστημα έχει κ λύσεις με $\kappa \in N$ και $\kappa \neq 0$,
- ένας τουλάχιστον από τους αγνώστους είναι διάφορος του μηδενός

  σημαίνουν ότι έχουν άπειρες λύσεις δηλαδή D=0

3.Όταν δίνονται δύο παραμετρικά ν∗ν συστήματα και ζητούνται να βρεθούν οι παράμετροι έτσι ώστε και τα δύο να είναι αδύνατα ή και τα δύο αόριστα ή το ένα αδύνατο και το άλλο αόριστο, τότε γράφουμε →πρέπει κατ'αρχήν οι ορίζουσές τους να είναι ίσες με το μηδέν. Λύνουμε το σύστημα βρίσκουμε τις παράμετρους και αντικαθιστούμε στα αρχικά του σύστημα για να επαληθεύσουμε την υπόθεση.

Άσκηση 1

Αν $A = \begin{cases} (1-\lambda)x - 2\lambda y = 2 \\ 2\lambda x + (\lambda - 1)y = \lambda - 4 \end{cases}, \lambda \in \Re$

Να οριστεί το σύνολο των τιμών της παραμέτρου λ, που κάθε μια τους είναι τέτοια ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση, έστω την (ξ,ν) που ικανοποιεί την συνθήκη ξ+ν>1.

Λύση

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2 - 4\lambda = -(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda = -\lambda^2 + 2\lambda - 1 + 4\lambda = 3\lambda^2 + 2\lambda - 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -2\lambda \\ \lambda-4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 2(\lambda-1) - 2\lambda(\lambda-4) = 2\lambda - 2 - 2\lambda^2 + 8\lambda = 2\lambda^2 - 6\lambda - 2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2\lambda & \lambda-4 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-4) - 4\lambda = \lambda - 4 - \lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda = -\lambda^2 + \lambda - 4 = -(\lambda^2 - \lambda + 4)$$

Για $D \neq 0 \Rightarrow 3\lambda^2 + 2\lambda - 1 \neq 0$ άρα $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq \frac{1}{3}$ οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x=\frac{D_X}{D}=\frac{2\lambda^2-6\lambda-2}{3\lambda^2+2\lambda-1},y=\frac{D_y}{D}=\frac{-\lambda^2+\lambda-4}{3\lambda^2+2\lambda-1}$$

$$x+y \quad >1\Rightarrow\frac{\lambda^2-5\lambda-6}{3\lambda^2+2\lambda-1}>1\Rightarrow\frac{\lambda^2-5\lambda-6-3\lambda^2-2\lambda+1}{3\lambda^2+2\lambda-1}>0$$

$$\Rightarrow(-2\lambda^2-7\lambda-5)(3\lambda^2+2\lambda-1)>0$$

$$\Rightarrow(2\lambda^2+7\lambda+5)(3\lambda^2+2\lambda-1)<0\begin{cases}\lambda=-1\\ \acute{\eta}\\ \lambda=\frac{1}{3}\end{cases}$$

λ	$-\infty$ $\quad -\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$2\lambda^2+7\lambda+5$	+	-	+	+
$3\lambda^2+2\lambda-1$	+	+	-	+
Γινόμενο	+	-	-	+

Άρα $\lambda\in(-\frac{5}{2},-1)\cup(-1,\frac{1}{3})$.

Άσκηση 2

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}2x-y+3\omega=0\\ y-\omega=0 \quad \lambda\in\Re\\ \lambda x+(2-\lambda)\omega=0\end{cases}$.Να προσδιοριστεί ο $\lambda\in\Re$ έτσι ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις και να βρεθεί εκείνη για την οποία ισχύει $x-y^2+2\omega=0$ (1).

Λύση

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ \lambda & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}+(2-\lambda)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\lambda+(2-\lambda)=-2\lambda+4-2\lambda=4(1-\lambda)$$

Αφού το σύστημα έχει άπειρες λύσεις τότε θα πρέπει D = 0
$D = 0 \Rightarrow 4(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$
Αφού $\lambda = 1$ τότε το σύστημα θα είναι :

$$\begin{cases}2\chi-y+3\omega=0\\ y-\omega=0\\ x+\omega=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\omega-\omega+3\omega=0\\ y=\omega\\ x=-\omega\end{cases}$$

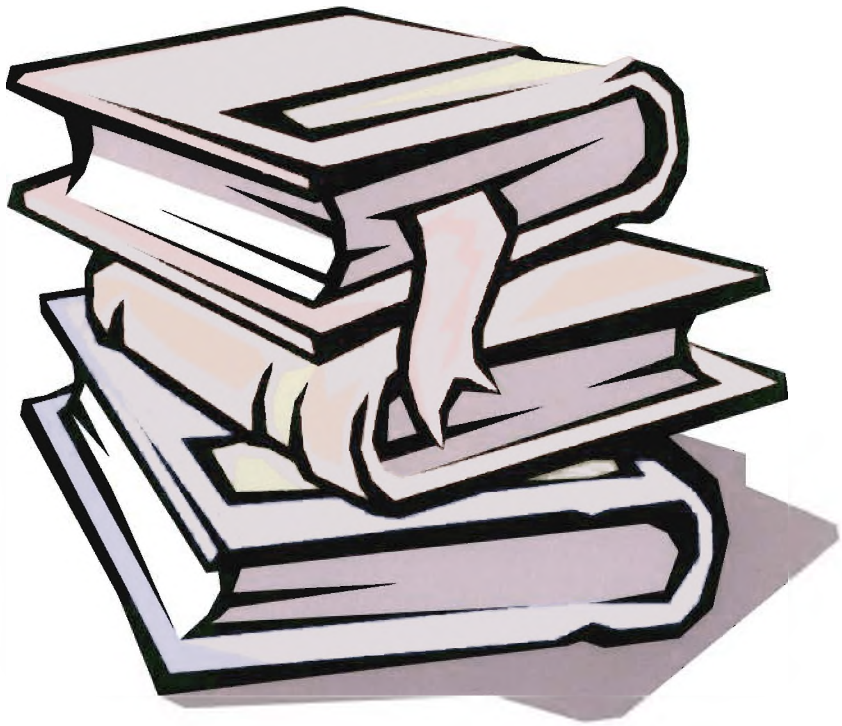
Άρα $(x,y,\omega)=(-\omega,\omega,\omega)\in\Re$

Από (1) $\Rightarrow x-y^2+2\omega=0\Rightarrow-\omega-\omega^2+2\omega=0\Rightarrow$
$\omega-\omega^2=0\Rightarrow\omega(1-\omega)=0$

Οπότε ω=1ή ω=0

- για ω=1 τότε $(x,y,\omega)=(-1,1,1)$
- για ω=0 τότε $(x,y,\omega)=(0,0,0)$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΑ



ΠΡΑΞΕΙΣ

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	
	$\alpha+0=\alpha$ $\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot 1=\alpha$ $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\neq 0$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

$$\alpha^\kappa\cdot\alpha^\lambda=\alpha^{\kappa+\lambda}\qquad \frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda}=\alpha^{\kappa-\lambda}$$

$$\alpha^\kappa\cdot\beta^\kappa=(\alpha\beta)^\kappa\qquad \frac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa$$

$$(\alpha^\kappa)^\lambda=\alpha^{\kappa\lambda}$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$
$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$
$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$$
$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$
$$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$
$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$
$$(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

$$\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$
(μεταβατική ιδιότητα)

$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$

Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$

Για **θετικούς** αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει:
Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$

Για **θετικούς** αριθμούς α, β και ν φυσικό $\neq 0$ ισχύει:

$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$

$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$

Τριώνυμο 2ου βαθμού

Δ	Ρίζες	Παραγοντοποίηση	Πρόσημο
$\Delta > 0$	$\rho_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$	$-\infty$ ρ_1 ρ_2 $+\infty$ ομόσ. του α / ετερόσ. του α / ομόσ. του α
$\Delta = 0$	$\rho_1 = \rho_2 = \rho = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$	$-\infty$ ρ $+\infty$ ομόσημο του α / ομόσημο του α
$\Delta < 0$	Δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$	Δεν παραγοντοποιείται στο $\mathbb{R}$	$-\infty$ $+\infty$ ομόσημο του α

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ημx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
σφx	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ Σ.–ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ Β.– ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ Σ. – ΠΟΛΥΖΟΣ Γ. – ΣΒΕΡΚΟΣ Α. , (1993) , Άλγεβρα Α΄ Λυκείου , Αθήνα .

2. ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ Μ. ΓΡ., (1989) , Στοιχεία από τον Οικονομικό Προγραμματισμό , Μεσολόγγι , (διδακτικές σημειώσεις).

3. ΔΑΛΙΕΡΑΚΗΣ Ε. –ΚΟΥΤΡΑΣ Μ. –ΛΙΟΥΔΑΚΗΣ Δ. – ΜΕΤΗΣ Μ. , Μαθηματικά Τεχνικών Επαγγελματικών Λυκείων.

4. ΚΙΝΤΗΣ Α. –YAMANE TORO , (1983) , Μαθηματικά για οικονομολόγους , Αθήνα.

5. ΚΟΥΤΣΟΥΒΕΛΗΣ Σ. – ΛΥΓΚΩΝΗΣ Π. , (1996) , Μαθηματικά Δ΄ Δέσμης , Αθήνα.

6. ΛΑΜΠΡΑΚΗΣ Δ. Π. , Γραμμική Άλγεβρα.

7. ΤΑΣΟΠΟΥΛΟΣ Α. , Μαθηματικός Προγραμματισμός.