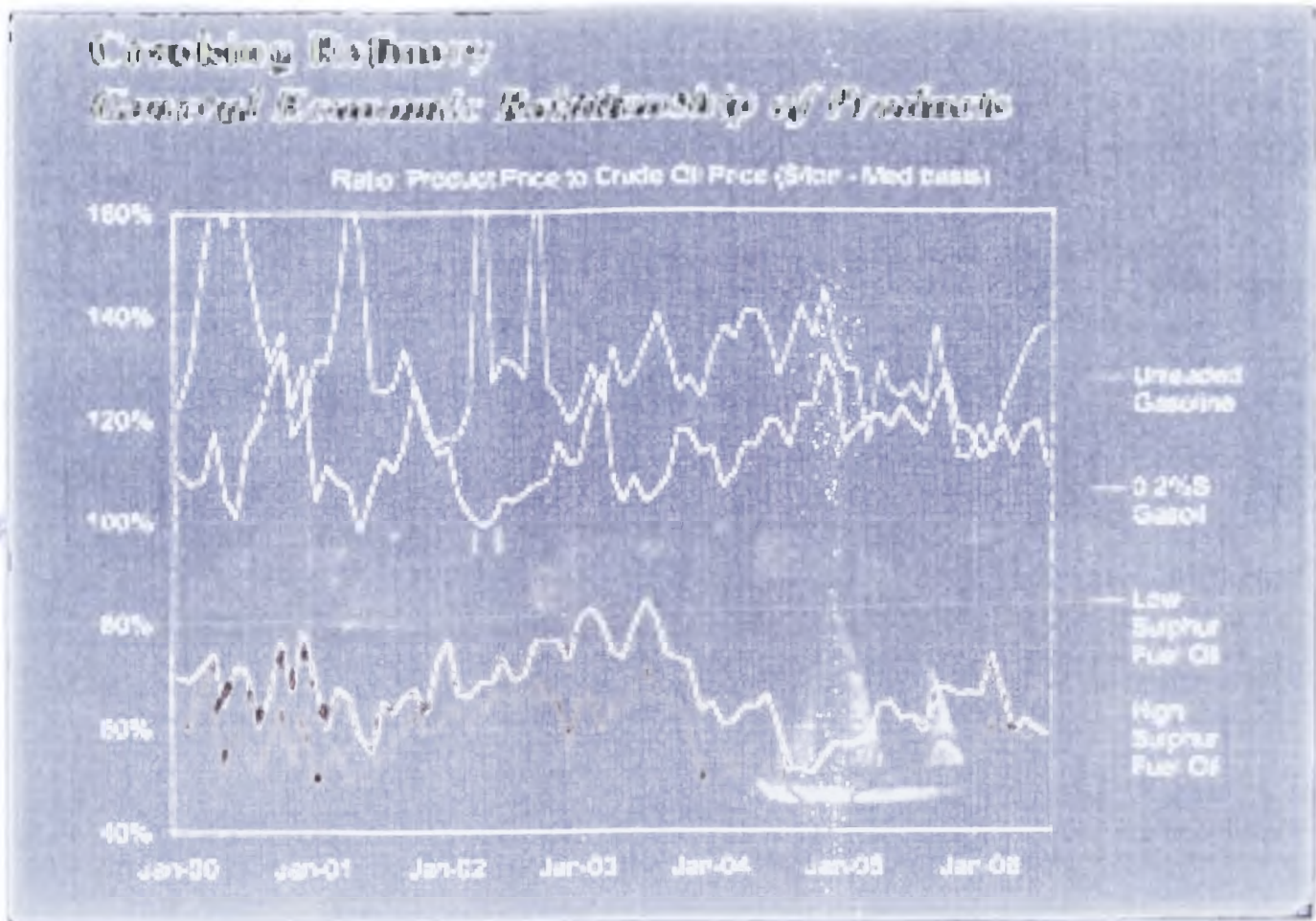




ΠΤΥΧΙΑΚΗ

ΘΕΜΑ:

«Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ ΚΑΙ Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ
ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»



ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΕΣ:

ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΥ ΧΡΙΣΤΙΝΑ Α.Μ.11247
ΜΑΡΟΥΔΑ-ΜΠΙΛΛΑΧΑ ΑΘΗΝΑ-ΔΙΟΝΥΣΙΑ Α.Μ.11282

ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΑ:

Β.ΜΠΟΤΑ

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ 2007



Στους γονείς μας και
στα αγαπημένα μας πρόσωπα.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Οι σπουδάστριες θα ήθελαν να ευχαριστήσουν την καθηγήτριά τους κ. Βικτωρία Μπότα για την άψογη συνεργασία και για την πολύτιμη βοήθειά της, ώστε να διεκπεραιωθεί επιτυχώς η συγκεκριμένη πτυχιακή εργασία.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Στατιστική δεν είναι μόνο μια επιστήμη που εξασκεί το πνεύμα αλλά αποτελεί σήμερα τη βάση στην οποία στηρίζονται διάφορες εφαρμοσμένες επιστήμες και βρίσκει εφαρμογή σε όλα τα πεδία της ανθρώπινης δραστηριότητας.

Η μεγάλη σπουδαιότητα και η ποικιλία των εφαρμογών της Στατιστικής στις διάφορες επιστήμες και στις επιχειρήσεις δίνουν στην επιστήμη αυτή όλο και μεγαλύτερη αξία. Αυτό φαίνεται και στη χώρα μας, όπου το μάθημα της στατιστικής διδάσκεται σχεδόν σε όλες τις Ανώτατες και Ανώτερες Σχολές ακόμη και στα Τεχνικά Λύκεια.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο σύγχρονος άνθρωπος, ως κοινωνικό ον, ενδιαφέρεται από την φύση του να γνωρίζει την εξέλιξη πολλών πτυχών της ζωής του στο μέλλον, όπως για παράδειγμα την εξέλιξη της προσωπικής του ζωής, της επαγγελματικής του καριέρας και άλλα. Η γνώση αυτή αποτελεί αναμφισβήτητα μια χρήσιμη πηγή πληροφόρησης, την οποία ο καθένας θα ήθελε να έχει. Μάλιστα, το γεγονός ότι ζούσε σε ένα διαρκώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον με έντονο το στοιχείο της αβεβαιότητας, κάνει την ανθρώπινη αυτή επιθυμία να γίνεται όλο και πιο μεγάλη. Βέβαια, ο άνθρωπος δεν είναι δυνατόν να γνωρίζει με βεβαιότητα εκ των προτέρων την μελλοντική εξέλιξη γεγονότων και καταστάσεων που αφορούν τη ζωή του. Για το λόγο αυτό προσπαθεί να λαμβάνει τα <<κατάλληλα>> μέτρα, ώστε να μειώνει σε κάποιο βαθμό το στοιχείο της αβεβαιότητας.

Η πρόγνωση αυτή του μέλλοντος βοηθάει τον άνθρωπο στο να λαμβάνει τις <<καλύτερες>> δυνατές αποφάσεις και συγχρόνως του παρέχει τη δυνατότητα να προφυλάσσεται από δυσάρεστες μελλοντικές καταστάσεις. Άλλωστε, η ανθρώπινη αυτή επιθυμία της πρόγνωσης δεν αποτελεί σημερινό σημείο των καιρών, αλλά έχει τις ρίζες της πολλούς αιώνες πριν.

Θα πρέπει ωστόσο να σημειωθεί ότι εάν οι άνθρωποι γνώριζαν με βεβαιότητα το τι πρόκειται να τους συμβεί στο μέλλον, η ζωή τους θα ήταν πολύ <<φτωχότερη>> από πλευράς ενδιαφέροντος, αφού όλα θα ήταν γνωστά και προκαθορισμένα. Επειδή όμως κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα, ο άνθρωπος μαθαίνει να συμβιώνει με το στοιχείο της αβεβαιότητας και καθορίζει τις ενέργειές του προσπαθώντας να το μειώσει, εφόσον κατά κανόνα δεν είναι σε θέση να το εξαλείψει.

Αντίστοιχα με την ανθρώπινη προσπάθεια για τη γνώση του <<αύριο>> είναι και οι προσπάθειες που καταβάλλουν οι επιχειρήσεις και οι οργανισμοί, προκειμένου να αποκτήσουν την κατάλληλη πληροφόρηση αναφορικά με τη μελλοντική τους εξέλιξη στο χώρο που δραστηριοποιούνται. Οι οικονομικές αυτές μονάδες προγραμματίζουν τις δραστηριότητες τους στηριζόμενες σε εκτιμήσεις για το τι πρόκειται να συμβεί στο μέλλον. Κάθε επιχείρηση ή οργανισμός λαμβάνει αποφάσεις με βάση προβλέψεις οικονομικών μεγεθών που προέρχονται από την επεξεργασία των διαθέσιμων δεδομένων και την εφαρμογή των κατάλληλων μεθόδων πρόβλεψης.

Οι επιχειρήσεις και οι οργανισμοί δραστηριοποιούνται σε ένα πολύ σύνθετο όσο ποτέ άλλοτε περιβάλλον, τότε εύκολα διαπιστώνουμε πόσο σημαντικά μεγάλο ρόλο παίζουν οι προβλέψεις στον καθορισμό της πορείας τους στην αγορά.

Οι περισσότερες αποφάσεις των οικονομικών μονάδων βασίζονται σε κάποιου είδους πρόβλεψη αναφορικά με τις μελλοντικές εξελίξεις διάφορων οικονομικών μεγεθών. Αυτό συμβαίνει διότι στη σημερινή εποχή οι επιχειρήσεις και οι οργανισμοί λειτουργούν μέσα σε ένα ανταγωνιστικό και διαρκώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον, με έντονο το στοιχείο της αβεβαιότητας. Στο περιβάλλον αυτό τα διοικητικά στελέχη καλούνται να λάβουν σημαντικές αποφάσεις που αφορούν τις μελλοντικές εξελίξεις της ίδιας της επιχείρησης. Για παράδειγμα, αποφάσεις που αφορούν τις παραγόμενες ποσότητες των προϊόντων, το σχεδιασμό της παραγωγικής διαδικασίας, τις ανάγκες σε ανθρώπινους και λοιπούς πόρους, το ύψος των διαφημιστικών δαπανών και πολλές άλλες βασίζονται κατά κύριο λόγο στην πρόβλεψη της μελλοντικής ζήτησης. Κατά συνέπεια, η πρόβλεψη της ζήτησης των προϊόντων ή των υπηρεσιών αποτελεί μια από τις πιο σημαντικές λειτουργίες των επιχειρήσεων και των οργανισμών

Κρίθηκε αναγκαίο να γίνει αναφορά στον ορισμό και στην εφαρμογή της Στατιστικής Επιστήμης, διότι η γραμμική παλινδρόμηση είναι ένα σημαντικό στοιχείο αυτής της

επιστήμης και η εφαρμογή της στην οικονομία είναι πολύ χρήσιμη όχι μόνο για το παρόν αλλά και για το μέλλον.

Στο **πρώτο κεφάλαιο** γίνεται αναφορά της Στατιστικής Επιστήμης και το πώς μπορεί αυτή να συνδυαστεί με την οικονομία.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο** αναλύεται η έννοια της Γραμμικής Παλινδρόμησης.

Τέλος, στο **τρίτο κεφάλαιο** παραθέτονται προβλήματα – ασκήσεις, ώστε να γίνει πιο κατανοητή η εφαρμογή της έννοιας της Γραμμικής Παλινδρόμησης στην οικονομία.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΑ	σελ.
A ΕΝΟΤΗΤΑ	1
A.1 ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ	1
A.2 Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ	2
A.3 Η ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΑ ΠΕΔΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ	3
A.4 ΤΟ ΚΡΑΤΟΣ ΚΑΙ Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ	4
A.5 ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ	
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ	5
A.6 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΑΙ ΟΙ ΔΙΑΚΡΙΣΕΙΣ ΑΥΤΗΣ	7
A.7 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	9
A.8 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΤΙΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ	10
A.9 ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΚΑΙ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΠΛΗΘΥΣΜΟΙ	12
A.10 ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ	14
A.11 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ Ή ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	15
B ΕΝΟΤΗΤΑ	17
B.1 ΑΠΛΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ	17
B.2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ	18
B.3 ΓΡΑΜΜΕΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ	23
B.4 ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ ΣΕ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥΣ	36
B.5 ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ a ΚΑΙ b	37
B.6 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ	44
B.7.I ΕΥΘΕΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ	46
B.7.II ΕΥΘΕΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ	47
B.8.I ΒΕΞΙΩΣΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ X ΠΑΝΩ ΣΤΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ Ψ	54
B.8.II ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ Ψ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ X	54
B.9 ΤΥΠΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ	56
B.10.I ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ	59
B.10.II ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ	60
B.11 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ	72

Γ ΕΝΟΤΗΤΑ	76
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	77
ΑΣΚΗΣΗ 1	77
ΑΣΚΗΣΗ 2	85
ΑΣΚΗΣΗ 3	93
ΑΣΚΗΣΗ 4	100
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ	109
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1	109
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2	118
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3	129
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	137

ΕΝΟΤΗΤΑ Α

Α.1. ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Με τον όρο Στατιστική εννοούμε τη συστηματική απαρίθμηση και παρουσίαση αριθμητικών δεδομένων ή στοιχείων, τα οποία προέρχονται από πολλές παρατηρήσεις ή μετρήσεις. Οι παρατηρήσεις αυτές ή οι μετρήσεις αναφέρονται σε συγκεκριμένο αντικείμενο ή γεγονός. Ανάλογα με το αντικείμενο ή το γεγονός στο οποίο αναφέρονται τα αριθμητικά δεδομένα, η Στατιστική παίρνει και ιδιαίτερη ονομασία. Έτσι, όταν μιλάμε π.χ. για Γεωργική στατιστική, Στατιστική επιχειρήσεων ή Στατιστική Εργατικού δυναμικού κ.λ.π., εννοούμε αριθμητικά δεδομένα που αναφέρονται αντίστοιχα στη γεωργία, στις επιχειρήσεις ή στο εργατικό δυναμικό κ.λ.π. Στην επιστημονική γλώσσα, η λέξη Στατιστική έχει ευρύτερη σημασία, σημαίνει την επιστήμη που έχει ως αντικείμενο όχι μόνο τη συγκέντρωση και παρουσίαση, αλλά και τη μελέτη και ανάλυση των παρατηρήσεων ή μετρήσεων που αναφέρονται σε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο ή γεγονός, οποιαδήποτε και αν είναι η φύση του. Έτσι, η Στατιστική περιλαμβάνει τόσο τις μεθόδους συλλογής και επεξεργασίας στοιχείων, όσο και τις μεθόδους ανάλυσης και μελέτης τους, ανακαλύπτοντας έτσι σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στα διάφορα φαινόμενα και διατυπώνοντας συμπεράσματα που είναι χρήσιμα για τη λήψη ορθών αποφάσεων. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι:

Στατιστική είναι η επιστήμη που ασχολείται με τις επιστημονικές μεθόδους συλλογής, οργάνωσης, παρουσίασης και ανάλυσης των αριθμητικών εκείνων

στοιχείων που αναφέρονται σε χαρακτηριστικές ιδιότητες διαφόρων οικονομικών, κοινωνικών, δημογραφικών, φυσικών κ.λ.π. φαινομένων και έχει ως σκοπό τη συστηματική μελέτη αυτών των στοιχείων για την κατάληξη σε γενικά συμπεράσματα, που είναι χρήσιμα στη διαδικασία της λήψης ορθών αποφάσεων.

Αναλύοντας τον ορισμό αυτό της Στατιστικής, παρατηρούμε ότι τα βασικά στάδια που ακολουθούμε για τη μελέτη των ιδιοτήτων των διαφόρων μονάδων μιας πολυπληθούς ομάδας είναι τα εξής:

(α) Η συγκέντρωση των στατιστικών στοιχείων που είναι αναγκαία για τη μελέτη του προβλήματος που θέλουμε να ερευνήσουμε.

(β) Η μεθοδική επεξεργασία και παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων σε μορφή αριθμητικών πινάκων και γραφικών παραστάσεων.

(γ) Η ανάλυση των στοιχείων αυτών και η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για να ληφθούν σωστές αποφάσεις.

A.2. Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Η λέξη στατιστική προέρχεται από τη λατινική λέξη status (που σημαίνει κράτος) και δηλώνει αρχικά συλλογή στοιχείων για τις κρατικές ανάγκες (έκταση, παραγωγή, πληθυσμός, κλπ). Έχει εξακριβωθεί ότι η πρώτη απογραφή πληθυσμού έγινε στην Κίνα από τον αυτοκράτορα Υ-άο το έτος 2238 π.Χ., ενός στους Ρωμαίους η πρώτη απογραφή πληθυσμού έγινε επί Ρωμούλου (753-715 π.Χ.) και η τελευταία από τον αυτοκράτορα Βεσπασιανό το 73 μ.Χ. Στην Αγγλία, η πρώτη καθολική απογραφή του πληθυσμού και του πλούτου γενικά έγινε το 1085 από τον Γουλιέλμο τον κατακτητή.

Το 1583 γράφεται από τον Fr. Sansovino το πρώτο βιβλίο στατιστικού περιεχομένου και λίγο αργότερα εισάγεται από τον Konring (1606-1681) η Στατιστική στην ανώτερη παιδεία.

A.3.Η ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΑ ΠΕΔΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Μια απλή αρίθμηση των εφαρμογών της Στατιστικής, που είναι βασικά εφαρμοσμένη επιστήμη, δείχνει ότι αυτή χρησιμοποιείται σε όλους σχεδόν τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Η Στατιστική είναι απαραίτητη στη Διοίκηση γενικά, όπου η λήψη ορθών αποφάσεων έχει μεγάλη σημασία για την πρόοδο ενός κράτους, ενός οργανισμού, μιας βιομηχανίας ή μιας επιχείρησης. Για αυτό και δεν υπάρχει σήμερα στις σύγχρονες επιχειρήσεις κανένας τομέας που να μη χρησιμοποιεί τις στατιστικές μεθόδους στη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων.

Μεγάλη σημασία έχει η εφαρμογή της Στατιστικής στη Δημογραφία, όπου η μελέτη της γαμηλιότητας, της γεννητικότητας, της θνησιμότητας, της μετανάστευσης κλπ, απαιτεί μακροχρόνιες στατιστικές παρατηρήσεις και επίμονες αναλύσεις. Επίσης η Στατιστική εφαρμόζεται σήμερα στην Ιατρική, Φυσική, Γενετική, Αστρονομία, Βιολογία, Μετεωρολογία, Γεωργία, Βιομηχανία, στη μελέτη του φυσικού περιβάλλοντος, στη μελέτη των ανθρώπινων ιδεών και προθέσεων, στη Θεωρία των αποφάσεων, στον έλεγχο ποιότητας των προϊόντων κλπ. Τέλος, η Στατιστική βρίσκει πολύ μεγάλη εφαρμογή και στον οικονομικό τομέα, όπου η παρακολούθηση του γενικού επιπέδου των τιμών, του εθνικού εισοδήματος, της νομισματικής ισοτιμίας και των οικονομικών διακυμάνσεων, της απασχόλησης, της παραγωγικότητας, της κατάρτισης δεικτών οικονομικής δραστηριότητας, των εθνικών πόρων και της εθνικής δαπάνης, είναι αντικείμενα στατιστικής επεξεργασίας. Η χρησιμότητα της Στατιστικής

φαίνεται και από το γεγονός ότι Στατιστική διδάσκεται σήμερα σχεδόν σε όλες τις Ανώτατες και Ανώτερες Σχολές της χώρας μας.

A.4. ΤΟ ΚΡΑΤΟΣ ΚΑΙ Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Ένα καλά οργανωμένο Κράτος οφείλει να γνωρίζει κάθε στιγμή τον πληθυσμό της χώρας, την κατανομή του πληθυσμού κατά φύλο, ηλικία, επάγγελμα, κλπ., καθώς και την κίνηση και πιθανή εξέλιξή του. Πρέπει επίσης να παρακολουθεί τόσο τα οικονομικά φαινόμενα της χώρας (παραγωγή, εισαγωγές και εξαγωγές, κίνηση και εμπορία των αγαθών κλπ), όσο και τα διοικητικά και κοινωνικά φαινόμενα της χώρας (διοίκηση, εργασία, δημόσια υγεία, πρόνοια, κοινωνικές ασφάλισεις, εκπαίδευση, δικαιοσύνη, στέγαση, κατάρτιση τιμαρίθμου κόστους ζωής κλπ) .

Για το σκοπό αυτό, κάθε Κράτος έχει μια στατιστική Υπηρεσία, η οποία συγκεντρώνει τα απαραίτητα στοιχεία και παρακολουθεί την εξέλιξη των παραπάνω φαινομένων. Μια τέτοια υπηρεσία πρέπει να είναι καλά οργανωμένη και να διαθέτει ένα πλούσιο κεντρικό αρχείο στατιστικών στοιχείων, από το οποίο θα αντλεί χρήσιμες πληροφορίες κάθε διοικητικός παράγοντας του Κράτους και κάθε ερευνητής.

A.5. ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ

Στατιστικές μονάδες είναι τα αντικείμενα από τα οποία λαμβάνουμε τις πληροφορίες που επιθυμούμε να επεξεργαστούμε και να αναλύσουμε στατιστικά. Η στατιστική μονάδα μπορεί να είναι ένα αντικείμενο, ένα άτομο, μια επιχείρηση, ένα ίδρυμα, κάποιο γεγονός (εκλογικές αναμετρήσεις, αθλητικοί αγώνες) ή ακόμη και έννοια. Πριν από οποιαδήποτε **ενέργεια** για τη συλλογή στατιστικών δεδομένων είναι απαραίτητο να προδιαγραφεί με ακρίβεια και σαφήνεια η στατιστική μονάδα.

Ως παράδειγμα σημειώνεται το ότι, όταν στις διάφορες απογραφές αναφερόμαστε σε νοικοκυριά, πρέπει να προσδιορίζεται με σαφήνεια ότι, άλλη είναι η έννοια του νοικοκυριού και άλλη αυτής της οικογένειας.

Οι στατιστικές μονάδες μπορεί να είναι **απλές**, όπως π.χ. ένα πρόσωπο, ένα αντικείμενο ή μια μέρα, είναι δυνατό όμως να είναι σύνθετες και να αποτελούνται από περισσότερα αντικείμενα ή πρόσωπα, όπως οικογένεια, η ημερήσια, μηνιαία ή ετήσια παραγωγή ενός εργοστασίου ή μιας βιομηχανίας κ.λ.π.

Το σύνολο των στατιστικών μονάδων, των οποίων επιθυμούμε τη μελέτη ενός ή περισσοτέρων συγκεκριμένων χαρακτηριστικών, ονομάζεται **πληθυσμός** ή **στατιστικός πληθυσμός**. Όπως η στατιστική μονάδα, έτσι και ο στατιστικός πληθυσμός, πρέπει να ορίζεται με ακρίβεια και σαφήνεια.

Ένα από τα βασικά στοιχεία που πρέπει να ορίσουμε για το στατιστικό πληθυσμό είναι τα όρια του, δηλαδή ποιες ακριβώς είναι οι στατιστικές μονάδες αυτού του συγκεκριμένου πληθυσμού που θα μελετηθεί. Για παράδειγμα, αν θελήσει κανείς να μελετήσει με απογραφή τα χαρακτηριστικά των κατοίκων μιας πόλης, στατιστικός πληθυσμός είναι οι κάτοικοι της πόλης αυτής. Ποιοι όμως είναι κάτοικοι αυτής της πόλης; Πρέπει να προσδιοριστεί αν στους κατοίκους της πόλης θα συμπεριληφθούν

και οι στρατιώτες, οι ασθενείς των νοσοκομείων, οι διαμένοντες σε ξενοδοχεία κλπ.. Δεν αρκεί, λοιπόν, μόνο ο σαφής προσδιορισμός των γεωγραφικών ορίων της πόλης .

Ο στατιστικός πληθυσμός μπορεί να είναι **άπειρος** όπως η παραγωγή ενός προϊόντος, οι γεννήσεις βρεφών σε μια πόλη, οπότε είμαστε υποχρεωμένοι να περιορίσουμε τη μελέτη μας σε κάποιο χρονικό διάστημα, ή **πεπερασμένος** όπως οι θεατές μιας θεατρικής παράστασης ή ενός ποδοσφαιρικού αγώνα.

Για να γίνουν κατανοητοί οι παραπάνω ορισμοί παραθέτεται το παρακάτω παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε μια επιχείρηση στο τμήμα προώθησης και πώλησης των προϊόντων εργάζονται 10 υπάλληλοι. Σε ένα μήνα μετρήθηκαν, πόσα προϊόντα μπόρεσε να προωθήσει – πωλήσει ο καθένας από αυτούς. Ο στατιστικός πληθυσμός είναι το σύνολο των υπαλλήλων του τμήματος, ενώ κάθε ένας από τους εργαζόμενους αποτελεί μια στατιστική μονάδα. Επειδή η ιδιότητα ή το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε είναι ο βαθμός ικανότητας των υπαλλήλων, να προωθήσουν και να πουλήσουν τα προϊόντα της επιχείρησης, ο αριθμός των διαφόρων εμπορευμάτων που πωλήθηκε μέσα στο μήνα είναι: 10, 12, 17, 20, 13, 10, 22, 9, 18, 10, αποτελούν τις παρατηρήσεις μας (στατιστικά δεδομένα).

Τονίζεται ότι η Στατιστική δεν ασχολείται με τη μελέτη των ίδιων των στατιστικών μονάδων, αλλά με τη μελέτη των ιδιοτήτων τους.

Α.6. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΑΙ ΟΙ ΔΙΑΚΡΙΣΕΙΣ ΑΥΤΗΣ

Οι χαρακτηριστικές ιδιότητες των στατιστικών μονάδων ενός πληθυσμού, με τη μελέτη των οποίων ασχολείται η Στατιστική, ονομάζονται **μεταβλητές**. Οι αριθμοί ή οι άλλες συμβολικές εκφράσεις που αντιπροσωπεύουν τις διάφορες καταστάσεις μιας μεταβλητής ονομάζονται **τιμές της μεταβλητής**. Κάθε μεταβλητή συμβολίζεται με ένα από τα κεφαλαία γράμματα **X, Ψ, Z**, ενώ οι τιμές, αν αυτή είναι ποσοτική, με τα αντίστοιχα μικρά γράμματα $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots, \chi_n$ ή $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_k$. Εάν η μεταβλητή είναι ποιοτική, εκφράζεται με λέξεις.

Για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, δίνονται στον πίνακα 1.1 διάφορες μεταβλητές και οι αντίστοιχες τιμές τους.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ	ΤΙΜΕΣ
1. Αριθμός αγοριών σε μια οικογένεια	0, 1, 2, 3, 4, 5, ...
2. Ένδειξη ενός ζαριού	1, 2, 3, 4, 5, 6.
3. Ένδειξη ενός νομίσματος	<<πρόσωπο>>, <<γράμματα>>
4. Αριθμός δωματίων ενός διαμερίσματος	1, 2, 3, 4, ...
5. Φυλή ατόμων	λευκός, κίτρινος, ερυθρόδερμος, μαύρος.
6. Ύψος ατόμων σε εκατοστά	140, 162, 178, 201, ...
7. Υγεία ατόμων	άριστη, καλή, μέτρια, κακή.
8. Ημερομίσθια (ΕΥΡΩ)	20, 52, 64, ...

Πηγή : Περιγραφική Στατιστική Επιχειρήσεων Αποστολόπουλου Θ. Η.

Οι μεταβλητές χωρίζονται σε δύο κυρίως κατηγορίες :

A) Στις **ποιοτικές μεταβλητές**, που δεν επιδέχονται μέτρηση και οι τιμές τους εκφράζονται με λέξεις. Τέτοιες μεταβλητές είναι π.χ. <<η οικογενειακή κατάσταση ενός υπαλλήλου >>, <<το επάγγελμα ενός ατόμου>>, κ.λ.π. και

B) Στις **ποσοτικές μεταβλητές**, που επιδέχονται μέτρηση και οι τιμές τους είναι αριθμοί αναφερόμενοι σε συγκεκριμένες μονάδες. Τέτοιες μεταβλητές είναι π.χ. το βάρος ή το ύψος ενός ατόμου, το εισόδημα ενός ατόμου, οι εξαγωγές κ.λ.π. Αν μια ποσοτική μεταβλητή σημειωθεί με το γράμμα **X**, οι τιμές της θα σημειώνονται με $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots$

Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε **ασυνεχείς** και **συνεχείς**.

Ασυνεχείς ονομάζονται οι μεταβλητές εκείνες που μπορούν να λάβουν πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος τιμών. Έτσι, π.χ. η ένδειξη ενός ζαριού είναι μια ασυνεχής τυχαία μεταβλητή, γιατί το σύνολο των τιμών της 1, 2, 3, 4, 5, 6 είναι πεπερασμένο. Επίσης, ο αριθμός ρίψεων ενός νομίσματος μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η όψη (προσώπου) είναι μια ασυνεχής μεταβλητή, γιατί το σύνολο τιμών της 1, 2, 3, ..., n είναι αριθμήσιμο.

Συνεχής ονομάζονται οι μεταβλητές εκείνες που μπορούν να λάβουν όλες τις τιμές ενός διαστήματος. Έτσι, π.χ. το βάρος ή το ύψος ενός ατόμου, το εισόδημα ενός ατόμου, κ.λ.π είναι συνεχείς μεταβλητές.

A.7. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Για να διευκολυνθεί η ανάλυση των στατιστικών στοιχείων και η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων απαιτείται η παρουσίαση των στοιχείων αυτών, η οποία μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους:

- A) με μορφή πινάκων
- B) με μορφή γραφικών παραστάσεων
- Γ) με μορφή εκθέσεων ή αναφορών

Η σύνταξη των πινάκων απαιτεί να τηρούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις:

1. οι πίνακες να είναι απλοί
2. να διευκολύνονται οι συγκρίσεις
3. να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή σε ορισμένα χαρακτηριστικά στοιχεία
4. κάθε πίνακας πρέπει να έχει τίτλο, ο οποίος να γράφεται στο μέσο του επάνω μέρους του και να είναι περιληπτικός
5. στο κάτω μέρος του πίνακα θα πρέπει να αναφέρεται η πηγή από την οποία προέρχονται τα στοιχεία
6. το κύριο σώμα του πίνακα να περιέχει στατιστικά στοιχεία που είναι δυνατό να αναφέρονται σε γεωγραφικές, χρονολογικές, ποιοτικές και ποσοτικές κατατάξεις.

Όπως κάθε στατιστικός πίνακας, έτσι και κάθε γραφική παράσταση πρέπει να περιλαμβάνει, εκτός από το σχέδιο, και τα πιο κάτω στοιχεία:

1. τον τίτλο

2. την κλίμακα των τιμών των μεγεθών που απεικονίζονται
3. την ένδειξη των πηγών
4. υπόμνημα, το οποίο γράφεται συνήθως κάτω δεξιά από το σχήμα και εξηγεί τις διάφορες γραμμές που περιέχει η γραφική παράσταση.

A.8. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΤΙΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Η εφαρμογή της Στατιστικής στον επιχειρηματικό τομέα αφορά κυρίως τις βιομηχανικές και εμπορικές επιχειρήσεις. Η εφαρμογή στατιστικών μεθόδων για τη λύση προβλημάτων του επιχειρηματικού τομέα έγινε πρώτα στις Η.Π.Α. στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, ως συνέπεια της συγκέντρωσης των δραστηριοτήτων σε μεγάλες επιχειρήσεις, με πολυάριθμο προσωπικό και υποκαταστήματα σε όλη την έκταση της απέραντης αυτής χώρας.

Είναι φανερό ότι για τον επιχειρηματία, ο οποίος γνωρίζει προσωπικά τους κυριότερους συνεργάτες του και όλο το μηχανισμό της επιχείρησής του, η Στατιστική δεν παρέχει πρόσθετη ωφέλεια. Αλλά για το γενικό διευθυντή μιας μεγάλης επιχείρησης η οποία απασχολεί εκατοντάδες ή και χιλιάδες πρόσωπα σε πολυάριθμες εγκαταστάσεις που βρίσκονται συνήθως μακριά από το κέντρο της επιχείρησης, οι στατιστικές πληροφορίες για την ικανότητα των εργοταξίων, των γραφείων, των αποθηκών, για τις αγορές και πωλήσεις, για την παραγωγή και τον έλεγχο καλής ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων, κ.λ.π. η Στατιστική είναι χρησιμότερο

πληροφοριακό εργαλείο για τη λήψη ορθών επιχειρηματικών αποφάσεων και την άσκηση οικονομικής, κοινωνικής, τιμολογιακής, κ.λ.π. πολιτικής. Η τεράστια ανάπτυξη των βιομηχανικών και εμπορικών επιχειρήσεων στις Η.Π.Α., κατά τα τελευταία χρόνια οφείλεται κυρίως στην καλύτερη οργάνωση της παραγωγής και διανομής των εμπορευμάτων με στατιστικές μεθόδους.

Ο ρόλος του Στατιστικού μιας μεγάλης επιχείρησης είναι να συγκεντρώνει το στατιστικό υλικό, να το παρουσιάζει σε πίνακες και διαγράμματα και να υπολογίζει τους απαραίτητους στατιστικούς δείκτες. Όλα αυτά τα στατιστικά στοιχεία πρέπει να είναι στη διάθεση του γενικού διευθυντή, ο οποίος θα τα χρησιμοποιήσει για τη λήψη ορθών αποφάσεων για την επιχείρηση.

Οι κυριότερες στατιστικές δραστηριότητες μιας μεγάλης επιχείρησης είναι οι ακόλουθες :

- Το τμήμα **Οικονομικών ή Στατικών Μελετών**, όπου αναλύονται γενικές επιχειρηματικές τάσεις και προβλέψεις των επιχειρηματικών δραστηριοτήτων για τις τιμές των προϊόντων και άλλους οικονομικούς παράγοντες.
- Το τμήμα **Marketing**, σκοπός του τμήματος αυτού είναι η έρευνα και η πολιτική κατάκτησης της αγοράς.
- Το τμήμα **Παραγωγής**, όπου διενεργεί Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων κατά μαζικό τρόπο.
- Το τμήμα **Οικονομικού Ελέγχου** συνδυάζει στατιστικές και λογιστικές μεθόδους για την κατάρτιση του προϋπολογισμού του επόμενου οικονομικού έτους, και περιλαμβάνει εργατικό δυναμικό, καθαρά κέρδη, πρώτες ύλες, κ.α.
- Το τμήμα **Προσωπικού** ασχολείται με την παρακολούθηση των εξής στοιχείων :

- 1) δύναμη προσωπικού κατά κατηγορία εργαζομένων (εργάτες, μαθητευόμενοι, υπάλληλοι).
- 2) σύνθεση προσωπικού κατά γένους, ειδικότητα, κ.λ.π.
- 3) αμοιβές προσωπικού (ημερομίσθια, οικογενειακά επιδόματα, κ.λ.π.)
- 4) χρόνος εργασίας. Ο χρόνος εργασίας καθορίζει και το μέσο ωριαίο κόστος εργασίας για μισθούς – ημερομίσθια, κ.λ.π.

A.9 ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΚΑΙ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΠΛΗΘΥΣΜΟΙ

Με τη βοήθεια της Στατιστικής έχουμε τη δυνατότητα να διερευνήσουμε τα χαρακτηριστικά μιας μόνης μεταβλητής X , δηλαδή από τη συλλογή και επεξεργασία δεδομένων ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος μπορούμε να προσδιορίσουμε κάθε φορά μια Στατιστική παράμετρο και να καταλήξουμε σε κάποια γενικότερα συμπεράσματα για τη δομή ενός στατιστικού πληθυσμού από τον οποίο έχει ληφθεί το δείγμα. Ένας πληθυσμός που οι μονάδες του αποτελούνται από τις τιμές μιας μόνης μεταβλητής X , ονομάζεται **μονομεταβλητός στατιστικός πληθυσμός**.

Οι αναλυτικές σχέσεις με τις οποίες διερευνάμε ένα μονομεταβλητό στατιστικό πληθυσμό λέγονται μονομεταβλητά μαθηματικά υποδείγματα. Οι μαθηματικές σχέσεις με τις οποίες προσδιορίζουμε τα διάφορα στατιστικά μέτρα είναι μονομεταβλητά μαθηματικά υποδείγματα.

Πολλές φορές στην οικονομία, συναντάμε προβλήματα, όπου για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων και τη λήψη ορθών αποφάσεων, είναι απαραίτητη η μελέτη, δύο ή περισσότερων μεταβλητών, δηλαδή θα πρέπει να μελετήσουμε ταυτόχρονα τα δεδομένα δύο ή περισσότερων στατιστικών πληθυσμών. Οι πληθυσμοί αυτοί είναι οι λεγόμενοι **διμεταβλητοί ή πολυμεταβλητοί στατιστικοί πληθυσμοί**

και οι αντίστοιχες μαθηματικές σχέσεις, οι οποίες συνδέουν τις συνεξεταζόμενες μεταβλητές, λέγονται διμεταβλητά ή πολυμεταβλητά μαθηματικά υποδείγματα. Π.χ. Η τιμή ($=X_i$) ενός προϊόντος –αγαθού-υπηρεσίας σε συνάρτηση με τη ζητούμενη ποσότητα ($=\Psi_i$) και με την προσφερόμενη ποσότητα ($=Z_i$) και με την αντίστοιχη τιμή ενός άλλου αγαθού ($=\Omega_i$) συμπληρωματικά- υποκατάστατα για να βγάλουμε μια ολοκληρωμένη εικόνα ώστε να καταλήξουμε σε ορθά συμπεράσματα θα πρέπει να γίνει μια ταυτόχρονη ανάλυση όλων αυτών των μεταβλητών ώστε να λυθεί αυτό το πολλαπλό μαθηματικό υπόδειγμα.

Για να δούμε αν υπάρχει σχέση εξάρτησης της μιας μεταβλητής Ψ από μια άλλη μεταβλητή X , εξετάζουμε κάθε φορά τα μαθηματικά υποδείγματα που προκύπτουν. Συγκεκριμένα, στα διμεταβλητά μαθηματικά υποδείγματα, όπου η μεταβλητή X η οποία ενδέχεται να επιδρά και να διαμορφώνει τις τιμές της μεταβλητής Ψ , ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** (independent variable), ενώ η μεταβλητή Ψ η οποία δέχεται τις επιδράσεις της μεταβλητής X , ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή** (Dependent Variable).

Κάνοντας την ανάλυση των διμεταβλητών στατιστικών πληθυσμών διαπιστώνουμε εάν υπάρχει ή όχι σχέση εξάρτησης (συσχέτιση) μεταξύ των μεταβλητών Ψ και X (δηλαδή αν η ανεξάρτητη μεταβλητή επηρέασε τη διαμόρφωση των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής) και να μετρήσουμε το βαθμό (την ένταση) της συσχέτισης.

Σε μια επιχείρηση είναι πολύ χρήσιμο να γνωρίζουμε το βαθμό συσχέτισής της, σε σχέση με τις άλλες ώστε να γίνονται σωστές προβλέψεις, σωστός προγραμματισμός για τη δράση της επιχείρησης και γενικά για να ληφθούν ορθές επιχειρηματικές αποφάσεις, ώστε η επιχείρηση όχι απλώς να επιβιώνει αλλά και να <<ζει>>.

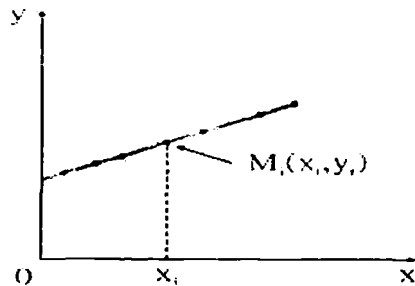
A.10. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ

Δύο μεταβλητές X και Ψ έχουν συναρτησιακή εξάρτηση όταν σε κάθε τιμή x_i της μεταβλητής X αντιστοιχεί μία και μόνο τιμή ψ_i της μεταβλητής Ψ .

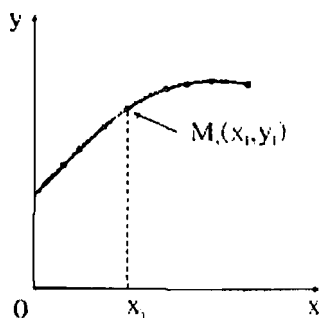
Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει, μια συνάρτηση με τύπο:

$$\Psi = f(x)$$

Ο οποίος επαληθεύεται από όλα τα ζεύγη τιμών (x_i, ψ_i) που εμφανίζονται. Η σχέση αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό των τιμών της Ψ από τις αντίστοιχες τιμές της X με απόλυτη ακρίβεια. Επομένως, όλα τα σημεία $M_i(x_i, \psi_i)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης βρίσκονται πάνω σε μια καμπύλη που έχει εξίσωση $\Psi = f(x)$ όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα :



Διάγραμμα 1.α)



Διάγραμμα 1. β)

Σε μια τέτοια συναρτησιακή εξάρτηση, η X χαρακτηρίζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και η Y **εξαρτημένη ή ερμηνευτική μεταβλητή**.

Σχέσεις της μορφής αυτής συναντούμε στις θετικές κυρίως επιστήμες. Για παράδειγμα υπάρχει συναρτησιακή εξάρτηση μεταξύ του εμβαδού E και της ακτίνας r ενός κυκλικού δίσκου, $E = \pi \cdot r^2$, μεταξύ κεφαλαίου και τόκου, εφόσον ο χρόνος και το επιτόκιο παραμένουν σταθερά, $I = k \cdot i \cdot n$, (όπου I = επιτόκιο, k = κεφάλαιο, i = τόκος και n = χρόνος) μεταξύ αριθμού των τηλεφωνημάτων που πραγματοποιούνται και του ποσού που πρέπει να πληρωθεί στον Ο.Τ.Ε., δηλαδή $\psi = 150 + 2x$ κ.λ.π., (πάγιο = 150).

A.11. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ Η ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Είναι φανερό ότι στις οικονομικές, κοινωνικές αλλά και σε πολλές άλλες επιστήμες, σχέσεις συναρτησιακής μορφής δύο μεταβλητών δεν υπάρχουν. Έτσι, δύο μεταβλητές X και Ψ έχουν **στοχαστική εξάρτηση** όταν σε κάθε τιμή της μεταβλητής X δεν αντιστοιχεί μια ορισμένη τιμή της μεταβλητής Ψ , αλλά μια τιμή ψ , η οποία προκύπτει από ένα πλήθος δυνατών τιμών της και την οποία δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια, όπως για παράδειγμα το ύψος του εισοδήματος ενός εργαζόμενου καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τις δαπάνες του, αλλά όχι κατά τρόπο μοναδικό, αφού δύο εργαζόμενοι με το ίδιο εισόδημα δεν είναι απαραίτητο να έχουν και τις ίδιες δαπάνες. Ακόμη, η ζήτηση ενός αγαθού καθορίζει κατά κανόνα την τιμή αυτού του αγαθού, αλλά όχι κατά τρόπο απόλυτο. Επίσης, από τον αριθμό των μελών μιας οικογένειας δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια τον αριθμό των δωματίων της κατοικίας της ή από το λίπασμα που χρησιμοποιούμε σε ένα αγροτεμάχιο δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το ύψος της παραγωγής κ.λ.π..

Με άλλα λόγια δύο μεταβλητές είναι δυνατόν να συνδέονται με μια έντονη αλλά όχι συναρτησιακή σχέση ή ακόμη με μια χαλαρή ή ασθενή όπως λέγεται σχέση. Οι σχέσεις αυτές λέγονται **στοχαστικές ή στατιστικές σχέσεις**.

Τέλος, είναι δυνατόν οι τιμές δύο μεταβλητών να μην σχετίζονται μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή η συνάφεια μεταξύ των δύο μεταβλητών είναι ανύπαρκτη, όπως π.χ. συμβαίνει στην περίπτωση των ανεξάρτητων μεταβλητών.

B ΕΝΟΤΗΤΑ

B.1. ΑΠΛΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

Η διερεύνηση του τρόπου συμπεριφοράς ενός οικονομικού φαινομένου δεν πραγματοποιείται κατά ανάγκη με τη μελέτη των τιμών μιας μόνο μεταβλητής. Πολύ συχνά, ο τρόπος με τον οποίο συμπεριφέρεται μια τυχαία μεταβλητή, που εκφράζει το υπό εξέταση φαινόμενο, καθορίζεται άμεσα ή έμμεσα από τη συμπεριφορά και άλλων τυχαίων μεταβλητών. Έτσι, αν οι παρατηρήσεις των άλλων μεταβλητών είναι και αυτές διαθέσιμες, τότε το αντικείμενο της ανάλυσης επικεντρώνεται στον προσδιορισμό της ποσοτικής σχέσης μεταξύ των εμπλεκόμενων μεταβλητών που επηρεάζουν τη συμπεριφορά του φαινομένου.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η μελέτη της συμπεριφοράς των πωλήσεων ενός προϊόντος μιας επιχείρησης. Όπου, συλλέγοντας τα αναγκαία χρονολογικά στοιχεία που αφορούν τις πωλήσεις της επιχείρησης, καθώς και όλα τα

υπόλοιπα διαθέσιμα στατιστικά στοιχεία που αφορούν το προϊόν κάποιας άλλης ανταγωνιστικής επιχείρησης, μπορούμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά αυτών των δύο προϊόντων. Παράλληλα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλες οικονομικές μεταβλητές, οι οποίες ενδεχομένως επηρεάζουν τις πωλήσεις του προϊόντος, όπως π.χ. είναι οι δαπάνες της διαφήμισης, η τιμή άλλου ή άλλων ανταγωνιστικών ή συμπληρωματικών προϊόντων κ.ο.κ.

Επομένως, η προσθήκη και άλλων οικονομικών μεταβλητών στο υπό εξέταση φαινόμενο δίνει μια άλλη διάσταση στον τρόπο προσέγγισης και διερεύνησης της συμπεριφοράς του, αυτό επιτυγχάνεται με την **ανάλυση παλινδρόμησης** (regression analysis) αποσκοπώντας στον προσδιορισμό των ποσοτικών σχέσεων μεταξύ των εμπλεκόμενων μεταβλητών και στη δημιουργία προβλέψεων, με την προϋπόθεση βέβαια ότι οι σχέσεις αυτές έχουν προσδιοριστεί σωστά.

Ειδικότερα στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τη μελέτη φαινομένων, στα οποία η συμπεριφορά τους καθορίζεται από μία και μόνο μεταβλητή. Αυτό σημαίνει ότι στην ανάλυση αυτή εμπλέκονται μόνο δύο μεταβλητές από τις οποίες προσδιορίζεται η ποσοτική τους σχέση, καθώς και η δημιουργία προβλέψεων των τιμών της μιας μεταβλητής με βάση τις τιμές της άλλης. Επίσης, θα αναφερθούμε και στην **ανάλυση συσχέτισης** (correlation analysis) για να διαπιστώσουμε το βαθμό εξάρτησης μεταξύ των δύο μεταβλητών.

B.2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

Η ανάλυση της παλινδρόμησης είναι μια μεθοδολογία ποσοτικής εκτίμησης της σχέσης που μπορεί να υπάρχει μεταξύ μιας μεταβλητής, η οποία ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή** και μιας ή περισσότερων άλλων μεταβλητών που ονομάζονται **ανεξάρτητες μεταβλητές**. Η μεθοδολογία αυτή βασίζεται σε στατιστικές και μαθηματικές μεθόδους, οι οποίες χρησιμοποιούνται για και την εκτίμηση των εμπειρικών σχέσεων μεταξύ των οικονομικών μεταβλητών που ερμηνεύουν τη συμπεριφορά του φαινομένου. Πιο συγκεκριμένα, με την ανάλυση της παλινδρόμησης προσδιορίζεται η ποσοτική σχέση μεταξύ της **εξαρτημένης μεταβλητής** και μιας ή περισσότερων **ανεξάρτητων μεταβλητών** με απώτερο σκοπό την πρόβλεψη των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής με βάση συγκεκριμένες τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Θα πρέπει ωστόσο να αναφερθεί ότι η ανάλυση της παλινδρόμησης εξετάζει γραμμικές σχέσεις και διακρίνεται σε απλή και πολλαπλή παλινδρόμηση, ανάλογα με το αν χρησιμοποιούνται μια ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές. Αν η συμπεριφορά της εξαρτημένης μεταβλητής καθορίζεται από μια ανεξάρτητη μεταβλητή, εφαρμόζεται η **απλή γραμμική παλινδρόμηση**. Αντίθετα, αν υπάρχουν περισσότερες της μιας ανεξάρτητες μεταβλητές, εφαρμόζεται η **πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση**. Η απλή γραμμική παλινδρόμηση μπορεί να θεωρηθεί ως μια απλή περίπτωση της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης.

Η ανάλυση της παλινδρόμησης συμβάλλει καθοριστικά στον προσδιορισμό των ποσοτικών σχέσεων μεταξύ διάφορων οικονομικών μεταβλητών και μας δίνει τη δυνατότητα να επιβεβαιώσουμε την ισχύ ή όχι ορισμένων θεωριών. Για παράδειγμα αναφέρουμε το γνωστό **νόμο της ζήτησης**, σύμφωνα με τον οποίο αν η τιμή ενός αγαθού αυξηθεί (μειωθεί), τότε η ζητούμενη ποσότητα του θα πρέπει να μειωθεί

(αυξηθεί), με την προϋπόθεση ότι όλοι οι άλλοι παράγοντες παραμένουν σταθεροί. Έτσι, ενώ η οικονομική θεωρία καθορίζει την αντίστροφη σχέση μεταξύ τιμής και ζητούμενης ποσότητας ενός προϊόντος, εντούτοις δεν είναι σε θέση να προσδιορίσει πόσο θα αυξηθεί ή θα μειωθεί η ζητούμενη ποσότητα του, λόγω μιας μεταβολής στην τιμή του προϊόντος. Απάντηση σε αυτό το ερώτημα έρχεται να δώσει η ανάλυση της παλινδρόμησης με την εκτίμηση της σχέσης μεταξύ ζητούμενης ποσότητας και τιμής του προϊόντος για συγκεκριμένο δείγμα παρατηρήσεων των οικονομικών αυτών μεταβλητών. Αυτό σημαίνει ότι η ανάλυση της παλινδρόμησης διερευνά το **βαθμό** στον οποίο μπορεί να ανταποκρίνονται στην πράξη οι διάφορες οικονομικές θεωρίες.

Γενικά, η ανάλυση της απλής γραμμικής παλινδρόμησης πραγματοποιείται σε πέντε στάδια, τα οποία εμφανίζονται στο Διάγραμμα 1.2. Τα στάδια αυτά είναι ιεραρχημένα ως προς τη σειρά εφαρμογής τους και συντελούν στην καλύτερη κατανόηση του τρόπου εφαρμογής και λειτουργίας της μεθοδολογίας αυτής.

Στο πρώτο στάδιο κατασκευάζεται το **θεωρητικό υπόδειγμα** σύμφωνα με το οποίο καθορίζεται το σύνολο των ανεξάρτητων μεταβλητών που αναμένεται να ερμηνεύουν τη συμπεριφορά της εξαρτημένης μεταβλητής. Αυτό αρκετά συχνά επιτυγχάνεται και με την παράλληλη εξέταση άλλων θεωρητικών και εμπειρικών ερευνών που αφορούν το υπό εξέταση αντικείμενο της έρευνας.

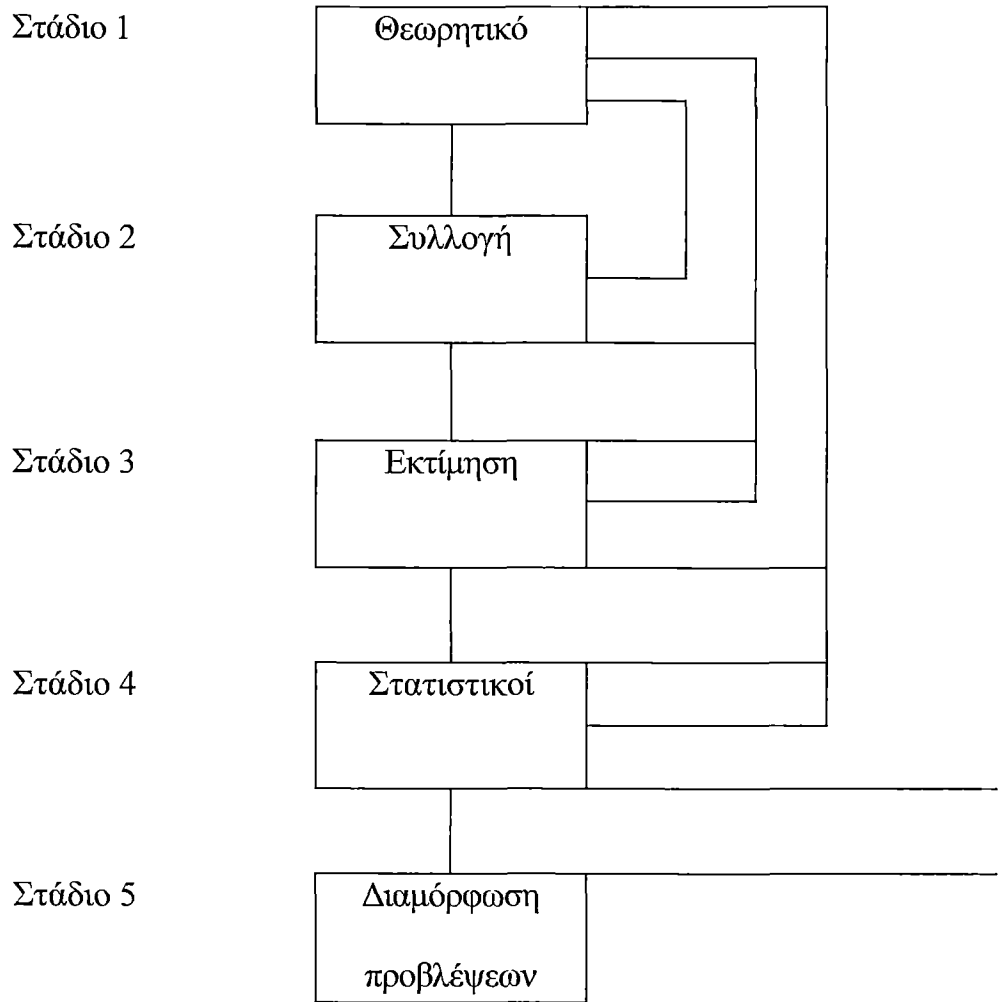
Στο δεύτερο στάδιο γίνεται η **συλλογή των δεδομένων**. Στο στάδιο αυτό είναι πολύ πιθανό να παρουσιαστούν δυσκολίες σχετικά με τη διαθεσιμότητα των δεδομένων, την ακρίβεια τους, την πληρότητα τους κ.ά. Όταν υπάρχουν τέτοιου είδους προβλήματα στη συλλογή των δεδομένων μιας ή περισσότερων μεταβλητών του αρχικού θεωρητικού υποδείγματος, τότε απαιτείται η αναθεώρηση του με μεταβλητές για τις οποίες υπάρχουν τα κατάλληλα δεδομένα. Επίσης, στο στάδιο αυτό συνηθίζεται να γίνεται και ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, ώστε τα

αποτελέσματα της ανάλυσης της παλινδρόμησης να συγκριθούν με τα αντίστοιχα άλλων ερευνών.

Στο τρίτο στάδιο πραγματοποιείται η **εκτίμηση του υποδείγματος**, δηλαδή ο προσδιορισμός της ποσοτικής σχέσης μεταξύ της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης ή των ανεξάρτητων μεταβλητών, ενώ στο τέταρτο στάδιο εφαρμόζονται οι διάφοροι **στατιστικοί έλεγχοι** για την αξιοπιστία της εκτιμώμενης μορφής του θεωρητικού υποδείγματος. Όπως και στο στάδιο της συλλογής των δεδομένων έτσι και στα δύο αυτά στάδια είναι δυνατή η αναθεώρηση του θεωρητικού υποδείγματος, εφόσον βέβαια δημιουργηθούν προβλήματα στην εκτίμηση του υποδείγματος ή στους στατιστικούς ελέγχους ή και στα δύο.

Στο τελευταίο στάδιο το υπόδειγμα που προκύπτει από την προηγούμενη διαδικασία χρησιμοποιείται για τη **διαμόρφωση των προβλέψεων** των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής με βάση δεδομένες τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών. Σημειώνεται ότι τα πρώτα τέσσερα στάδια αναφέρονται στην αναγνώριση του τρόπου συμπεριφοράς του υπό εξέταση φαινομένου, ενώ το τελευταίο στη διαμόρφωση προβλέψεων που αφορούν τη μελλοντική του εξέλιξη.

Αξίζει τέλος, να αναφερθεί ότι κατά τις τελευταίες δεκαετίες η ευρεία ανάπτυξη κατάλληλων λογισμικών πακέτων συνετέλεσε σημαντικά στην απλοποίηση των τριών τελευταίων σταδίων της ανάλυσης της παλινδρόμησης που δίνονται στο Διάγραμμα 2.1.



**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.1 : Τα στάδια της ανάλυσης της
παλινδρόμησης**

B.3. ΓΡΑΜΜΕΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας τα N , το πλήθος ζεύγη παρατηρήσεων ενός διμεταβλητού στατιστικού πληθυσμού και επιθυμούμε :

α) τη συνοπτική ποσοτική περιγραφή της υφισταμένης σχέσης, έτσι ώστε να αποκαλύπτεται η νομοτέλεια μεταξύ των μεταβλητών.

β) τη μέτρηση της έντασης, δηλαδή του βαθμού αλληλεξάρτησης των δύο μεταβλητών .

γ) την πρόβλεψη της μελλοντικής εξέλιξης της Ψ στην περίπτωση που η X εκφράζει το χρόνο ή την εκτίμηση της Ψ για κάποια τιμή της X για την οποία δεν υπάρχει αντίστοιχη παρατήρηση.

Η πρώτη απαίτηση ικανοποιείται με τον προσδιορισμό ενός κατάλληλου για κάθε περίπτωση μαθηματικού τύπου: $\Psi = F(x)$, που καλείται **γραμμή παλινδρόμησης** της Ψ επί της X , ενώ η δεύτερη απαίτηση ικανοποιείται με τον υπολογισμό διαφορών συντελεστών οι οποίοι καλούνται δείκτες προσαρμογής ή προσδιορισμού και μετρούν την ένταση αυτής της αλληλεξάρτησης. Τέλος, η τρίτη απαίτηση δηλαδή η εκτίμηση της Ψ για κάποια τιμή της X μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της γραμμής παλινδρόμησης: $\Psi = F(x)$.

Για να εξετάσουμε τη σχέση εξάρτησης που συνδέει τις μεταβλητές X και Ψ , υπάρχουν δύο τρόποι υπολογισμού :

A)Ο πρώτος τρόπος ονομάζεται **ανάλυση παλινδρόμησης** (Regression Analysis) και αποβλέπει στον προσδιορισμό μιας γενικής σχέσης εξάρτησης μεταξύ των συνεξεταζόμενων μεταβλητών X και Ψ , δηλαδή στον προσδιορισμό μιας μαθηματικής εξίσωσης, η οποία ονομάζεται **εξίσωση παλινδρόμησης** (Regression

Equation). Με άλλα λόγια, στην Ανάλυση Παλινδρόμησης εξετάζουμε τη σχέση εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών Ψ και X έτσι, ώστε να μπορέσουμε να προβλέψουμε μελλοντικά την τιμή της μιας μεταβλητής με βάση την άλλη μεταβλητή. Η μεταβλητή η οποία λαμβάνεται σαν βάση της πρόβλεψης καλείται **ανεξάρτητη μεταβλητή** ($=X$). Σαν ανεξάρτητη μεταβλητή θεωρείται εκείνη της οποίας οι τιμές είναι προκαθορισμένες ή επιλέγονται κατά κάποιο τρόπο. π.χ. επιλέγουμε άτομα ορισμένου εισοδήματος για να εξετάσουμε την επίδραση που έχει το εισόδημα ($=X$) επί της δαπάνης για ψυχαγωγία ($=\Psi$). Η μεταβλητή που θέλουμε να προβλέψουμε και η οποία δέχεται τις επιδράσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής καλείται **εξαρτημένη μεταβλητή** ($=\Psi$) και είναι μια τυχαία μεταβλητή.

Η μορφή της εξάρτησης των διαφόρων μεταβλητών μπορεί να είναι γραμμική ή καμπυλόγραμμη. Λέγοντας ότι η σχέση εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών είναι γραμμική, εννοούμε ότι ο μέσος όρος της εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών μπορεί να αναπαρασταθεί σε μια ευθεία γραμμή $\Psi = a + bX$. Ενώ όταν τα δεδομένα της παρατήρησης μπορούν να αναπαρασταθούν σε μια καμπύλη, τότε λέμε ότι η σχέση εξάρτησης μεταβλητών είναι καμπυλόγραμμη. Π.χ. $\Psi = a + bX + \gamma X^2$. Η πρώτη περίπτωση λέγεται **γραμμική παλινδρόμηση** (Linear Regression) και η δεύτερη **καμπυλόγραμμη παλινδρόμηση** (Curvilinear Regression). Επίσης, η Ανάλυση Παλινδρόμησης μπορεί να περιλαμβάνει περισσότερες από δύο μεταβλητές. Π.χ. η ζητούμενη ποσότητα ($=\Psi$) ενός αγαθού εξαρτάται από την τιμή ($=X$) του αγαθού, από το διαθέσιμο εισόδημα ($=W$), από την τιμή των συναγωνιζόμενων αγαθών ($=Z$), και άλλα. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι έχουμε μια πολλαπλή σχέση εξάρτησης, η οποία ονομάζεται **πολλαπλή παλινδρόμηση** (Multiple Regression) και η οποία μπορεί να είναι γραμμική ή καμπυλόγραμμη.

B) η δεύτερη μέθοδος της εξάρτησης (συσχέτισης) της μιας μεταβλητής Ψ από μία άλλη μεταβλητή X , ονομάζεται **Συσχέτιση** (Correlation). Η Συσχέτιση

ασχολείται με τον ποσοτικό προσδιορισμό του βαθμού (της έντασης) της εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών και με τη φύση της συσχέτισης (θετική ή αρνητική). Η μέτρηση του βαθμού της συσχέτισης μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών γίνεται με μια στατιστική παράμετρο, η οποία ονομάζεται **Συντελεστής Συσχέτισης** (Correlation Coefficient). Η συσχέτιση διακρίνεται σε θετική και αρνητική. **Θετική** καλείται η συσχέτιση, όταν σε αύξηση (ή μείωση) της μιας μεταβλητής αντιστοιχεί αύξηση (ή μείωση) και της άλλης μεταβλητής. Για παράδειγμα, αύξηση του εισοδήματος (=X) συνεπάγεται αύξηση της δαπάνης για ψυχαγωγία και αντίστροφα. **Αρνητική** καλείται η συσχέτιση όταν σε κάθε αύξηση (ή μείωση) της μιας μεταβλητής αντιστοιχεί μείωση (ή αύξηση) της άλλης μεταβλητής. Για παράδειγμα, αύξηση της τιμής ενός αγαθού (=X) συνεπάγεται μείωση της ζητούμενης ποσότητας (=Ψ) του αγαθού και αντίστροφα. Αν τώρα, τα μεταβλητά X και Ψ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, τότε θα είναι και ασυσχέτιστα, δηλαδή η μεταβολή των τιμών της μιας μεταβλητής (=X) δεν θα προκαλεί επιδράσεις στις τιμές της άλλης μεταβλητής (=Ψ). Άρα, δεν υπάρχει πρόβλημα ανάλυσης Παλινδρόμησης και συσχέτισης.

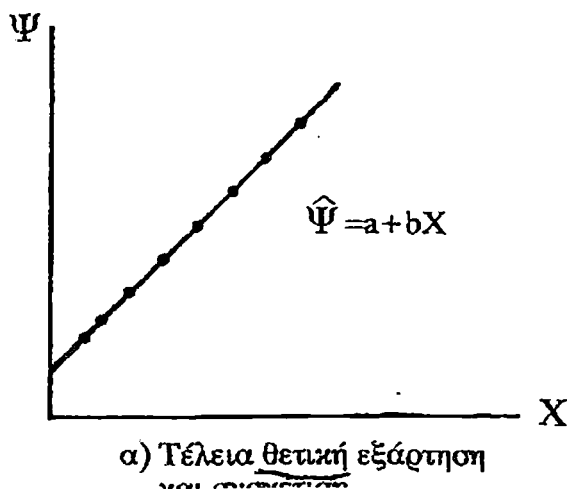
Αν διαθέτουμε ένα δείγμα n ζευγών-τιμών των μεταβλητών Ψ και X και θέλουμε να έχουμε μια πρώτη εικόνα για την ύπαρξη ή όχι εξάρτησης (συσχέτισης) μεταξύ των μεταβλητών Ψ και X, τότε απεικονίζουμε τις τιμές των Ψ και X πάνω σε ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων. Τα σημεία του επιπέδου, τα οποία έχουν τεταγμένες τις τιμές της μεταβλητής X, δημιουργούν ένα « νέφος» σημείων, το οποίο ονομάζεται **Διάγραμμα Διασποράς** (Scatter Diagram).

Το Διάγραμμα Διασποράς είναι πολύ χρήσιμο, γιατί μας δίνει μια πρώτη εικόνα για το είδος της εξάρτησης της μεταβλητής Ψ από τη μεταβλητή X (δηλαδή αν η

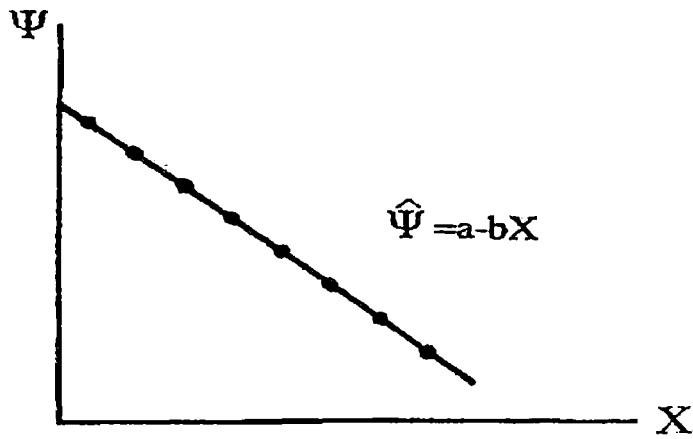
εξάρτηση είναι γραμμική ή καμπυλόγραμμη, θετική ή αρνητική) και επιπλέον μας δείχνει το βαθμό (ένταση) της συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών Ψ και X .

Από τα Διαγράμματα 2.1.α, 2.1.β, 2.1.γ, 2.1.δ, 2.1.ε και 2.1.στ, συνάγονται τα ακόλουθα:

Α) Όταν τα σημεία σχηματίζουν ευθεία γραμμή, η οποία έχει θετικό γωνιακό συντελεστή (περίπτωση 2.1.α). τότε έχουμε θετική εξάρτηση και τέλεια θετική συσχέτιση, δηλαδή και οι δύο μεταβλητές κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση, ενώ όταν τα σημεία σχηματίζουν ευθεία γραμμή, η οποία έχει αρνητικό γωνιακό συντελεστή (περίπτωση 2.1.β), τότε υπάρχει αρνητική εξάρτηση και τέλεια αρνητική συσχέτιση, δηλαδή οι μεταβλητές κινούνται προς αντίθετη κατεύθυνση.



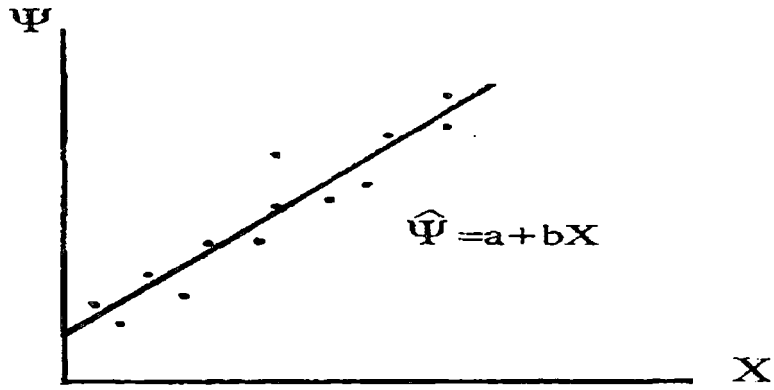
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.1.α



β) Τέλεια αρνητική εξάρτη-

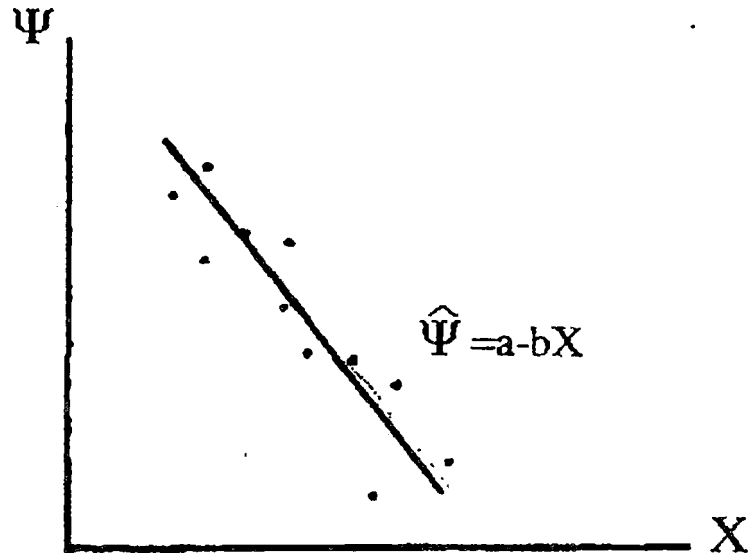
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.1.β

B) Όταν τα σημεία δεν σχηματίζουν ευθεία γραμμή αλλά δεν απομακρύνονται πολύ από αυτή (περίπτωση 2.1.γ και 2.1.δ), τότε υπάρχει θετική ή αρνητική εξάρτηση ανάλογα αν η ευθεία που περνάει από το « νέφος» των σημείων έχει θετικό ή αρνητικό γωνιακό συντελεστή και η συσχέτιση είναι έντονη. Όταν όμως τα σημεία απομακρύνονται από την ευθεία (περίπτωση 2.1.ε), τότε εξακολουθεί να υπάρχει εξάρτηση, αλλά η συσχέτιση γίνεται πιο ασθενής.



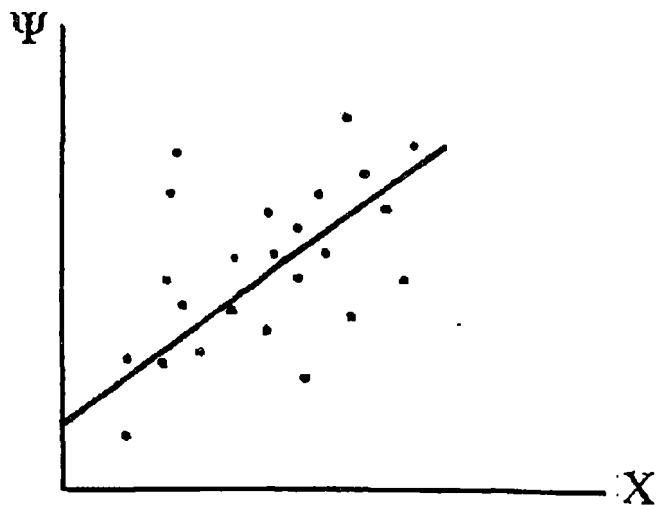
γ) Έντονη θετική εξάρτηση και συσχέτιση

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.1.γ



δ) Έντονη αρνητική εξάρτηση και συσχέτιση

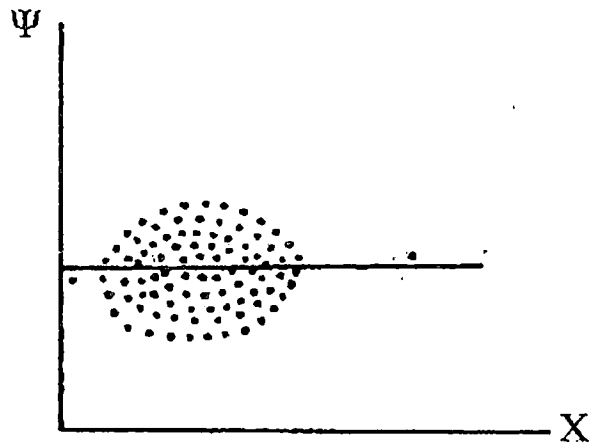
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.1. δ



ε). Ασθενής εξάρτηση
και συσχέτιση

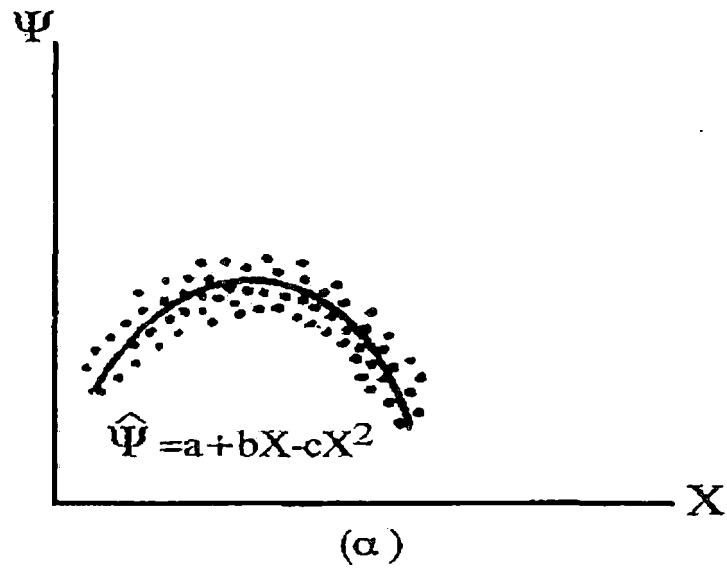
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.1.ε

Γ) Τέλος, όταν τα σημεία σχηματίζουν κύκλο (περίπτωση 2.1.στ), ή τετράγωνο, τότε δεν υπάρχει καμιά εξάρτηση και άρα καμιά συσχέτιση. Στο Διάγραμμα 2.2 παραθέτουμε ορισμένες μορφές καμπυλόγραμμης εξάρτησης των μεταβλητών Y και X , με τις αντίστοιχες εξισώσεις καμπυλόγραμμης παλινδρόμησης .

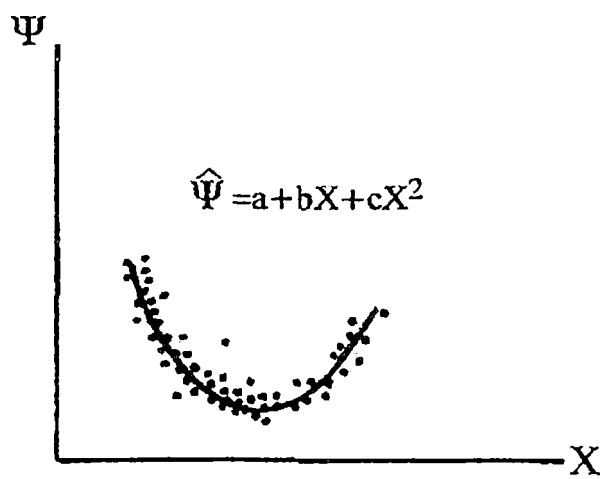


στ) Ασυσχέτιστα μεταβλητά
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.1. στ

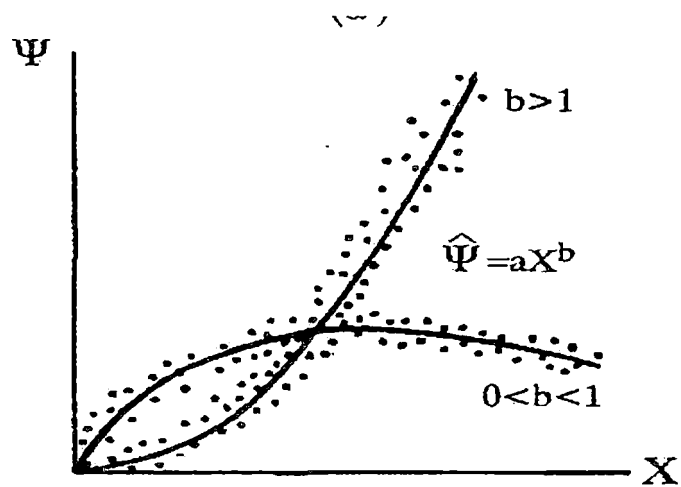
Στο διάγραμμα 2.2 παραθέτονται ορισμένες μορφές καμπυλόγραμμης εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών Ψ και X , με τις αντίστοιχες εξισώσεις καμπυλόγραμμης παλινδρόμησης.



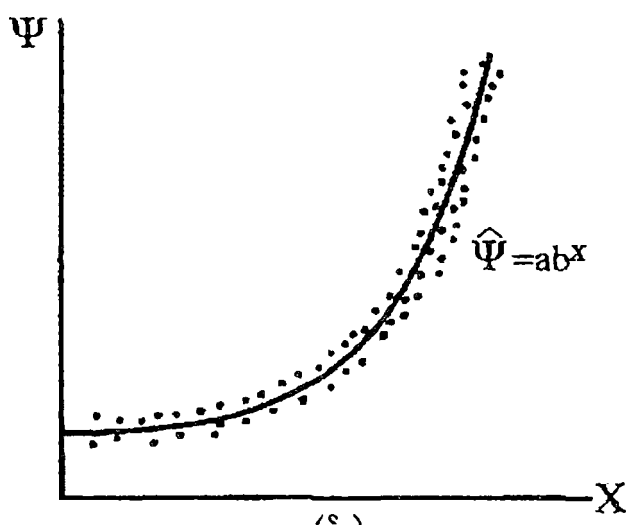
Διάγραμμα 2.2.α



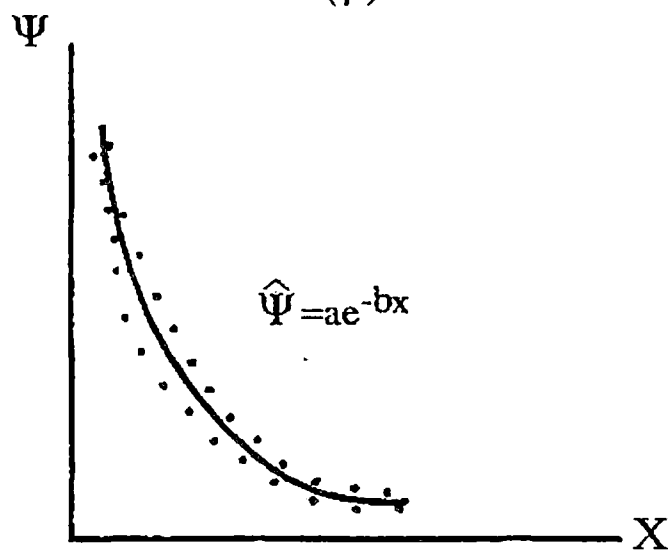
Διάγραμμα 2.2.β



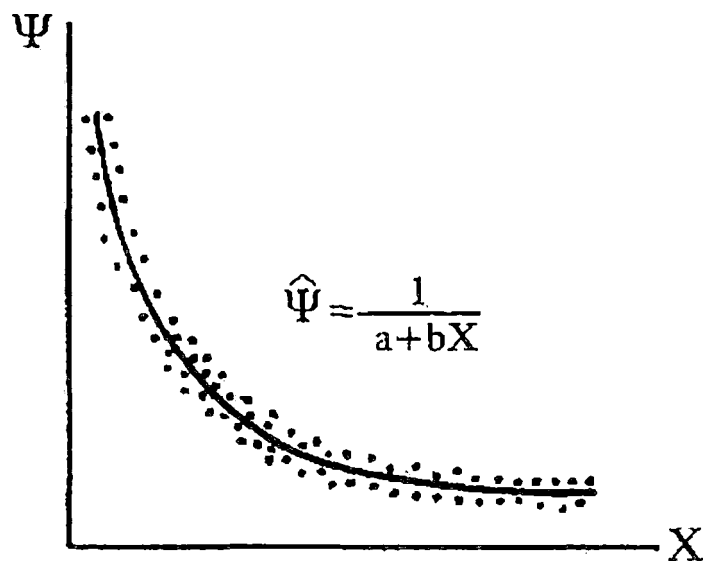
Διάγραμμα 2.2.γ



Διάγραμμα 2.2.δ



Διάγραμμα 2.2.ε



Διάγραμμα 2.2.στ

Διάφορες μορφές καμπυλόγραμμης παλινδρόμησης

Εκτός από τα διαγράμματα διασποράς, υπάρχουν και ορισμένα κριτήρια για την εκλογή της καταλληλότερης μορφής μιας εξίσωσης παλινδρόμησης την οποία θα προσαρμόζουμε κάθε φορά στα δεδομένα της παρατήρησης. Ειδικότερα πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι ισχύουν τα εξής κριτήρια :

α) η εξίσωση Παλινδρόμησης $\hat{\Psi} = a + bX_i$ εφαρμόζεται όταν και οι τιμές της μεταβλητής X_i και οι τιμές της μεταβλητής Ψ_i σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο ή όταν οι πρώτες διαφορές των μεταβλητών X_i και Ψ_i είναι σταθερές ή περίπου σταθερές. Δηλαδή όταν :

$$\Delta X_1 = X_2 - X_1 = C, \quad \Delta \Psi_1 = \Psi_2 - \Psi_1 = C$$

$$\Delta X_2 = X_3 - X_2 = C, \quad \Delta \Psi_2 = \Psi_3 - \Psi_2 = C$$

$$\dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots$$

$$\Delta X_i = X_{i+1} - X_i = C, \quad \Delta \Psi_i = \Psi_{i+1} - \Psi_i = C$$

β) η εξίσωση Παλινδρόμησης $\hat{\Psi} = a + bX + cX^2$ εφαρμόζεται όταν οι τιμές της μεταβλητής X_i σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο και οι δεύτερες διαφορές των μεταβλητών Ψ_i είναι σταθερές ή περίπου σταθερές. Δηλαδή :

$$\begin{aligned} \Delta^2 \Psi_1 &= \Delta \Psi_2 - \Delta \Psi_1 = C \\ \Delta^2 \Psi_2 &= \Delta \Psi_3 - \Delta \Psi_2 = C \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta^2 \Psi_i &= \Delta \Psi_{i+1} - \Delta \Psi_i = C \end{aligned}$$

γ) η εξίσωση παλινδρόμησης $\hat{\Psi} = aX_1^b$ εφαρμόζεται όταν οι τιμές της μεταβλητής X_i και οι τιμές της μεταβλητής Ψ_i σχηματίζουν (κατά προσέγγιση) γεωμετρική πρόοδο. Δηλαδή όταν :

$$\frac{\Psi_2}{\Psi_1} = \frac{\Psi_3}{\Psi_2} = \dots = \frac{\Psi_{i+1}}{\Psi_i} = \omega \quad \text{και} \quad \frac{X_2}{X_1} = \frac{X_3}{X_2} = \dots = \frac{X_{i+1}}{X_i} = \omega'$$

δ) η εξίσωση παλινδρόμησης $\hat{\Psi} = ab^{X_i}$ εφαρμόζεται όταν οι τιμές της μεταβλητής X_i σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο και οι τιμές της μεταβλητής Ψ_i σχηματίζουν (κατά προσέγγιση) γεωμετρική πρόοδο. (Γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda \neq 1$ ορισμός: $\alpha_{\nu+1} = \alpha \cdot \lambda$, με $\alpha_1 \neq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, ο νιοστός όρος $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$).

ε) η εξίσωση παλινδρόμησης

εφαρμόζεται όταν οι τιμές της μεταβλητής Ψ_i σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο και οι τιμές της μεταβλητής X_i σχηματίζουν αρμονική πρόοδο. (Αρμονική πρόοδος είναι η πρόοδος όπου ο λόγος λ παραμένει σταθερός).

$$\hat{\Psi} = a + b \cdot \frac{1}{X_i}$$

στ) η εξίσωση παλινδρόμησης

$$\hat{\Psi} = \frac{1}{\alpha + bX_i} \text{ ή } \hat{\Psi}_i = \frac{X_i}{a + bX_i}$$

εφαρμόζεται όταν οι τιμές της X_i σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο και οι τιμές (λόγοι) X_i / Ψ_i σχηματίζουν, επίσης αριθμητική πρόοδο. (Αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω . Ορισμός: $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Ο νιοστός όρος $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$).

B.4. ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ ΣΕ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥΣ

Όταν εξετάζουμε κάποιο οικονομικό πρόβλημα, όπου αποτελείται από δείγμα n ζευγών – τιμών των μεταβλητών X_i και Ψ_i , η X_i είναι η ανεξάρτητη και η Ψ_i είναι η εξαρτημένη μεταβλητή.

Μερικές οικογένειες συναρτήσεων που συχνά χρησιμοποιούνται για την επίλυση οικονομικών και όχι μόνο προβλημάτων, προκειμένου να περιγραφεί με συγκεκριμένο μαθηματικό τύπο η αλληλεξάρτηση αυτών των δύο μεταβλητών, είναι οι παρακάτω σχέσεις :

Ευθεία γραμμή: $\Psi = \alpha + bX$

Παραβολή : $\Psi = \alpha + bX + \gamma X^2$

Πολυώνυμη n βαθμού : $\Psi = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_n X^n$

Υπερβολή : $\Psi = \frac{1}{\alpha + bX}$

Εκθετική : $\Psi = \alpha b^X$

Τροποποιημένη εκθετική : $\Psi = \alpha b^X + \gamma$

Γεωμετρική : $\Psi = \alpha X^B$

Τροποποιημένη γεωμετρική : $\Psi = \alpha X^B + \gamma$

Λογιστική : $\Psi = \frac{1}{\alpha b^x + \gamma}$

Όλοι οι συντελεστές που χρησιμοποιήθηκαν στις παραπάνω σχέσεις (α , b , γ , ανήκουν R) είναι **σταθεροί πραγματικοί αριθμοί**.

Όταν βλέπουμε από ένα διάγραμμα διασποράς ότι σχηματίζεται μια ευθεία γραμμή ή (περίπου ευθεία) η οποία περνάει από το «νέφος» των σημείων τότε το κατάλληλο μαθηματικό υπόδειγμα που πρέπει να προσαρμοστεί στα δεδομένα της παρατήρησης ενός προβλήματος είναι η εξίσωση ευθείας γραμμής $\hat{\Psi}_i = \alpha + bX_i$, η οποία ονομάζεται εξίσωση γραμμικής παλινδρόμησης.

Τα α και b είναι παράμετροι τις οποίες θέλουμε να υπολογίσουμε ή, όπως λέμε, «να εκτιμήσουμε» έτσι ώστε η ευθεία που θα προκύψει να μας δίνει όσο το δυνατόν την καλύτερη περιγραφή της σχέσης εξάρτησης που υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών X και Ψ . Η παράμετρος α μας δίνει το σημείο $(0, \alpha)$ όπου τέμνει τον άξονα y' ενώ, η παράμετρος b παριστάνει το **συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας**.

B.5. ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ α ΚΑΙ b

Οι σταθερές α και b ονομάζονται **συντελεστές παλινδρόμησης** (Regression Coefficients) και έχουν τις εξής έννοιες :

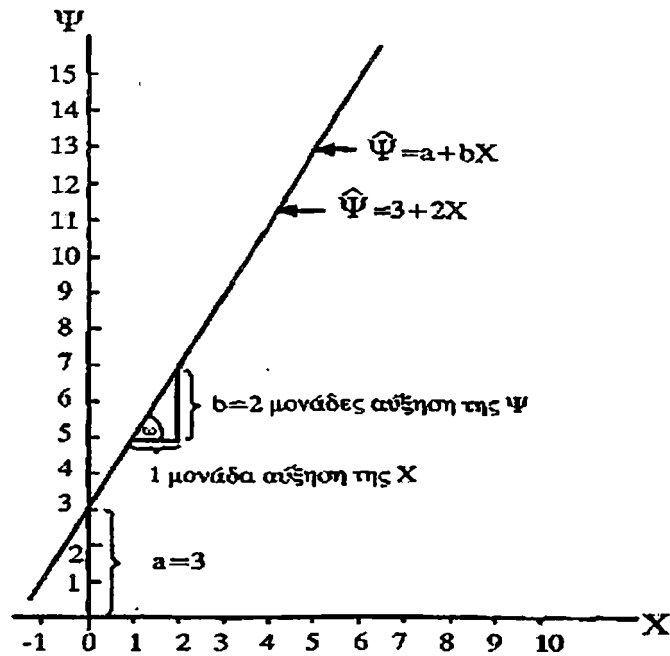
Η σταθερά a εκφράζει την τιμή της Ψ όταν $X=0$. Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα που ακολουθεί η σταθερά a δείχνει το σημείο της τομής της ευθείας $\hat{\Psi}_i = a + bX$ με τον κατακόρυφο άξονα y' y και ονομάζεται τεταγμένη επί την αρχή.

Με το $\hat{\Psi}_i$ συμβολίζουμε τις <<θεωρητικές τιμές>> της εξαρτημένης μεταβλητής (Ψ) ψ δηλαδή τις τιμές που προκύπτουν από την εξίσωση ($\hat{\Psi}_i = a + bX_i$) για δεδομένες τιμές της X . (όπου $i = 1, 2, \dots, n$)

Η τιμή του b προσδιορίζει την **απόλυτη μεταβολή** που επέρχεται στην εξαρτημένη μεταβλητή (Ψ) όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή (X) μεταβληθεί (αυξηθεί ή μειωθεί) κατά μια μονάδα. Αν ο b είναι θετικός ($b > 0$) τότε και η εξάρτηση είναι θετική, ενώ αν το b είναι αρνητικός ($b < 0$) τότε η εξάρτηση είναι αρνητική.

Η σταθερά b **γωνιακός συντελεστής** ή συντελεστής κατεύθυνσης της ευθείας παλινδρόμησης και ισούται με την τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας ω η οποία σχηματίζεται από την τομή της ευθείας $\hat{\Psi} = a + bX$ ή τον οριζόντιο άξονα.

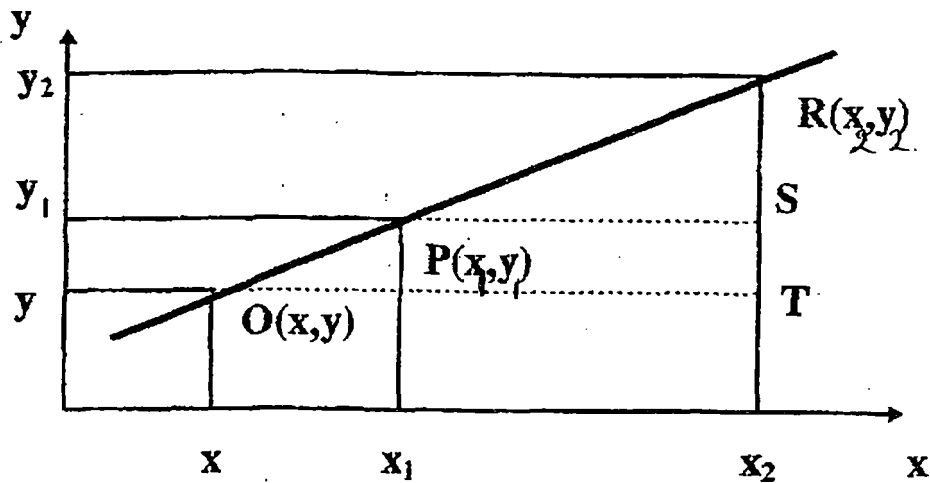
Τεταγμένη επί την αρχή και γωνιακός συντελεστής της ευθείας $\Psi=3+2X$



Διάγραμμα 2.3.1

Μια ευθεία γραμμή για να οριστεί θα πρέπει να γνωρίζουμε δύο από τα σημεία της. Δηλαδή όταν γνωρίζουμε την τεταγμένη επί την αρχή a και το γωνιακό συντελεστή b τότε η ευθεία είναι τελείως καθορισμένη, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 2.3.1. Με την βοήθεια της εφαπτομένης της γωνίας ω . Από το σχήμα 2.3.2 που ακολουθεί έχουμε :

Έστω η ευθεία (ϵ) του επιπέδου με το αντίστοιχο ορθογώνιο σύστημα αξόνων, $P(X_1, \Psi_1), R(X_2, \Psi_2)$ δε δύο τυχαία σημεία αυτής.



Διάγραμμα 2.3.2

Από το τυχαίο σημείο $O(x,\psi)$ φέρουμε την PS και OR παράλληλες προς τον άξονα των x , οπότε σχηματίζονται τα όμοια τρίγωνα PRS και ORT για τα οποία ισχύει:

$$\frac{RS}{RT} = \frac{PS}{OT} \Leftrightarrow \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\Psi_2 - \Psi} = \frac{X_2 - X_1}{X_2 - X} \Leftrightarrow \frac{\Psi - \Psi_1}{\Psi_2 - \Psi_1} = \frac{X - X_1}{X_2 - X_1} \quad (1)$$

$$\Psi = \frac{\Psi_1(X_2 - X_1) - X_1(\Psi_2 - \Psi_1)}{X_2 - X_1} + \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{X_2 - X_1} X \quad (2)$$

Θέτουμε τώρα :

$$\alpha = \frac{\Psi_1(X_2 - X_1) - X_1(\Psi_2 - \Psi_1)}{X_2 - X_1} \text{ και } b = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{X_2 - X_1} \quad (3)$$

και από την (2) έχουμε:

$$\Psi = \alpha + bX$$

Τα σημεία α και b προσδιορίζονται από το σύστημα των δύο εξισώσεων :

$$\Psi_1 = \alpha + bX_1$$

$$\Psi_2 = \alpha + bX_2 \quad (4)$$

Η εξίσωση (1) γράφεται:

$$(\Psi - \Psi_1) = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{X_2 - X_1} (X - X_1) \quad (5)$$

Ας ονομάσουμε τις μεταβολές των X και Ψ ,

$$\Psi - \Psi_1 = \Delta_\Psi \quad \text{και} \quad X - X_1 = \Delta_X \quad (6)$$

Τότε η (4) γίνεται,

$$\Delta_\Psi = \mu \Delta_X \quad \text{ή} \quad \mu = \frac{\Delta_\Psi}{\Delta_X} \quad (7)$$

$$\text{όπου, η σταθερά } \mu = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{X_2 - X_1}$$

ονομάζεται κλίση ή γωνιακός συντελεστής της ευθείας (ε) και ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ω , που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα των x και κατά την αντίστροφη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Δηλαδή, ισχύει:

$$\mu = \varepsilon \varphi \omega \quad -\infty < \varepsilon \varphi \omega = \mu < +\infty \quad (8)$$

Σημείωση

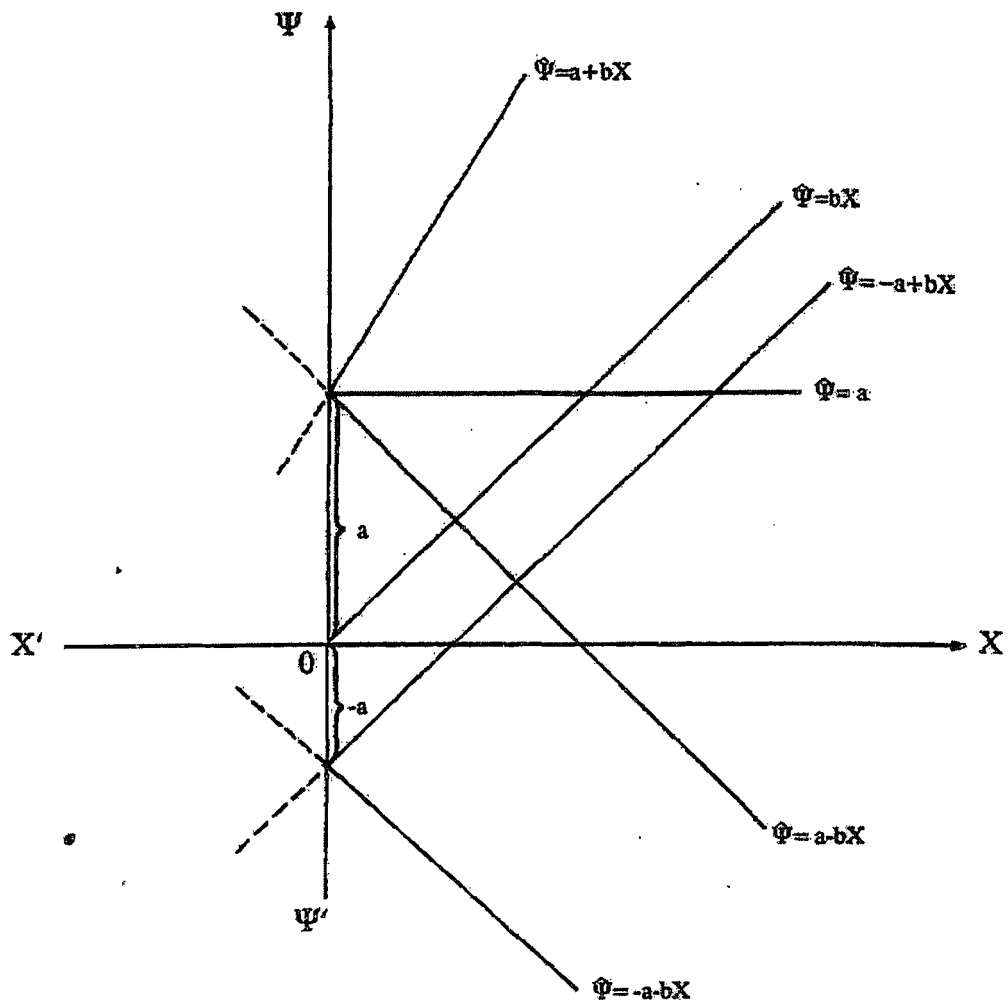
Για την ευθεία (ϵ), το πηλίκο Δ_ψ/Δ_x παραμένει σταθερό. Για κάθε άλλη όμως καμπύλη [όχι πρώτου βαθμού], το πηλίκο Δ_ψ/Δ_x δεν είναι σταθερό και είναι δυνατό να θεωρηθεί η ακολουθία συγκλίνουσα, της οποίας το όριο είναι σταθερός αριθμός, ο οποίος λέγεται *πρώτη παράγωγος* της $\Psi=f(X)$ στο σημείο $O(x,\psi)$, δηλαδή,

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{\Delta_\psi}{\Delta_x} = \frac{d_\psi}{d_x} = \mu \quad (9)$$

Στην περίπτωση της ευθείας, η (9) είναι:

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{\Delta_\psi}{\Delta_x} = \frac{\Delta_\psi}{\Delta_x} = \mu \quad (10)$$

Ευθείες γραμμές που έχουν θετικά και αρνητικά a και b



Διάγραμμα 2.4

Ευθείες γραμμές που έχουν θετικά και αρνητικά b

Β.6. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Το πρόβλημα της στοχαστικής εξάρτησης εντοπίζεται, στην εύρεση μιας καμπύλης η οποία να διέρχεται πολύ κοντά από ορισμένα σημεία, δηλαδή ανάγεται στο εξής γενικότερο μαθηματικό πρόβλημα:

Να βρεθεί η εξίσωση $\Psi = \varphi(\chi)$ μιας καμπύλης η οποία να διέρχεται *πολύ κοντά* από ρ ορισμένα σημεία $K_1(x_1, \psi_1), K_2(x_2, \psi_2), \dots, K_\rho(x_\rho, \psi_\rho)$. Για να έχει όμως νόημα αυτή η διατύπωση και κυρίως η έκφραση «πολύ κοντά», θα πρέπει να βρούμε κάποιο μέτρο, το οποίο να εκφράζει την απόσταση των ρ σημείων από οποιαδήποτε καμπύλη του επιπέδου. Αν λοιπόν ονομάσουμε $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_\rho$ τα σημεία μιας οποιασδήποτε καμπύλης που έχουν τις ίδιες τετμημένες x_1, x_2, \dots, x_ρ αντίστοιχα, ως τέτοιο μέτρο παίρνουμε το άθροισμα:

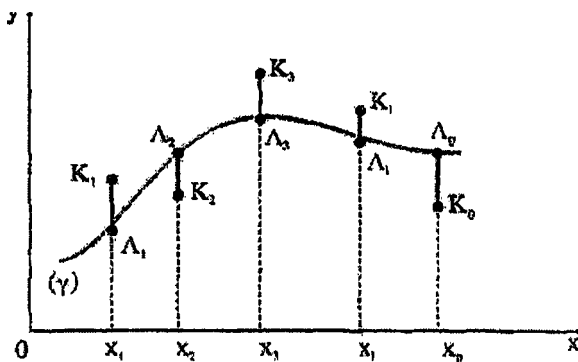
$$A = (K_1 \Lambda_1)^2 + (K_2 \Lambda_2)^2 + \dots + (K_\rho \Lambda_\rho)^2$$

Έτσι, μια καμπύλη θα θεωρείται τόσο πιο κοντά στα σημεία K_1, K_2, \dots, K_ρ , όσο πιο μικρό είναι το άθροισμα A , δηλαδή:

$$(K_1\Lambda_1)^2 + (K_2\Lambda_2)^2 + \dots + (K_r\Lambda_r)^2 = \text{ελάχιστο}$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι υπάρχουν γενικά πολλές καμπύλες με διαφορετικά σχήματα που διέρχονται κοντά από τα ρ αυτά σημεία (μπορεί π.χ. να διέρχονται κοντά από τα ρ σημεία και μια ευθεία και μια παραβολή). Γι' αυτό ακριβώς προσδιορίζουμε από την αρχή, ανάλογα με τη θέση που έχουν τα ρ σημεία, το είδος της καμπύλης που θα τοποθετήσουμε ανάμεσα τους (π.χ. αν θα πάρουμε ευθεία ή παραβολή κλπ.). Αυτό σημαίνει ότι παίρνουμε αυθαίρετα τη μορφή της εξίσωσης $\psi = \varphi(x)$ και μετά προσδιορίζουμε τα διάφορα σημεία της (συντελεστές, σταθεροί όροι κλπ.) με τη βοήθεια των συντεταγμένων των δεδομένων σημείων.

Με τις προϋποθέσεις αυτές, το παραπάνω γενικό πρόβλημα λύνεται με μια μέθοδο που λέγεται **μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων** και η καμπύλη που βρίσκουμε **καμπύλη ελαχίστων τετραγώνων** (βλ. διάγραμμα 2.5)



Διάγραμμα 2.5

B.7. I. ΕΥΘΕΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

Η πιο απλή διαδικασία προσαρμογής μιας ευθείας γραμμής σε ένα διάγραμμα διασποράς είναι <<με το μάτι>>. Αυτή όμως έχει πολλά μειονεκτήματα παρά την απλότητα της. Το κυριότερο είναι η έλλειψη αντικειμενικότητας, αφού διάφορα άτομα μπορούν να χαράξουν διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες. Ακόμα και το ίδιο άτομο μπορεί να χαράξει διαφορετικές ευθείες κάθε φορά. Χρειαζόμαστε λοιπόν, μια ακριβέστερη μέθοδο για την προσαρμογή μιας ευθείας γραμμής σε τέτοιου είδους δεδομένα.

Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων a και b , άρα και για την εύρεση της εξίσωσης της καλύτερης ευθείας που προσαρμόζεται στα δεδομένα είναι η <<μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων >>.

Η πρώτη αναφορά με ολοκληρωμένη ανάπτυξη της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων εμφανίζεται το 1805 σε μια εργασία του Γάλλου μαθηματικού Legendre, (1752-1833) και αμέσως μετά από το Γερμανό μαθηματικό Gauss, (1777-1855) στην αστρονομική του πραγματεία “Theoria Motus” για τον προσδιορισμό της τροχιάς του μικρού πλανήτη Δήμητρα. Μάλιστα εδώ ο Gauss αναφέρει ότι χρησιμοποίησε την αρχή των ελαχίστων τετραγώνων πριν από το 1794 (σε ηλικία μόλις 17 ετών), έτσι ώστε να προηγείται του Legendre ως προς την ανακάλυψη αυτής της μεθόδου.

Για να επιτύχουμε τον πρώτο στόχο της ανάλυσης παλινδρόμησης, δηλαδή να δώσουμε εκτιμήσεις των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής από της ανεξάρτητης μεταβλητής, πρέπει να διατυπώσουμε την μαθηματική εξίσωση μιας γραμμής μεταξύ εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής. Στη συνέχεια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη γραμμή, για να εκτιμήσουμε τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής. Η εξίσωση της ευθείας γραμμής είναι $\Psi = a + bX$, όπου a είναι η υπολογιζόμενη τιμή της τιμής Ψ όταν $X=0$,

και b είναι η κλίση της ευθείας, ή η ποσότητα κατά την οποία η υπολογιζόμενη τιμή της Ψ μεταβάλλεται με κάθε μοναδιαία μεταβολή της X .

B.7. II. ΕΥΘΕΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

Ας υποθέσουμε ότι η θέση που έχουν τα ρ σημεία $K_1(x_1, x_2), K_2(x_2, y_2), \dots, K_\rho(x_\rho, \psi_\rho)$ μας επιτρέπει να ζητήσουμε μια ευθεία η οποία να περνάει πολύ κοντά από τα σημεία αυτά.

Στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε μια εξίσωση πρώτου βαθμού ως προς X και Ψ :

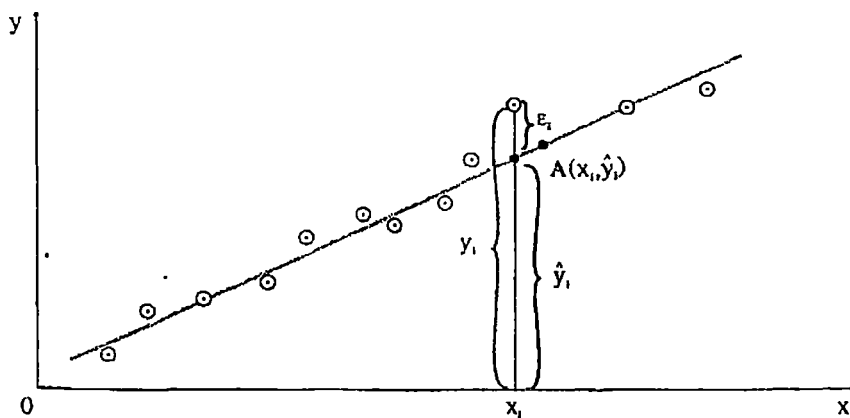
$$\Psi_i = \alpha + bX_i$$

η οποία αντιπροσωπεύει όλες τις ευθείες του επιπέδου.

Από όλες όμως αυτές τις ευθείες της μορφής $\Psi_i = \alpha + bX_i$ θα διαλέξουμε εκείνη την ευθεία που θα δώσει τις μικρότερες διαφορές (αποκλίσεις) μεταξύ εμπειρικών (Ψ_i) και θεωρητικών ($\hat{\Psi}_i$) τιμών, δηλαδή των τιμών:

$$\hat{\varepsilon} = \Psi_i - \hat{\Psi}_i = \Psi_i - (\alpha + bX_i)$$

Η διαφορά $\hat{\varepsilon} = \Psi_i - \hat{\Psi}_i$ ονομάζεται **σφάλμα** ή **απόκλιση της παρατήρησης Ψ_i από τη** θεωρητική τιμή $\hat{\Psi}_i$ του σημείου $A(X_i, \hat{\Psi}_i)$ της ευθείας $\hat{\Psi}_i = \alpha + bX_i$



Διάγραμμα 2.6

Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα n ζευγών - τιμών των μεταβλητών X_i και Ψ_i και έχουμε κατασκευάσει το διάγραμμα διασποράς. Θέλουμε να βρούμε μία ευθεία

$\hat{\Psi}_i = a + bX_i$, η οποία θα περνάει ανάμεσα από τα σημεία (X_i, Ψ_i) της παρατήρησης

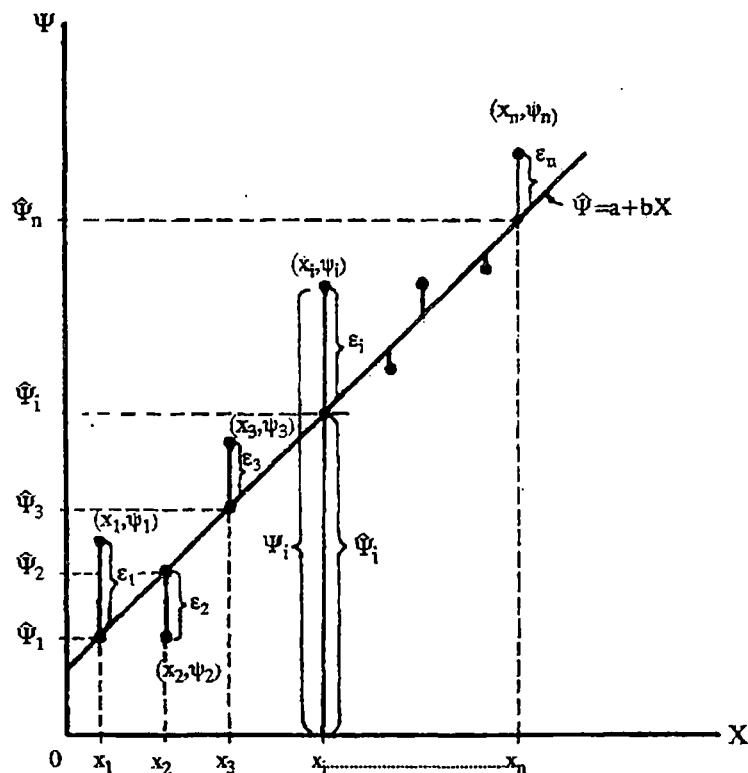
κατά τέτοιο τρόπο, ώστε το άθροισμα των καθέτων αποκλίσεων

$\Psi_i - \hat{\Psi}_i = \pm \varepsilon_i$ μεταξύ των τιμών της παρατήρησης ($= \Psi_i$) και των θεωρητικών τιμών

($= \hat{\Psi}_i$) να είναι μηδέν $\left[\sum (\Psi_i - \hat{\Psi}_i) = 0 \right]$ και το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων

$\sum (\Psi_i - \hat{\Psi}_i)^2 = \sum \varepsilon_i^2$ να είναι ελάχιστο.

Παλινδρόμηση της μεταβλητής Ψ πάνω στη μεταβλητή X



Διάγραμμα 2.7

Γνωρίζοντας ότι $\Psi_i = \alpha + bX_i$ η εξίσωση της ευθείας γραμμής, η οποία περνάει από τα σημεία (X_i, Ψ_i) της παρατηρήσεως, καθώς επίσης και το άθροισμα των τετραγώνων των

αποκλίσεων $\sum (\Psi_i - \hat{\Psi}_i)^2 = \sum \varepsilon_i^2$ να είναι ελάχιστο έχουμε:

$$\sum \varepsilon_i^2 = \sum (\Psi_i - \hat{\Psi}_i)^2 = \sum (\Psi_i - \alpha - bX_i)^2 = \text{ελάχιστο}$$

Για να βρούμε το ελάχιστο του παραπάνω αθροίσματος, βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης ως προς α και b και τις εξισώνουμε με το μηδέν.

Παραθέεται πιο κάτω πως προκύπτουν οι τρεις (3) τύποι του b ο οποίος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας παλινδρόμησης

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\hat{\Psi} = \alpha + bX_i$$

$\sum \varepsilon_i \rightarrow$ άθροισμα σφαλμάτων

Αν $\sum \varepsilon_i = 0$ τότε (επειδή το συνολικό άθροισμά των σφαλμάτων είναι μηδέν, θα πάρουμε το άθροισμά των τετραγώνων των σφαλμάτων)

$\sum (\Psi_i - \hat{\Psi}_i)^2$ παίρνω τα ελάχιστα των αποκλίσεων- διαφορών

$$\sum (\Psi_i - \alpha - bX_i)^2 \rightarrow \text{ελάχιστο}$$

$$\sum \varepsilon_i^2 \rightarrow \text{ελάχιστο}$$

$$\frac{d \sum \varepsilon_i^2}{d\alpha} = \frac{d \left[\sum (\Psi_i - \alpha - bX_i)^2 \right]}{d\alpha} =$$

$$= 2 \sum (\Psi_i - \alpha - bX_i) \frac{d(\Psi_i - \alpha - bX_i)}{d\alpha} =$$

$$= -2 \sum (\Psi_i - \alpha - bX_i) \quad (1)$$

$$\frac{d \sum \varepsilon_i^2}{db} = \frac{d \left[\sum (\Psi_i - \alpha - bX_i)^2 \right]}{db} =$$

$$= 2 \sum (\Psi_i - \alpha - bX_i) \frac{d(\Psi_i - \alpha - bX_i)}{db} =$$

$$= -2 \sum X_i (\Psi_i - \alpha - bX_i) \rightarrow \text{την μηδενίζουμε} \quad (2)$$

Παρακάτω θα διαιρέσουμε και τα δύο μέλη των σχέσεων (1), (2) με τον αριθμό-2.

Οπότε για τη σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 -2 \sum (\Psi_i - \alpha - bX_i) &= 0 \\
 \Rightarrow \sum (\Psi_i - \alpha - bX_i) &= 0 \\
 \Rightarrow \sum \Psi_i - n\alpha - b \sum X_i &= 0 \\
 \Rightarrow n\alpha + b \sum X_i &= \sum \Psi_i \quad (3)
 \end{aligned}$$

Για τη σχέση (2) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 -2 \sum X_i (\Psi_i - \alpha - bX_i) &= 0 \\
 \Rightarrow \sum X_i (\Psi_i - \alpha - bX_i) &= 0 \\
 \Rightarrow \sum (X_i \Psi_i - \alpha X_i - bX_i^2) &= 0 \\
 \Rightarrow \sum X_i \Psi_i - \alpha \sum X_i - b \sum X_i^2 &= 0 \\
 \Rightarrow \alpha \sum X_i + b \sum X_i^2 &= \sum X_i \Psi_i \quad (4)
 \end{aligned}$$

Οπότε από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 n\alpha + b \sum X_i &= \sum \Psi_i \quad (3) \\
 \alpha \sum X_i + b \sum X_i^2 &= \sum X_i \Psi_i \quad (4)
 \end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα ως προς b βρίσκουμε:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum \Psi_i \\ \sum X_i & \sum X_i \Psi_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum X_i \sum \Psi_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

Λύνοντας την εξίσωση $\sum \Psi_i = na + b \sum X_i$ ως προς α έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \sum \Psi_i &= na + b \sum X_i \\
 \Rightarrow \sum \Psi_i - b \sum X_i &= na \\
 \Rightarrow \frac{\sum \Psi_i - b \sum X_i}{n} &= \frac{n \cdot a}{n}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sum \Psi_i}{n} - b \frac{\sum X_i}{n} \quad , \text{όπου} \quad \frac{\sum \Psi_i}{n} = \bar{\Psi} \text{ και } \frac{\sum X_i}{n} = \bar{X}$$

$$\Rightarrow a = \bar{\Psi} - b\bar{X}$$

ΤΥΠΟΣ 2 ΤΟΥ b

$$b = \frac{\sum X_i \Psi_i - n \bar{X} \bar{\Psi}}{\sum X_i^2 - n \bar{X}^2} \quad (1)$$

Διαιρούμε με n και τους δύο όρους του κλάσματος (1) και έχουμε:

$$\Rightarrow b = \frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum X_i \sum \Psi_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\frac{n \sum X_i \Psi_i}{n} \cdot \frac{(\sum X_i)(\sum \Psi_i)}{n}}{\frac{n \sum X_i^2}{n} \cdot \frac{(\sum X_i)^2}{n}}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sum X_i \Psi_i - \frac{(\sum X_i)(\sum \Psi_i)}{n}}{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}} = \frac{\sum X_i - n \frac{\sum X_i}{n} \cdot \frac{\sum \Psi_i}{n}}{\sum X_i^2 - n \left(\frac{\sum X_i}{n} \right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum X_i \Psi_i - n \cdot \bar{X} \cdot \bar{\Psi}}{\sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}$$

ΤΥΠΟΣ 3 ΤΟΥ b

$$b = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(\Psi_i - \bar{\Psi})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε τον αριθμητή $\sum (X_i - \bar{X})(\Psi_i - \bar{\Psi})$ και κάνουμε πράξεις (παραγοντοποίηση και ανάλυση αθροισμάτων).

$$\begin{aligned} \sum (X_i - \bar{X})(\Psi_i - \bar{\Psi}) &= \sum (X_i \Psi_i - \bar{\Psi} X_i - \bar{X} \Psi_i + \bar{X} \cdot \bar{\Psi}) = \\ &= \sum X_i \Psi_i - \bar{\Psi} \sum X_i - \bar{X} \sum \Psi_i + n \cdot \bar{X} \cdot \bar{\Psi} = \end{aligned}$$

⇒ Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με n, οπότε έχουμε την παρακάτω σχέση :

$$= \sum X_i \Psi_i - n \cdot \bar{\Psi} \frac{\sum X_i}{n} - n \bar{X} \frac{\sum \Psi_i}{n} + n \cdot \bar{X} \cdot \bar{\Psi}$$

Επειδή $\frac{\sum X_i}{n} = \bar{X}$ και $\frac{\sum \Psi_i}{n} = \bar{\Psi}$

αντικαθιστούμε και έχουμε :

$$\begin{aligned} \sum X_i \Psi_i - n \cdot \bar{X} \cdot \bar{\Psi} - n \cdot \bar{X} \cdot \bar{\Psi} + n \cdot \bar{X} \cdot \bar{\Psi} = \\ \sum X_i \Psi_i - n \cdot \bar{X} \cdot \bar{\Psi} \quad (\text{Σχέση 1}) \end{aligned}$$

ο παρανομαστής είναι ταυτότητα, οπότε γίνεται ανάλυση της ταυτότητας.

Αρα έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum (X_i - \bar{X})^2 &\Rightarrow \sum (X_i^2 - 2\bar{X} \cdot X_i + \bar{X}^2) = \quad (\text{ταυτότητα}) \\ &= \sum X_i^2 - 2\bar{X} \sum X_i + n \cdot \bar{X}^2 = \\ &= \sum X_i^2 - 2n \cdot \bar{X} \frac{\sum X_i}{n} + n \cdot \bar{X}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum X_i^2 - 2n \cdot \bar{X}^2 + n \cdot \bar{X}^2 \\ &= \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2 \quad (\text{Σχέση 2}) \end{aligned}$$

Από σχέση 1 και 2 προκύπτει ο τρίτος (3) τύπος του b

$$\Rightarrow b = \frac{\sum X_i \Psi_i - n \cdot \bar{X} \cdot \bar{\Psi}}{\sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}$$

Η διαδικασία προσαρμογής που παρουσιάστηκε παραπάνω περιγράφεται ως η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων και είναι αναμφίβολα η ευρύτερα χρησιμοποιούμενη τεχνική στην στατιστική.

B.8.1. ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ X ΠΑΝΩ ΣΤΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ Ψ

Αν υποθέσουμε ότι η μεταβλητή X είναι η εξαρτημένη μεταβλητή και η Ψ η ανεξάρτητη μεταβλητή, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε την παρακάτω εξίσωση παλινδρόμησης:

$$\hat{X}_i = \hat{\alpha} + b' \Psi_i$$

Οι σταθερές α' και b' προσδιορίζονται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, βάσει της οποίας προκύπτει το παρακάτω σύστημα κανονικών εξισώσεων:

$$\sum X_i = n\alpha' + b' \sum \Psi_i$$

$$\sum X_i \Psi_i = \alpha' \sum \Psi_i + b' \sum \Psi_i^2$$

Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων βρίσκουμε:

$$b' = \frac{n \sum X_i \Psi_i - (\sum X_i)(\sum \Psi_i)}{n \sum \Psi_i^2 - (\sum \Psi_i)^2}$$

$$\text{και } \alpha' = \bar{X} - b' \bar{\Psi}$$

B.8.2.ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ Ψ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ X

Ελαστικότητα μιας συνάρτησης $\Psi = f(X)$ ονομάζουμε το γινόμενο της παραγώγου

$\frac{D\Psi}{DX}$ της συνάρτησης επί το λόγο $\frac{X}{\Psi}$. Αν συμβολίσουμε με $E_{\Psi X}$ την ελαστικότητα της Ψ ως

$$\text{προς τη } X, \text{ σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό είναι } E_{\Psi X} = \frac{d\Psi}{dx} \cdot \frac{x}{\Psi} = \frac{d\Psi}{\Psi} \cdot \frac{x}{dx} = \frac{\frac{d\Psi}{\Psi}}{\frac{dx}{x}}.$$

Στην περίπτωση της απλής γραμμικής παλινδρόμησης $\hat{\Psi}_i = a + bX_i$, ο συντελεστής ελαστικότητας της εξαρτημένης μεταβλητής Ψ ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή X προκύπτει ως έχει :

$$E_{\Psi X} = \frac{d\hat{\Psi}}{dX} \cdot \frac{X_i}{\hat{\Psi}_i} = b \cdot \frac{X}{a + bX}$$

Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι η τιμή του συντελεστή

ελαστικότητας εξαρτάται και από τη σταθερά b και από τις διάφορες τιμές των X_i και Ψ_i . Το μειονέκτημα του συντελεστή b είναι ότι δεν επιτρέπει συγκρίσεις μεταξύ εξισώσεων παλινδρόμησης που οι μεταβλητές εκφράζονται σε διαφορετική μονάδα μέτρησης. Ένα άλλο μειονέκτημα είναι ότι δεν εκφράζει την ποσοστιαία μεταβολή της Ψ που αντιστοιχεί σε μια ποσοστιαία μεταβολή της X . δηλαδή, δεν περιγράφει την σχέση μεταξύ των <<σχετικών>> μεταβολών των δύο μεταβλητών. Στα οικονομικά μεγέθη οι μεταβολές (είτε είναι γνωστές ή είναι υπό διερεύνηση) εκφράζονται ως ποσοστά (ποσοστιαία αύξηση τιμών, ποσοστιαία μεταβολή συναλλαγματικών ισοτιμιών, ποσοστιαία αύξηση μισθών κλπ). Έτσι, σε μια σχέση μεταξύ κόστους παραγωγής ενός προϊόντος και του κόστους εργασίας, η ερώτηση είναι <<ποια η ποσοστιαία αύξηση του κόστους παραγωγής εάν το ωρομίσθιο αυξηθεί κατά 8%>> (που διαφέρει από την ερώτηση <<ποιο θα είναι το συνολικό κόστος του προϊόντος εάν το ωρομίσθιο ανέλθει στα 9,5 Ευρώ>>).

Συνεπώς η τιμή του $E_{\Psi X}$ μεταβάλλεται σε κάθε σημείο της ευθείας παλινδρόμησης. Συνήθως υπολογίζουμε ένα συντελεστή ελαστικότητας ο οποίος αντιστοιχεί στις μέσες τιμές των μεταβλητών X_i και Ψ_i και υπολογίζονται με τον τύπο: $E_{\Psi \bar{X}} = b \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{\Psi}}$. Ο

συντελεστής ελαστικότητας της εξαρτημένης μεταβλητής Ψ ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή X προσδιορίζει την ποσοστιαία μεταβλητή, η οποία προκαλείται στην μεταβλητή Ψ για κάθε αύξηση (μείωση) της μεταβλητής X κατά 1%.

B.9 ΤΥΠΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Μετά τον προσδιορισμό της ευθείας των ελαχίστων τετραγώνων

$\hat{\Psi}_i = a + bX_i$, τίθεται το ερώτημα : πόσο καλά η ευθεία αυτή περιγράφει το βαθμό εξάρτησης ανάμεσα στις μεταβλητές X και Ψ .

Η εξίσωση παλινδρόμησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν στατιστικό όργανο πρόβλεψης των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής με βάση τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Η προγνωστική ικανότητα της εξίσωσης παλινδρόμησης θα εξαρτηθεί από το βαθμό διασποράς (συγκέντρωση ή διασκόρπιση) των εμπειρικών δεδομένων (δεδομένων της παρατήρησης) γύρω από τη γραμμή παλινδρόμησης. Δηλαδή αν οι τιμές Ψ_i της παρατήρησης βρίσκονται πολύ κοντά στη γραμμή παλινδρόμησης, τότε η εξίσωση παλινδρόμησης θα προσαρμόζεται πολύ καλά στα εμπειρικά δεδομένα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν αξιόπιστο όργανο πρόβλεψης των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής. Αντίθετα, αν οι τιμές Ψ_i της παρατήρησης απέχουν πολύ από τη γραμμή παλινδρόμησης, τότε μειώνεται η αξιοπιστία και η προγνωστική ικανότητα της εξίσωσης παλινδρόμησης.

Ο συντελεστής παλινδρόμησης b είναι εκείνος που <<επωμίζεται>> όλη την ευθύνη της περιγραφής της σχέσης εξάρτησης της Ψ από την X . Όλη η επιτυχία της ανάλυσης παλινδρόμησης εξαρτάται από την <<επιτυχία>> εκτίμηση του συντελεστή b . Με τον όρο <<επιτυχία>> στην στατιστική ορολογία νοείται την εκτίμηση που είναι αμερόληπτη (ιδιότητα που εξασφαλίζεται από την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων) και αποτελεσματική, δηλαδή να έχει μικρό δειγματοληπτικό σφάλμα και αυτό συνεπάγεται μεγάλη πιθανότητα να βρίσκεται κοντά στην πραγματική τιμή του πληθυσμού. Επομένως, τόσο ο έλεγχος της σημαντικότητας του b όσο και η εκτίμηση του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι απαραίτητες ενέργειες πριν χρησιμοποιηθεί η εξίσωση παλινδρόμησης. Για παράδειγμα για προβλέψεις που θα αποτελέσουν την βασική πληροφόρηση σε διαδικασία λήψης αποφάσεων.

Η μέση απόκλιση μεταξύ της πραγματικής και της εκτιμώμενης τιμής Ψ , καλείται τυπικό σφάλμα της εκτίμησης (standard error of the estimate), συμβολίζεται με $S_{\Psi X}$. Μεταξύ των τιμών της παρατήρησης ($=\Psi_i$) και των θεωρητικών τιμών ($=\hat{\Psi}_i$) συνήθως υπάρχουν οι αποκλίσεις (διαφορές) $\Psi_i - \hat{\Psi}_i$ (βλέπε Διάγραμμα 2.7), οι οποίες είναι θετικές, αρνητικές ή μηδέν. Αν τις αποκλίσεις αυτές τις υψώσουμε στο τετράγωνο, τις αθροίσουμε, το άθροισμα τους διαιρέσουμε διά $n-2$ και εξάγουμε την τετραγωνική ρίζα τότε προκύπτει η παρακάτω στατιστική παράμετρος :

$$S_{\Psi X} = \sqrt{\frac{\sum (\Psi_i - \hat{\Psi}_i)^2}{n-2}}$$

η οποία παρέχει το τυπικό σφάλμα εκτίμησης της εξαρτημένης μεταβλητής. Το άθροισμα $\sum (\Psi_i - \hat{\Psi}_i)^2$ που διαιρείται με $(n-2)$, και όχι με n) εκφράζει τους βαθμούς ελευθερίας (degrees of freedom) της παλινδρόμησης και φανερώνει ότι χάνονται δύο βαθμοί

ελευθερίας, δηλαδή όσοι είναι οι συντελεστές a και b που εκτιμώνται στην απλή γραμμική παλινδρόμηση.

Επειδή ο υπολογισμός του αθροίσματος $\sum (\Psi_i - \hat{\Psi}_i)^2$ προϋποθέτει τον υπολογισμό των θεωρητικών τιμών ($= \hat{\Psi}_i$), γι' αυτό στις πρακτικές εφαρμογές είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται ο ισοδύναμος τύπος :

$$S_{\Psi X} = \sqrt{\frac{\sum \Psi_i^2 - a \sum \Psi_i - b \sum X_i \Psi_i}{n-2}}$$

Το $S_{\Psi X}$ δείχνει την κατά μέσο όρο διαφορά κάθε τιμής Ψ_i από τη γραμμή παλινδρόμησης και εκφράζεται στις ίδιες μονάδες μέτρησης που εκφράζεται και η μεταβλητή Ψ_i . Όσο η τιμή του $S_{\Psi X}$ τείνει προς το μηδέν, τόσο καλύτερα η εξίσωση (γραμμή) παλινδρόμησης προσαρμόζεται στα δεδομένα της παρατήρησης.

Το τετράγωνο του τυπικού σφάλματος ($S^2_{\Psi X}$), ονομάζεται **διακύμανση** των δεδομένων της παρατήρησης γύρω από τη γραμμή παλινδρόμησης. Ακόμα ισχύει ότι $S = \sqrt{S^2}$, δηλαδή το τυπικό σφάλμα είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης.

Η διακύμανση (και το τυπικό σφάλμα εκτίμησης) γύρω από τη γραμμή παλινδρόμησης μπορεί να υπολογιστεί και με τον τύπο :

$$S^2_{\Psi X} = \frac{\sum (\Psi_i - \bar{\Psi})^2 - b^2 \sum (X_i - \bar{X})^2}{n-2}$$

$$\text{Όπου : } \sum (\Psi_i - \bar{\Psi})^2 = \sum \Psi_i^2 - \frac{(\sum \Psi_i)^2}{n} \text{ και } \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}$$

Επομένως, προκύπτει ο παρακάτω τύπος :

$$S_{\Psi X} = \sqrt{\frac{\sum \Psi_i^2 - \frac{(\sum \Psi_i)^2}{n} - b^2 \cdot \frac{(\sum X_i)^2}{n}}{n-2}}$$

B.10.1 ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

Μια άλλη μέθοδος σπουδής της εξάρτησης μιας μεταβλητής Ψ από μια άλλη μεταβλητή X , ονομάζεται **Συσχέτιση** (Correlation). Ο κυριότερος σκοπός της συσχέτισης είναι να μετρήσει το **βαθμό** (την ένταση) της εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών Ψ και X . Στην Παλινδρόμηση εξετάζεται αν υπάρχει σχέση εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών Ψ και X , η οποία εκφράζεται με την εξίσωση παλινδρόμησης ώστε να μπορούμε να προβλέψουμε τις τιμές της μεταβλητής Ψ με βάση τις τιμές της άλλης μεταβλητής X .

Το κεντρικό πρόβλημα της Συσχέτισης είναι να βρεθεί ένα κατάλληλο δείκτη (συντελεστή), ο οποίος να δείχνει αν η σχέση εξάρτησης (συσχέτιση) μεταξύ των μεταβλητών Ψ και X είναι έντονη, μέτρια, ασθενής ή ανύπαρκτη. Ο **ποσοτικός προσδιορισμός του βαθμού** (της έντασης) της εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών Ψ και X γίνεται με μια στατιστική παράμετρο, η οποία ονομάζεται **Συντελεστής Συσχέτισης** (Correlation Coefficient) και συμβολίζεται με το r .

B.10.Π ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

Για να μετρήσουμε την **ένταση** (το βαθμό) της εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών Ψ και X (ή X και Ψ), εισάγουμε ένα συντελεστή ανεξάρτητο των μονάδων μέτρησης των μεταβλητών Ψ και X , ο οποίος ονομάζεται Συντελεστής **Συσχέτισης** ($=r$) και ορίζεται ως μέσος γεωμετρικός των δύο συντελεστών παλινδρόμησης b και b' δηλαδή :

$$r = \sqrt{b \cdot b'}$$

Γνωρίζοντας ότι :

$$b = \frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum (X_i) \sum (\Psi_i)}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \quad \text{και} \quad b' = \frac{n \sum X_i - \sum (X_i) \sum (\Psi_i)}{n \sum \Psi_i^2 - (\sum \Psi_i)^2}$$

Αν αντικαταστήσουμε το b και το b' στη σχέση $r = \sqrt{b \cdot b'}$, κάνοντας και τις πράξεις προκύπτει: (όπου r = εκτίμηση του απλού συντελεστή συσχέτισης

n = μέγεθος δείγματος (ζεύγη τιμών)

X_i = τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής

\bar{X} = μέσος αριθμητικός της X_i

Ψ_i = τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής

$\bar{\Psi}$ = μέσος αριθμητικός της Ψ_i).

$$r = \sqrt{\frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum X_i \sum \Psi_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \cdot \frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum X_i \sum \Psi_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum X_i \sum \Psi_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}} \cdot \sqrt{\frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum X_i \sum \Psi_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(n \sum X_i \Psi_i - \sum X_i \cdot \sum \Psi_i)^2}{[n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2] \cdot [n \sum \Psi_i^2 - (\sum \Psi_i)^2]}}$$

Απλοποιείται η ρίζα του αριθμητή με το τετράγωνο , οπότε η ρίζα παραμένει μόνο στον
 παρανομαστή και χωρίζεται στα δύο γινόμενα:

$$= \frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum X_i \sum \Psi_i}{\sqrt{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \cdot \sqrt{n \sum \Psi_i^2 - (\sum \Psi_i)^2}}$$

Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται όταν διαθέτουμε τα αρχικά δεδομένα των μεταβλητών X
 και Ψ. Στην αντίθετη περίπτωση χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$b = \frac{\sum (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})}{\sum (X - \bar{X})^2} \quad \text{και} \quad b' = \frac{\sum (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})}{\sum (\Psi - \bar{\Psi})^2}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των b και b' στη σχέση $r = \sqrt{b \cdot b'}$ προκύπτει ο ακόλουθος τύπος:

$$r = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})(\Psi_i - \bar{\Psi})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \cdot \frac{\sum (X_i - \bar{X})(\Psi_i - \bar{\Psi})}{\sum (\Psi_i - \bar{\Psi})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{[\sum (X_i - \bar{X})(\Psi_i - \bar{\Psi})]^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2 \cdot \sum (\Psi_i - \bar{\Psi})^2}}$$

Απλοποιείται η ρίζα του αριθμητή με το τετράγωνο, οπότε η ρίζα παραμένει μόνο στον παρονομαστή και χωρίζεται στα δύο γινόμενα:

$$= \frac{\sum (X_i - \bar{X})(\Psi_i - \bar{\Psi})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum (\Psi_i - \bar{\Psi})^2}}$$

$$= \frac{Cov(X_i \cdot \Psi_i)}{\sqrt{Var(X_i)} \cdot \sqrt{Var(\Psi_i)}}$$

Η έκφραση $\sum (X_i - \bar{X})(\Psi_i - \bar{\Psi}) = Cov(X_i \cdot \Psi_i)$ ονομάζεται **Συνδιακύμανση** (Covariance) των μεταβλητών X και Ψ, ενώ με τα Var (X_i) και Var (Ψ_i) συμβολίζουμε αντίστοιχα τις διακυμάνσεις (Variance) των X και Ψ. Ο τύπος :

$$\frac{Cov(X_i \cdot \Psi_i)}{\sqrt{Var(X_i)} \cdot \sqrt{Var(\Psi_i)}}$$

ορίζει το συντελεστή συσχέτισης του K.Pearson.

Επειδή $\sum (X_i - \bar{X})^2 = (n-1)S^2_x$ και $\sum (\Psi_i - \bar{\Psi})^2 = (n-1)S^2_\Psi$ και

$$\sum (X_i - \bar{X})(\Psi_i - \bar{\Psi}) = \sum X_i \Psi_i - n\bar{X}\bar{\Psi} \text{ αντικαθιστώντας στη σχέση: } \frac{Cov(X_i \cdot \Psi_i)}{\sqrt{Var(X_i)} \cdot \sqrt{Var(\Psi_i)}}$$

βρίσκουμε τον ακόλουθο τύπο: $r = \sqrt{\frac{\sum X_i \Psi_i - n\bar{X} \cdot \bar{\Psi}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2} \cdot \frac{\sum X_i \Psi_i - n\bar{X} \cdot \bar{\Psi}}{\sum \Psi_i^2 - n\bar{\Psi}^2}}$

$$= \frac{(\sum X_i \Psi_i - n\bar{X} \cdot \bar{\Psi})^2}{(\sum X_i^2 - n\bar{X}^2)(\sum \Psi_i^2 - n\bar{\Psi}^2)}$$

$$= \frac{\sum X_i \Psi_i - n\bar{X} \cdot \bar{\Psi}}{\sqrt{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2} \cdot \sqrt{\sum \Psi_i^2 - n\bar{\Psi}^2}}$$

$$= \frac{\sum X_i \Psi_i - n\bar{X} \cdot \bar{\Psi}}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum (\Psi_i - \bar{\Psi})^2}}$$

$$= \frac{\sum X_i \Psi_i - n\bar{X} \cdot \bar{\Psi}}{\sqrt{n \cdot S^2 \cdot X} \cdot \sqrt{n \cdot S^2 \cdot \Psi}}$$

$$= \frac{\sum X_i \Psi_i - n\bar{X} \cdot \bar{\Psi}}{\sqrt{n^2 \cdot S^2 \cdot X \cdot S^2 \cdot \Psi}}$$

$$= \frac{\sum X_i \Psi_i - n\bar{X} \cdot \bar{\Psi}}{n \cdot SX \cdot S\Psi}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης $\frac{\sum X_i \Psi_i - n\bar{X} \cdot \bar{\Psi}}{n \cdot SX \cdot S\Psi}$ επί $\frac{S_\Psi}{S_X}$

τότε βρίσκουμε :

$$r \cdot \frac{S_\Psi}{S_X} = \frac{\sum X_i \Psi_i - n\bar{X} \cdot \bar{\Psi}}{n \cdot S_X \cdot S_\Psi} \cdot \frac{S_\Psi}{S_X}$$

$$= \frac{\sum X_i \Psi_i - n\bar{X} \cdot \bar{\Psi}}{n \cdot S^2 \cdot X}$$

$$= \frac{\sum (X_i - \bar{X})(\Psi_i - \bar{\Psi})}{\sum (X_i - \bar{X})} = b$$

$$= \frac{S_X}{S_\Psi} = b'$$

Οι τιμές των α και α' βρίσκονται από τους τύπους:

$$\alpha = \bar{\Psi} - r \frac{S_{\Psi}}{S_X} \bar{X}, \quad \alpha' = \bar{X} - r \frac{S_X}{S_{\Psi}} \bar{\Psi}$$

Ο συντελεστής συσχέτισης (r) μετράει την ένταση της εξάρτησης των μεταβλητών X και Ψ , με την απαραίτητη προϋπόθεση ότι η σχέση εξάρτησης είναι γραμμικής μορφής. Στην πράξη πρώτα γίνεται η γραφική παράσταση του σμήνους των σημείων (διάγραμμα διασποράς). Έτσι έχουμε εποπτική εικόνα του προβλήματος. Συνεπώς, ο r δεν είναι κατάλληλο στατιστικό μέτρο συσχέτισης όταν η σχέση εξάρτησης είναι καμπυλόγραμμη.

Ο συντελεστής συσχέτισης r έχει τις ακόλουθες χαρακτηριστικές ιδιότητες:

A) είναι ένα στατιστικό μέτρο ανεξάρτητων των μονάδων μέτρησης των μεταβλητών X και Ψ . Δηλαδή, αν οι τιμές των μεταβλητών X και Ψ πολλαπλασιάσουν ή διαιρεθούν με μια σταθερή ποσότητα λ , τότε ο r παραμένει αμετάβλητος (είναι καθαρός αριθμός).

B) ότι πρόσημο (+ ή -) έχει ο συντελεστής παλινδρόμησης b το ίδιο πρόσημο θα έχει και ο συντελεστής συσχέτισης (r)

Γ) η τιμή του συντελεστή συσχέτισης κυμαίνεται ανάμεσα στο -1 και στο +1. Δηλαδή:

$$-1 \leq r \leq +1$$

Αν ο συντελεστής συσχέτισης είναι **θετικός** ($r > 0$), τότε η **συσχέτιση** μεταξύ των μεταβλητών Ψ και X είναι **θετική**, δηλαδή σε κάθε **αύξηση** (μείωση) της μιας μεταβλητής αντιστοιχεί **αύξηση** (μείωση) και της άλλης μεταβλητής. Για παράδειγμα, αύξηση του εισοδήματος ($=X$) συνεπάγεται αύξηση της δαπάνης για ψυχαγωγία ($=\Psi$).

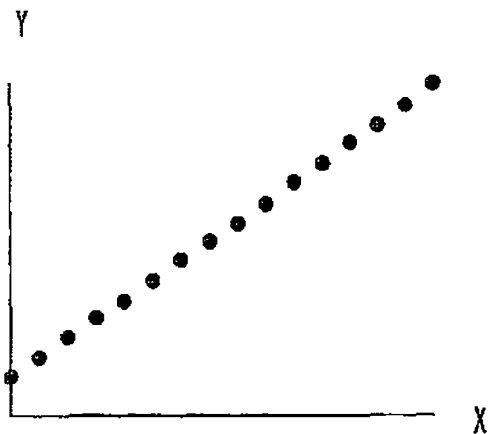
Αν ο συντελεστής συσχέτισης είναι **αρνητικός** ($r < 0$), τότε η συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών Ψ και X είναι **αρνητική**, δηλαδή σε κάθε αύξηση της μιας μεταβλητής αντιστοιχεί **μείωση** της άλλης μεταβλητής και αντίστροφα. Για παράδειγμα αύξηση της τιμής ($=X$) ενός αγαθού συνεπάγεται μείωση της ζητούμενης ποσότητας του αγαθού και αντίστροφα.

Αν $r = +1$, τότε έχουμε **τέλεια θετική συσχέτιση**, δηλαδή σε κάθε μεταβολή της μιας μεταβλητής κατά ορισμένη έννοια ακολουθεί ανάλογη μεταβολή και της άλλης μεταβλητής κατά την ίδια έννοια.

Αν $r = -1$, τότε έχουμε **τέλεια αρνητική συσχέτιση**, δηλαδή σε κάθε μεταβολή της μιας μεταβλητής κατά ορισμένη έννοια ακολουθεί ανάλογη μεταβολή κατά την αντίθετη έννοια.

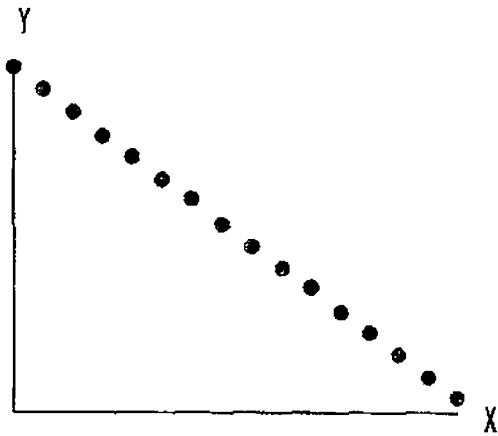
Αν $r = 0$, τότε οι μεταβλητές X και Y είναι **ασυσχέτιστες**, δηλαδή οι τιμές της μεταβλητής Y δεν επηρεάζονται από τις μεταβολές της μεταβλητής X .

Στα παρακάτω Διαγράμματα 2.8.α, 2.8.β, 2.8.γ, 2.8.δ, 2.8.ε, 2.8.στ, 2.8.ζ, 2.8.η και 2.8.θ απεικονίζονται διάφορα διαγράμματα διασποράς, τα οποία δείχνουν τους διάφορους βαθμούς συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών Y και X .



(α) Τέλεια θετική συσχέτιση ($r = +1,0$)

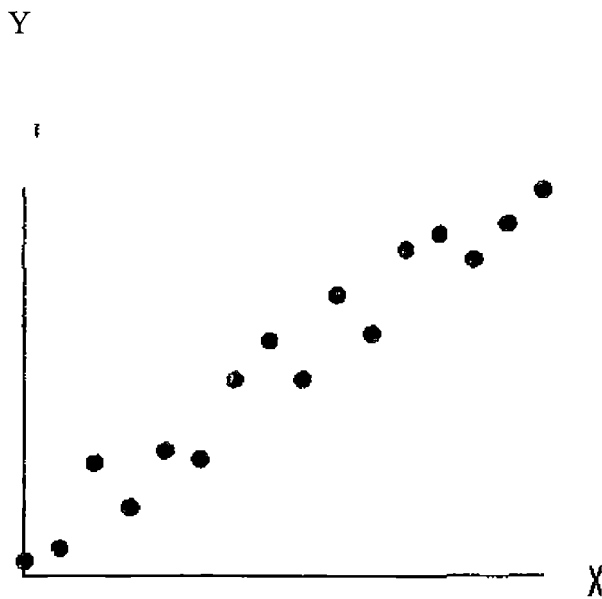
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.8.α



(β) Τέλεια αρνητική συσχέτιση ($r = -1,0$)

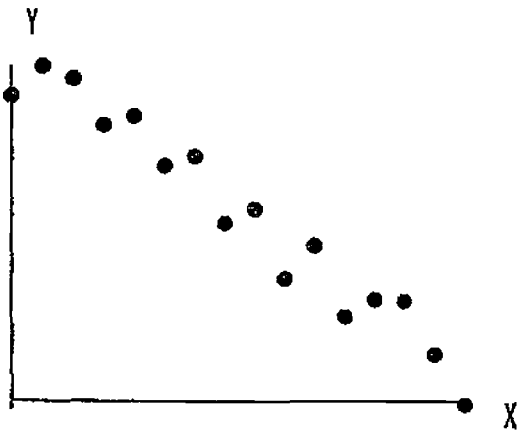
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.8.β

Τα Διαγράμματα διασποράς (α) και (β) του διαγράμματος 2.8 δείχνουν τέλεια θετική και αρνητική συσχέτιση, διότι τα σημεία βρίσκονται σε μια ευθεία γραμμή.



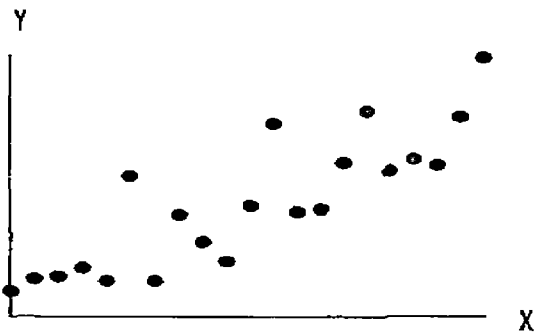
(γ) Εντονη θετική συσχέτιση ($r = +0,9$)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.8.γ



(δ) Έντονη αρνητική συσχέτιση ($r = -0,9$)
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.8.δ

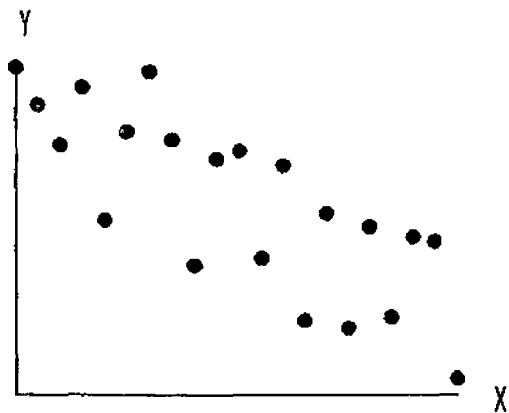
Τα Διαγράμματα διασποράς (γ) και (δ) του διαγράμματος 2.8 δείχνουν έντονη θετική και έντονη αρνητική συσχέτιση αντίστοιχα, διότι τα σημεία βρίσκονται πολύ κοντά σε μια ευθεία γραμμή.



(ε) Ασθενής θετική συσχέτιση ($r = +0,7$)

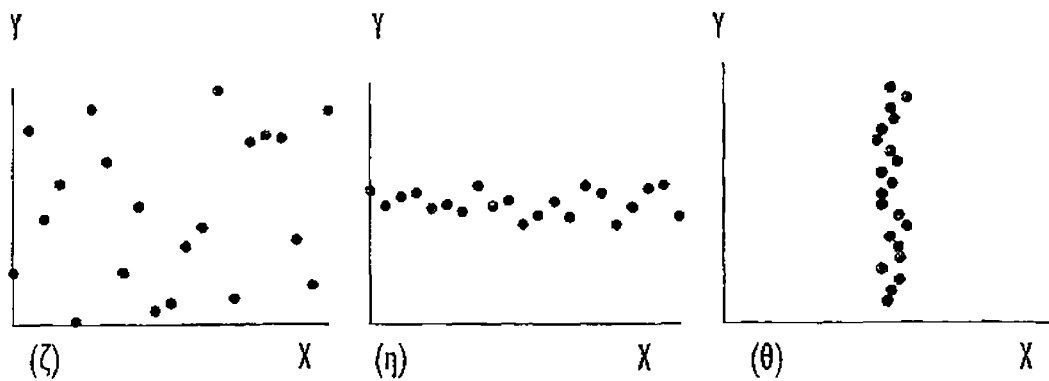
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.8.ε

Τα Διαγράμματα διασποράς (ε) και (στ) του διαγράμματος 2.8 δείχνουν ασθενής θετική και ασθενής αρνητική συσχέτιση αντίστοιχα.



(στ) Ασθενής αρνητική συσχέτιση ($r = -0,7$)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.8.στ



Μηδενική συσχέτιση ($r = 0$)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ 2.8.ζ, 2.8.η, 2.8.θ.

Το Διάγραμμα διασποράς (ζ) του διαγράμματος 2.8 δείχνει ότι οι μεταβλητές X και Ψ μεταβάλλονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Αυτό προκύπτει από τη συμπεριφορά των σημείων που είναι διάσπαρτα σε όλες τις περιοχές που καλύπτουν οι δύο άξονες χωρίς να παρουσιάζουν καμία συστηματικότητα. Δηλαδή οι μεταβολές Ψ και X είναι ασυσχέτιστες. Άρα μεταξύ Ψ_i και X_i υπάρχει απόκλιση.

Μια άλλη περίπτωση ανεξαρτησίας είναι το Διάγραμμα διασποράς (η) του παραπάνω διαγράμματος. Στην περίπτωση αυτή, ενώ η X καλύπτει ένα εύρος τιμών, η Ψ παραμένει σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητή X δεν έχει καμία επίδραση στη μεταβλητή Ψ .

Τέλος, έχουμε την περίπτωση του Διαγράμματος διασποράς (θ). Εδώ συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο από αυτό που υπάρχει στο Διάγραμμα διασποράς (η). Η μεταβλητή Ψ μεταβάλλεται, ενώ η X παραμένει, σταθερή. Δηλαδή, η μεταβλητή Ψ μεταβάλλεται ανεξάρτητα από τη μεταβλητή X .

Κρίθηκε σκόπιμο να παρατεθεί στο σημείο αυτό ένα παράδειγμα, ώστε να γίνει κατανοητό, το πως οι επιχειρήσεις χρησιμοποιούν το συντελεστή συσχέτισης, ώστε να λάβουν τις σωστές αποφάσεις στα κρίσιμα προβλήματα-ερωτήματα που απασχολούν κυρίως το διοικητικό συμβούλιο της εταιρίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το διοικητικό συμβούλιο μιας ασφαλιστικής εταιρίας προβληματίζεται αν θα πρέπει να αυξήσει τις δαπάνες διαφήμισης ή να προσλάβει νέους πωλητές. Η απάντηση θα εξαρτηθεί από ποια σχέση είναι εντονότερη. Οι σχέση μεταξύ δαπανών διαφήμισης και πωλήσεων ή η σχέση μεταξύ αριθμού πωλητών και πωλήσεων. Η εταιρία ιδρύθηκε το 1984 και άρχισε να λειτουργεί το 1985. ο πίνακας 2.1 δείχνει την εξέλιξη των πωλήσεων,

των δαπανών για διαφήμιση και του αριθμού των πωλητών κατά την περίοδο 1985 με 2000. Ο πιο απλός τρόπος για να διαπιστώσουμε αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών είναι η κατασκευή του **διαγράμματος διασποράς**. Η κατασκευή του διαγράμματος είναι απλή. Βασίζεται σε δύο ορθογώνιους άξονες που αντιστοιχούν στις δύο μεταβλητές: της **εξαρτημένης μεταβλητής**, που συμβολίζεται με **Ψ** , και της **ανεξάρτητης μεταβλητής** που συμβολίζεται με **X** . Για κάθε ζεύγος τιμών (X_i, Ψ_i) αντιστοιχεί και ένα σημείο που συμβολίζεται με μια κουκίδα, σταυρό ή κάποιο άλλο σύμβολο. Η **ανεξάρτητη** (X) είναι η μεταβλητή που επιδρά στην **εξαρτημένη** μεταβλητή (Ψ), προκαλεί τις μεταβολές της Ψ , δηλαδή εξετάζουμε τη μεταβλητικότητα που παρουσιάζει η Ψ . Έτσι, στο παράδειγμά μας οι πωλήσεις είναι η εξαρτημένη μεταβλητή Ψ , και ως ανεξάρτητες θεωρούνται η διαφήμιση και ο αριθμός των πωλητών.

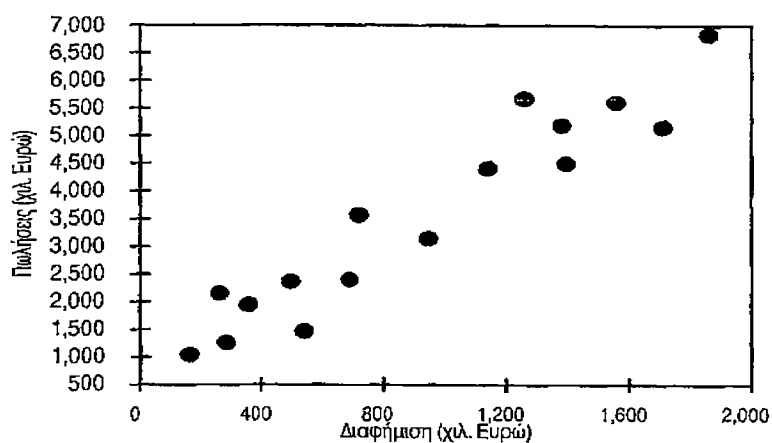
Το διάγραμμα μεταξύ των πωλήσεων και διαφήμισης δίνεται στο διάγραμμα 2.9. Είναι εμφανής η σχέση που υπάρχει μεταξύ των δύο μεταβλητών. Όσο αυξάνουν οι δαπάνες για διαφήμιση τόσο αυξάνουν και οι πωλήσεις. Επίσης, οι πωλήσεις μεταβάλλονται συστηματικά γύρω από μια ευθεία γραμμή. Έτσι, παρατηρούμε μία ευθύγραμμη **θετική** συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών X και Ψ . Η συσχέτιση καλείται θετική, διότι όσο αυξάνει η X , αυξάνει και η Ψ και αντίστροφα, η μείωση της X προκαλεί μείωση της Ψ . Ενώ, στην αντίθετη περίπτωση, που η αύξηση της X προκαλεί μείωση της Ψ (ή μείωση της X συνοδεύεται από αύξηση της Ψ), η συσχέτιση είναι **αρνητική**. Το διάγραμμα 2.8. που προηγείται του παραδείγματος δίνει τα διαγράμματα διασποράς για διάφορα είδη συσχετίσεων.

Ετος	Πωλήσεις (χιλ. €)	Διαφήμιση (χιλ. €)	Πωλητές (άτομα)	Ετος	Πωλήσεις (χιλ. €)	Διαφήμιση (χιλ. €)	Πωλητές (άτομα)
1985	1.050	162	32	1993	3.570	720	98
1986	1.260	285	47	1994	4.410	1.140	43
1987	1.470	540	23	1995	4.500	1.395	76
1988	2.160	261	68	1996	5.610	1.560	89
1989	1.950	360	32	1997	5.190	1.380	108
1990	2.400	690	17	1998	5.670	1.260	76
1991	2.370	495	58	1999	5.160	1.710	65
1992	3.150	948	75	2000	6.840	1.860	93

Πίνακας 2.1

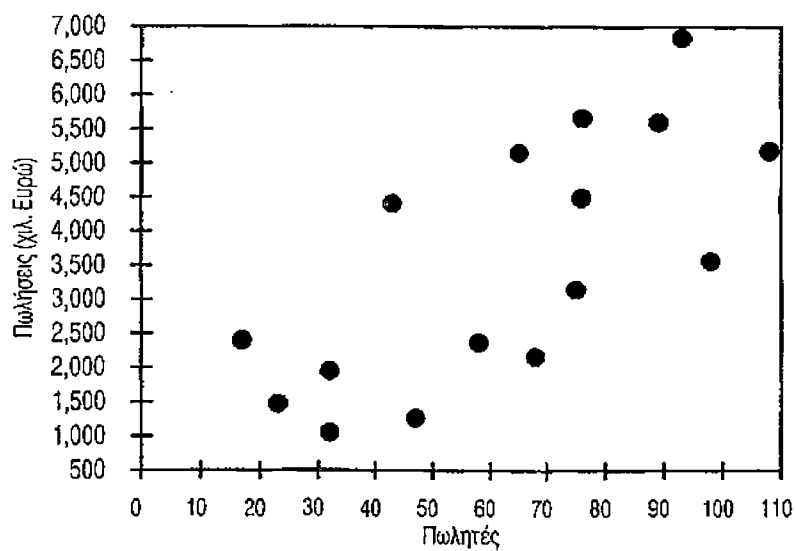
Πωλήσεις, Δαπάνες Διαφήμισης και Αριθμός Πωλητών

Το Διάγραμμα 2.10 δείχνει τη συσχέτιση μεταξύ των πωλήσεων και του αριθμού πωλητών. Παρατηρούμε ότι στην πρώτη περίπτωση (Διάγραμμα 2.9) τα σημεία είναι αρκετά συγκεντρωμένα γύρω από μία νοητή ευθεία που διέρχεται ανάμεσα τους. Ενώ στο Διάγραμμα 2.10 (διάγραμμα διασποράς πωλήσεων και πωλητών) παρατηρείται μεγαλύτερη, σε σχέση με την πρώτη περίπτωση, διασπορά των σημείων. Αυτό σημαίνει ότι οι πωλήσεις συσχετίζονται εντονότερα με τη διαφήμιση παρά με τον αριθμό των πωλητών. Έτσι, μπορούμε να αξιολογούμε την ένταση της συσχέτισης με βάση το διάγραμμα διασποράς. Όσο πιο συγκεντρωμένα είναι τα σημεία γύρω από μία ευθεία γραμμή τόσο πιο δυνατή είναι η σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών. Όπως φαίνεται και στο Διάγραμμα 2.8, εάν τα σημεία ευρίσκονται σε μία ευθεία γραμμή έχουμε τέλεια συσχέτιση (περίπτωση α και β), ενώ στις περιπτώσεις ζ, η και θ οι μεταβλητές X και Y δεν συσχετίζονται (δεν υπάρχει γραμμική σχέση εξάρτησης, και η μία μεταβάλλεται ανεξάρτητα από την άλλη).



Διάγραμμα 2.9

Διάγραμμα Διασποράς Μεταξύ Πωλήσεων και Διαφήμισης



Διάγραμμα 2.10

Διάγραμμα Διασποράς Μεταξύ Πωλήσεων και Αριθμού Πωλητών

B.11. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ

Ένα άλλο κριτήριο που χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση της ερμηνευτικής ικανότητας ενός γραμμικού υποδείγματος είναι ο **συντελεστής προσδιορισμού** (ή προσαρμογής) (coefficient of determination) που συμβολίζεται με r^2 . Ο συντελεστής αυτός δεν μας δείχνει μόνο το συνδετικό κρίκο μεταξύ παλινδρόμησης και συσχέτισης, αλλά θα δώσει μια κατάλληλη ερμηνεία της τιμής του συντελεστή συσχέτισης.

Για την καλύτερη κατανόηση και τη θεωρητική θεμελίωση του τρόπου υπολογισμού του Συντελεστή Προσδιορισμού, παραθέτουμε το Διάγραμμα 2.11. Στο Διάγραμμα 2.11 είναι χαραγμένες οι γραμμές παλινδρόμησης

$$\hat{\Psi}_i = \alpha + bX_i$$

και η γραμμή της μέσης τιμής ($\bar{\Psi}$) της μεταβλητής Ψ_i . Για μια μεμονωμένη τιμή Ψ_i της παρατήρησης, η οποία συνδέεται με μία

δοσμένη τιμή X_i , μπορούμε να εξάγουμε τρεις τύπους αποκλίσεων:

α) Μεταξύ των τιμών της παρατήρησης (Ψ_i) και των θεωρητικών τιμών $\hat{\Psi}_i$ υπάρχουν οι αποκλίσεις $(\Psi_i - \hat{\Psi}_i)$, οι οποίες οφείλονται στην επίδραση ανερμήνευτων παραγόντων (σφάλματα μέτρησης, κ.λ.π.).

β) Μεταξύ των θεωρητικών τιμών ($\hat{\Psi}_i$) και της μέσης τιμής ($\bar{\Psi}$) υπάρχουν οι αποκλίσεις $(\hat{\Psi}_i - \bar{\Psi})$, οι οποίες οφείλονται αποκλειστικά στην παλινδρόμηση (δηλαδή στην επίδραση της μεταβλητής X πάνω στην Ψ).

γ) Τέλος, μεταξύ των τιμών της παρατήρησης (Ψ_i) και της μέσης τιμής

$(\bar{\Psi})$ υπάρχουν οι αποκλίσεις $(\Psi_i - \bar{\Psi})$, οι οποίες οφείλονται κατά ένα μέρος στην παλινδρόμηση (στην επίδραση της X στην Ψ) και κατά ένα άλλο μέρος στην επίδραση ανερμήνευτων παραγόντων.

Από τα παραπάνω προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$(\Psi_i - \bar{\Psi}) = (\hat{\Psi}_i - \bar{\Psi}) + (\Psi_i - \hat{\Psi}_i) \quad (1)$$

Αν κάνουμε το ίδιο για όλα τα σημεία του διαγράμματος διασποράς τετραγωνίσουμε και τα δυο μέλη των εξισώσεων (1) και αθροίσουμε όλες τις τετραγωνισμένες αποκλίσεις, τότε προκύπτει η σχέση:

$$\sum (\Psi_i - \bar{\Psi})^2 = \sum (\hat{\Psi}_i - \bar{\Psi})^2 + \sum (\Psi_i - \hat{\Psi}_i)^2 \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) συνάγονται τα ακόλουθα:

Το άθροισμα των τετραγωνισμένων αποκλίσεων $\sum (\Psi_i - \bar{\Psi})^2$ μετράει τη συνολική μεταβλητικότητα των τιμών της παρατήρησης Ψ_i και διασπάται σε δυο μέρη: Το πρώτο μέρος αποτελεί αυτό που ερμηνεύεται από τη γραμμική παλινδρόμηση και εκφράζεται από το άθροισμα $\sum (\hat{\Psi}_i - \bar{\Psi})^2$. Το δεύτερο μέρος που εκφράζεται με το άθροισμα $\sum (\Psi_i - \hat{\Psi}_i)^2$ αποτελεί το ανερμήνευτο μέρος της συνολικής μεταβλητικότητας και οφείλεται στην επίδραση άγνωστων παραγόντων.

Θεωρητικά υπολογίζεται με τον τύπο:

$$r^2 = \frac{\sum (\hat{\Psi}_i - \bar{\Psi})^2}{\sum (\Psi_i - \bar{\Psi})^2}$$

Ο συντελεστής προσδιορισμού (r^2) ισούται με το τετράγωνο του συντελεστή συσχέτισης (r) και παίρνει τιμές από 0 ως 1. Δηλαδή $0 < r^2 < 1$. Όσο η τιμή του r^2 πλησιάζει προς τη μονάδα, τόσο καλύτερη θα είναι η προσαρμογή της ευθείας γραμμής στα δεδομένα της παρατήρησης. Δηλαδή ο r^2 χρησιμοποιείται και σαν μέτρο προσαρμογής της ευθείας γραμμής στα δεδομένα της παρατήρησης, εκτός από το τυπικό σφάλμα εκτίμησης.

Ο r^2 προσδιορίζει το ποσοστό της συνολικής μεταβλητικότητας της Ψ_i το οποίο ερμηνεύεται από την επίδραση των τιμών της X_i πάνω στην Ψ_i

ενώ η διαφορά $(1 - r^2)$ εκφράζει το ποσοστό της μεταβλητικότητας που οφείλεται στην επίδραση ανερμήνευτων (άγνωστων) παραγόντων. Με άλλα λόγια, ο συντελεστής προσδιορισμού (r^2) προσδιορίζει (σε ποσοστό τοις %) την επίδραση που ασκεί η ανεξάρτητη μεταβλητή (X) στην διαμόρφωση των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής (Ψ), ενώ η διαφορά $(1 - r^2)$ εκφράζει την επίδραση άλλων άγνωστων παραγόντων.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο συντελεστής προσδιορισμού (r^2) χρησιμεύει για να δείξει ότι η παλινδρόμηση και η συσχέτιση συνδέονται στενότερα, γιατί ο συντελεστής συσχέτισης ισούται με την τετραγωνική ρίζα του συντελεστή προσδιορισμού. Δηλαδή:

$$r = \sqrt{r^2} \tag{4}$$

Επίσης, επειδή: $r = \sqrt{b \cdot b'} \Rightarrow r^2 = b \cdot b' \tag{5}$

Από τη σχέση (5) φαίνεται σαφέστατα η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην παλινδρόμηση και τη συσχέτιση. Η διαφορά μεταξύ r και r^2 είναι κυρίως στην ερμηνεία τους.

Γ' ΕΝΟΤΗΤΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Στις επιχειρήσεις υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που οι αποφάσεις βασίζονται στη σχέση που πιθανόν να υπάρχει μεταξύ δύο (2) ή περισσότερων μεταβλητών. Για παράδειγμα, ο διευθυντής πωλήσεων μιας εταιρίας μηχανημάτων κλιματισμού ενδιαφέρεται να γνωρίζει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των πωλήσεων και των δαπανών για διαφήμιση. Αν μπορεί να περιγράψει με επιτυχία αυτή τη σχέση, θα βελτιώσει τις προβλέψεις του και θα προγραμματίσει καλύτερα τις χρηματοοικονομικές ανάγκες της εταιρίας.

Ένα άλλο παράδειγμα, που παρουσιάζεται στο χώρο των υπηρεσιών, δηλαδή σε μία ασφαλιστική εταιρία είναι όπου εκτός της διαφημιστικής εκστρατείας που έχει υιοθετήσει, χρησιμοποιεί και μεγάλο αριθμό πωλητών. Στην προσπάθεια να αυξήσει η εταιρεία το μερίδιό της στην αγορά ασφαλειών ζωής, το διοικητικό συμβούλιο προβληματίζεται αν θα πρέπει να αυξήσει τις δαπάνες διαφήμισης ή να προσλάβει νέους πωλητές. Η απάντηση θα εξαρτηθεί από ποια σχέση είναι εντονότερη. Η σχέση μεταξύ πωλήσεων και δαπανών διαφήμισης ή η σχέση μεταξύ πωλήσεων και αριθμού πωλητών. Επίσης, η περιγραφή της σχέσης μεταξύ των μεταβλητών, θα επιτρέψει στην εταιρία να εκτιμήσει το αναμενόμενο ύψος των πωλήσεων αν προχωρήσει στην ανάλογη αύξηση των δαπανών για διαφήμιση ή πρόσληψη νέων πωλητών.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνονται τα παρακάτω δεδομένα ζητούμενης ποσότητας (Ψ_i σε τόνους) και τιμής (X_i σε ΕΥΡΩ κατά τόνο) ενός αγαθού.

Έτος	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
X_i	9	12	14	22	27	29	32	34	39	42
Ψ_i	49	41	36	31	32	28	23	22	20	13

ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ :

- A) Να προσδιοριστεί (με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων) η εξίσωση γραμμικής παλινδρόμησης (εξίσωση ζήτησης) της Ψ πάνω στη X και να υπολογιστούν οι θεωρητικές τιμές της Ψ .
- B) Να προσδιοριστεί η εξίσωση παλινδρόμησης της X πάνω στη Ψ .
- Γ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα διασποράς και να τοποθετηθούν πάνω σε αυτό οι ευθείες παλινδρόμησης.
- Δ) Να υπολογιστεί ο συντελεστής μέσης ελαστικότητας της ζήτησης.
- Ε) Να βρεθεί το τυπικό σφάλμα εκτίμησης της Ψ .
- ΣΤ) Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης
- Ζ) Να βρεθεί ο συντελεστής προσδιορισμού r^2

ΛΥΣΗ

Για τον υπολογισμό των διαφόρων παραμέτρων των ζητούμενων εξισώσεων,

κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα :

	Έτος	X_i Τιμή σε Ευρώ κατά τόνο	Ψ_i Ζητούμενη ποσότητα σε τόνους	$X_i \cdot \Psi_i$	X_i^2	Ψ_i^2	$\hat{\Psi}$	\hat{X}
	1980	9	49	441	81	2401	44	5,72
	1981	12	41	492	144	1681	42	14,04
	1982	14	36	504	196	1296	40	19,24
	1983	22	31	682	484	961	33	24,44
	1984	27	32	864	729	1024	28	23,4
	1985	29	28	812	841	784	26	27,56
	1986	32	23	736	1024	529	24	32,76
	1987	34	22	748	1156	484	22	33,8
	1988	39	20	780	1521	400	17	35,88
	1989	42	13	546	1764	169	15	43,16
ΣΥΝΟΛΑ	n = 10	260	295	6605	7940	9729		

Από τον πίνακα παίρνουμε τα αθροίσματα :

$$n=10, \sum X_i = 260, \sum \Psi_i = 295, \sum X_i^2 = 7940, \sum \Psi_i^2 = 9729, \sum X_i \Psi_i = 6605,$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{260}{10} = 26, \quad \bar{\Psi} = \frac{\sum \Psi_i}{n} = \frac{295}{10} = 29,5$$

Α) Η ζητούμενη εξίσωση παλινδρόμησης είναι της μορφής :

$$\hat{\Psi} = \alpha + bX_i$$

Επεξήγηση συμβόλων :

Η σταθερά b είναι ο γωνιακός συντελεστής και η τιμή του προσδιορίζει την απόλυτη μεταβολή που επέρχεται στην εξαρτημένη μεταβλητή Ψ όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή

X , μεταβληθεί κατά μία μονάδα. Οι σταθερές a και b ονομάζονται συντελεστές παλινδρόμησης και υπολογίζονται με τους παρακάτω τύπους :

$$b = \frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum (X_i) \sum (\Psi_i)}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \text{ αντικαθιστώντας τη σχέση έχουμε:}$$

$$b = \frac{10 \cdot 6605 - 260 \cdot 295}{10 \cdot 7940 - (260)^2} = \frac{66050 - 76700}{79400 - 67600} = \frac{-10650}{11800} = -0,90$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Στην περίπτωση μας το b είναι αρνητικός αριθμός $b = -0,90$. Άρα η εξάρτηση είναι αρνητική και δείχνει ότι, όταν η τιμή του αγαθού αυξηθεί κατά 1 ΕΥΡΩ, τότε η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού θα μειωθεί (γιατί $b < 0$) κατά 0,90 τόνους.

Υπάρχει και η σταθερά $a = \bar{\Psi} - b\bar{X}$, όπου αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση με τα δεδομένα της άσκησής μας έχουμε : $a = 29,5 - (-0,90 \cdot 26) = 52,9$.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Η σταθερά a εκφράζει την τιμή της Ψ όταν $X = 0$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η σταθερά $a = 52,9$ προσδιορίζει (θεωρητικά) τη ζητούμενη ποσότητα του αγαθού που αντιστοιχεί στην τιμή $X = 0$.

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση της ζήτησης είναι :

$$\hat{\Psi} = 52,9 - 0,90 \cdot X_i$$

Άρα οι θεωρητικές τιμές ($\hat{\Psi}$) της μεταβλητής Ψ , θα βρεθούν αν στην εξίσωση

$$\hat{\Psi} = 52,9 - 0,90 \cdot X_i$$

Δηλαδή για $X_1 = 9$ έχουμε: $52,9 - 0,90 \cdot 9 = 44$

για $X_2 = 12$ έχουμε: $52,9 - 0,90 \cdot 12 = 42$

για $X_3 = 14$ έχουμε: $52,9 - 0,90 \cdot 14 = 40$

Με τον ίδιο τρόπο θα συνεχιστεί μέχρι το X_{10} διότι το πλήθος των δεδομένων είναι $n = 10$.

B) Η εξίσωση παλινδρόμησης της μεταβλητής X πάνω στη μεταβλητή Ψ είναι :

$$\hat{X} = a' + b' \Psi_i$$

Η σταθερά b' υπολογίζεται με τον τύπο :

$$b' = \frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum X_i \sum \Psi_i}{n \sum \Psi_i^2 - (\sum \Psi_i)^2} \text{ όπου αντικαθιστώντας τη σχέση έχουμε :}$$

$$b = \frac{10 \cdot 6605 - 260 \cdot 295}{10 \cdot 9729 - (295)^2} = \frac{66050 - 76700}{97290 - 87025} = \frac{-10650}{10265} = -1,04$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Το b' είναι αρνητικός $b' = -1,04$. Άρα η εξάρτηση είναι αρνητική και δείχνει, ότι όταν η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού θα μειωθεί ($b' < 0$) κατά 1,04 τότε η τιμή του αγαθού θα αυξηθεί κατά 1 ΕΥΡΩ.

Η σταθερά a' υπολογίζεται από τον τύπο:

$$a' = \bar{X} - b' \bar{\Psi} \text{ όπου αντικαθιστώντας τη σχέση έχουμε:}$$

$$a' = 26 - (-1,04) \cdot 29,5 = 26 - (-30,68) = -56,68$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Η σταθερά a' προσδιορίζει (θεωρητικά) τη ζητούμενη ποσότητα του αγαθού που αντιστοιχεί στην τιμή $\Psi = 0$.

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι:

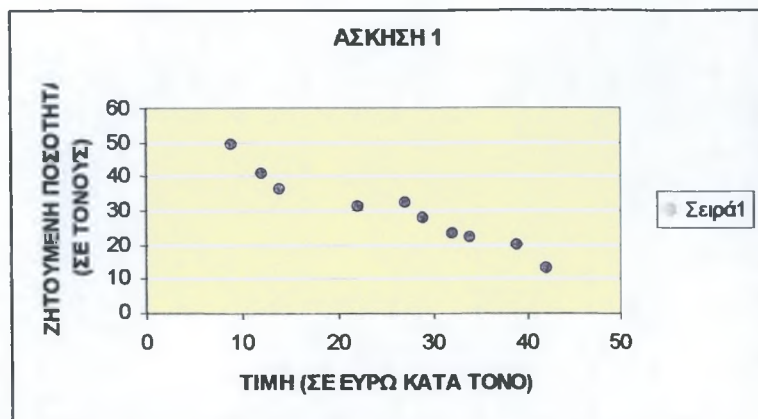
$$\hat{X} = 56,68 - (1,04 \cdot \Psi_i)$$

Οι θεωρητικές τιμές (\hat{X}_i) της μεταβλητής X_i θα βρεθούν αν στην παραπάνω εξίσωση δώσουμε διαδοχικά τις τιμές $\Psi_i = 49, 41, 36, \dots, 13$

Δηλαδή έχουμε: $X_1 = 56,68 - (1,04 \cdot 49) = 56,68 - 50,96 = 5,72$.

Με τον ίδιο τρόπο θα συνεχιστεί μέχρι την τιμή X_{10} διότι το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n=10$.

Γ) Διάγραμμα Διασποράς



Δ) ο συντελεστής μέσης ελαστικότητας της ζήτησης θα είναι:

$$E_{\psi \cdot x} = b \frac{\bar{X}}{\bar{\Psi}}$$

Ο συντελεστής ελαστικότητας προσδιορίζει την ποσοστιαία μεταβολή (αύξηση ή μείωση) που προκαλείται στην μεταβλητή Ψ για κάθε μεταβολή της X κατά 1%.

Έχει βρεθεί: $b = -0,90$, $X=26$, $\Psi=29,5$

Αντικαθιστώντας τον τύπο έχουμε:

$$E_{\psi \cdot x} = -0,90 \cdot \frac{26}{29,5} = \frac{23,4}{29,5} = -0,79$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Αυτό σημαίνει ότι αν αυξηθεί η τιμή του εξεταζόμενου αγαθού κατά 1% ή 10%, τότε η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού θα μειωθεί κατά 0,79 ή 7,9%..

Ε) Να βρεθεί το τυπικό σφάλμα εκτίμησης της Ψ

Ο τύπος που θα χρησιμοποιηθεί είναι :

$$S_{\Psi \cdot X} = \sqrt{\frac{\sum \Psi_i^2 - a \sum \Psi_i - b \sum X_i \Psi_i}{n-2}}$$

ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

Το τετράγωνο του τυπικού σφάλματος εκτίμησης ($S^2_{\Psi \cdot X}$) ονομάζεται διακύμανση των δεδομένων της παρατήρησης γύρω από τη γραμμή παλινδρόμησης. Το $S_{\Psi \cdot X}$ δείχνει την κατά μέσο όρο διαφορά κάθε τιμής Ψ_i από τη γραμμή παλινδρόμησης και εκφράζεται στις ίδιες μονάδες μέτρησης που εκφράζεται η μεταβλητή Ψ_i .

Χρησιμοποιώντας και αντικαθιστώντας τα δεδομένα της άσκησης έχουμε :

$$S_{\Psi \cdot X} = \sqrt{\frac{\sum \Psi_i^2 - a \sum \Psi_i - b \sum X_i \Psi_i}{n-2}}$$

$$S_{\Psi \cdot X} = \sqrt{\frac{9729 - 52,9 \cdot 295 - (-0,90) \cdot 6605}{10-2}}$$

$$S_{\Psi \cdot X} = \sqrt{\frac{9729 - 15605,5 + 5944,5}{8}}$$

$$S_{\Psi \cdot X} = \sqrt{\frac{68}{8}}$$

$$S_{\Psi \cdot X} = \sqrt{8,5}$$

$$S_{\Psi \cdot X} = \pm 2,915 \text{ τόνοι}$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Οι τιμές Ψ_i διαφέρουν από τις θεωρητικές τιμές $\hat{\Psi}_i$, κατά μέσο όρο, κατά 8,5 μονάδες Ψ_i .

ΣΤ) Για τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης έχουμε :

$$r = \sqrt{b \cdot b'}$$

Όπου :

$$b = \frac{\sum (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})}{\sum (X - \bar{X})^2} \quad \text{και} \quad b' = \frac{\sum (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})}{\sum (\Psi - \bar{\Psi})^2}$$

$$r = \sqrt{(-0,90) \cdot (1,04)}$$

$$r = \sqrt{0,936}$$

$$r = -0,97$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ :

Από την τιμή $r = -0,97$ συμπεραίνουμε ότι η συσχέτιση μεταξύ της ζητούμενης ποσότητας σε ευρώ κατά τόνο (=Ψ) και της τιμής σε ευρώ κατά τόνο ενός αγαθού (=X) είναι αρνητική. Δηλαδή όταν αυξάνεται η τιμή σε ευρώ κατά τόνο του συγκεκριμένου αγαθού τότε

μειώνεται η ζητούμενη ποσότητα αυτού και αντίστροφα. Επειδή $r=-0,97$ τότε έχουμε αρνητική συσχέτιση. (διότι $b<0$ οπότε και $r<0$).

Z) Για τον υπολογισμό του συντελεστή προσδιορισμού r^2 έχουμε:

$$r^2 = b \cdot b'$$

όπου έχει βρεθεί $b = -0,90$, $b' = -1,04$, $r = -0,97$

Επομένως, αντικαθιστώντας τον παραπάνω τύπο με τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$r^2 = b \cdot b' = (-0,90) \cdot (-1,04) = 0,94$$

ή

$$r^2 = (-0,97)^2 = 0,94 \quad \text{και} \quad 1 - r^2 = 1 - 0,94 = 0,06$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Η τιμή του αγαθού ($=X$) προσδιορίζει τη ζητούμενη ποσότητα ($=\Psi$) αυτού κατά 94%, ενώ άλλοι άγνωστοι παράγοντες, διαφορετικοί από την τιμή μόνο κατά 6%.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Τα επενδυμένα κεφάλαια ($=X_i$) και τα πραγματοποιηθέντα κέρδη ($=\Psi_i$) δέκα (10) επιχειρήσεων κατά το έτος 2005 είχαν ως εξής : (σε χιλιάδες ευρώ). Δίνεται ο παρακάτω πίνακας με τα δεδομένα των επιχειρήσεων.

Επιχειρήσεις	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	30	40	120	250	50	150	220	60	100	200
Ψ_i	5	7	15	28	10	20	27	8	14	24

ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ :

A) Να εκτιμηθεί η εξίσωση $\hat{\Psi}_i = a + bX_i$ με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (η εξίσωση γραμμικής παλινδρόμησης της Ψ πάνω στη X και της X πάνω στην Ψ $\hat{X}_i = a' + b'\Psi_i$).

B) Να υπολογιστεί το τυπικό σφάλμα εκτίμησης

Γ) Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης και

Δ) Να υπολογιστεί ο συντελεστής μέσης ελαστικότητας των επενδυμένων κεφαλαίων.

Ε) Να κατασκευαστεί το Διάγραμμα Διασποράς.

ΣΤ) Να βρεθεί ο συντελεστής προσδιορισμού r^2

ΛΥΣΗ

Για τον υπολογισμό των παραπάνω παραμέτρων κατασκευάζουμε τον εξής πίνακα :

	Επιχειρήσεις	X_i επενδυμένα κεφάλαια	Ψ_i πραγματοποιηθέντα κέρδη	$X_i \cdot \Psi_i$	X_i^2	Ψ_i^2	$\hat{\Psi}$	\hat{X}
	1	30	5	150	900	25	6,6	21,35
	2	40	7	280	1600	49	7,6	39,99
	3	120	15	1800	14400	225	15,6	114,55
	4	250	28	7000	62500	784	28,6	235,71
	5	50	10	500	2500	100	8,6	67,95
	6	150	20	3000	22500	400	18,6	161,15
	7	220	27	5940	48400	729	25,6	226,39
	8	60	8	480	3600	64	9,6	49,31
	9	100	14	1400	10000	196	13,9	105,23
	10	200	24	4800	40000	576	23,6	198,43
ΣΥΝΟΛΑ	n = 10	1220	158	25350	206400	3148		

Από τον πίνακα παίρνουμε τα αθροίσματα:

$$n=10, \sum X_i = 1220, \sum \Psi_i = 158, \sum X_i^2 = 206400, \sum \Psi_i^2 = 3148, \sum X_i \Psi_i = 25350,$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{1220}{10} = 122, \bar{\Psi} = \frac{\sum \Psi_i}{n} = \frac{158}{10} = 15,8$$

A)I η ζητούμενη εξίσωση παλινδρόμησης είναι της μορφής :

$$\hat{\Psi} = \alpha + bX_i$$

Επεξήγηση συμβόλων :

Η σταθερά b είναι ο γωνιακός συντελεστής και η τιμή του προσδιορίζει την απόλυτη μεταβολή που επέρχεται στην εξαρτημένη μεταβλητή Ψ όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή X , μεταβληθεί κατά μία μονάδα. Οι σταθερές a και b ονομάζονται συντελεστές παλινδρόμησης και υπολογίζονται με τους παρακάτω τύπους :

αντικαθιστώντας τη σχέση έχουμε:

$$b = \frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum (X_i) \sum (\Psi_i)}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

$$b = \frac{10 \cdot 25350 - 1220 \cdot 158}{10 \cdot 206400 - (1220)^2}$$

$$= \frac{253500 - 192760}{2064000 - 1488400}$$

$$= \frac{60740}{575600}$$

$$= 0,10$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Στην περίπτωση μας το b είναι θετικός αριθμός ($b=0,10$). Δηλαδή αν τα κεφάλαια (X_i) αυξηθούν κατά 1000 ευρώ, τότε τα κέρδη (Ψ_i) θα αυξηθούν (γιατί $b>0$) κατά 0,10 χιλιάδες ευρώ.

Υπάρχει και η σταθερά $a = \bar{\Psi} - b\bar{X}$ όπου αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση με τα δεδομένα της άσκησης μας έχουμε : $a = 15,8 - (0,10 \cdot 122) = 3,6$.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Η σταθερά a εκφράζει την τιμή της Ψ όταν $X = 0$. στο συγκεκριμένο παράδειγμα η σταθερά $a = 3,6$ προσδιορίζει (θεωρητικά) τα πραγματοποιηθέντα κέρδη της επιχείρησης που αντιστοιχούν στα επενδυμένα κεφάλαια $X = 0$.

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση είναι :

$$\hat{\Psi} = 3,6 + 0,10 \cdot X_i$$

Άρα οι θεωρητικές τιμές ($\hat{\Psi}$) της μεταβλητής Ψ_i θα βρεθούν αν στην εξίσωση

$$\hat{\Psi} = 3,6 + 0,10 \cdot X_i \text{ δώσουμε διαδοχικά τις τιμές } X_1, X_2, \dots, X_{10}$$

Δηλαδή για $X_1 = 30$ έχουμε: $3,6 + 0,10 \cdot 30 = 6,6$

για $X_2 = 40$ έχουμε: $3,6 + 0,10 \cdot 40 = 7,6$

για $X_3 = 120$ έχουμε: $3,6 + 0,10 \cdot 120 = 15,6$

Με τον ίδιο τρόπο θα συνεχιστεί μέχρι το X_{10} διότι το πλήθος των δεδομένων είναι $n=10$.

II) Η εξίσωση παλινδρόμησης της μεταβλητής X πάνω στη μεταβλητή Ψ είναι :

$$\hat{X} = a' + b' \Psi_i$$

Η σταθερά b' υπολογίζεται με τον τύπο :
$$b' = \frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum X_i \sum \Psi_i}{n \sum \Psi_i^2 - (\sum \Psi_i)^2}$$

όπου αντικαθιστώντας τη σχέση έχουμε :

$$b' = \frac{10 \cdot 25350 - 1220 \cdot 158}{10 \cdot 3148 - (158)^2} = \frac{253500 - 192760}{31480 - 24964} = \frac{60740}{6516}$$

$$b' = 9,32$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Το b' είναι θετικός $b'=9,32$. άρα η εξάρτηση είναι θετική και δείχνει, ότι όταν τα πραγματοποιηθέντα κέρδη (Ψ_i) της επιχείρησης θα αυξηθούν ($b' > 0$) κατά 1000 ευρώ τότε και τα επενδυμένα κεφάλαια (X_i) θα αυξηθούν κατά 9,32 χιλιάδες ευρώ.

Η σταθερά a' υπολογίζεται από τον τύπο:

$$a' = \bar{X} - b' \bar{\Psi}$$

όπου αντικαθιστώντας τη σχέση έχουμε:

$$a' = 122 - (9,32 \cdot 15,8) = 122 - 147,256 = -25,25$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Η σταθερά α' προσδιορίζει (θεωρητικά) τα επενδυμένα κεφάλαια που αντιστοιχούν για κέρδη $\Psi=0$.

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$\hat{X}_i = \alpha' + b \Psi_i$$

$$\hat{X}_i = -25,25 + 9,32 \cdot \Psi_i$$

Οι θεωρητικές τιμές (\hat{X}_i) της μεταβλητής X_i θα βρεθούν αν στην παραπάνω εξίσωση δώσουμε διαδοχικά τις τιμές $\Psi_i=5,7,15,\dots,24$

Δηλαδή έχουμε: $\hat{X}_1 = -25,25 + (9,32 \cdot 5) = -25,25 + 46,6 = 71,85$.

Με τον ίδιο τρόπο θα συνεχιστεί μέχρι την τιμή X_{10} διότι το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n=10$.

B) Να βρεθεί το τυπικό σφάλμα εκτίμησης της Ψ

Ο τύπος που θα χρησιμοποιηθεί είναι :

$$S_{\Psi \cdot X} = \sqrt{\frac{\sum \Psi_i^2 - a \sum \Psi_i - b \sum X_i \Psi_i}{n-2}}$$

ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

Το τετράγωνο του τυπικού σφάλματος εκτίμησης ($S^2_{\Psi \cdot X}$) ονομάζεται διακύμανση των δεδομένων της παρατήρησης γύρω από τη γραμμή παλινδρόμησης. Το $S_{\Psi \cdot X}$ δείχνει την κατά μέσο όρο διαφορά κάθε τιμής Ψ_i από τη γραμμή παλινδρόμησης και εκφράζεται στις ίδιες μονάδες μέτρησης που εκφράζεται η μεταβλητή Ψ_i .

Χρησιμοποιώντας και αντικαθιστώντας τα δεδομένα της άσκησης έχουμε :

$$S_{\Psi \cdot X} = \sqrt{\frac{\sum \Psi_i^2 - a \sum \Psi_i - b \sum X_i \Psi_i}{n-2}}$$

$$S_{\Psi \cdot X} = \sqrt{\frac{3148 - 2,38 \cdot 158 - 0,11 \cdot 25350}{10-2}}$$

$$S_{\Psi \cdot X} = \sqrt{\frac{3148 - 376,04 - 2788,5}{10-2}}$$

$$S_{\Psi \cdot X} = \sqrt{\frac{16,54}{8}}$$

$$S_{\Psi \cdot X} = \sqrt{2,067}$$

$S_{\Psi \cdot X} = \pm 1,437$ χιλιάδες ευρώ

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Θα «πέσουμε έξω» κατά 1,437 χιλιάδες ευρώ στα κέρδη (Ψ_i). Οι τιμές Ψ_i διαφέρουν από τις θεωρητικές τιμές $\hat{\Psi}_i$ κατά μέσο όρο, κατά 1,437 χιλιάδες ευρώ.

Γ) Για τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης έχουμε :

$$r = \sqrt{b \cdot b'}$$

Όπου :

$$b = \frac{\sum (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})}{\sum (X - \bar{X})^2} \quad \text{και} \quad b' = \frac{\sum (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})}{\sum (\Psi - \bar{\Psi})^2}$$

$$r = \sqrt{0,10 \cdot 9,32}$$

$$r = \sqrt{0,93}$$

$$r = \pm 0,96$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ :

Από την τιμή $r = 0,96$ συμπεραίνουμε ότι η συσχέτιση μεταξύ πραγματοποιηθέντων κερδών ($=\Psi$) μιας επιχείρησης και των επενδυμένων κεφαλαίων($=X$) αυτής είναι θετική. Δηλαδή όταν αυξάνονται τα επενδυμένα κεφάλαια αυξάνονται και τα πραγματοποιηθέντα κέρδη και αντίστροφα.

Δ) ο συντελεστής μέσης ελαστικότητας θα είναι:

$$E_{\Psi \cdot X} = b \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{\Psi}}$$

Ο συντελεστής ελαστικότητας προσδιορίζει την ποσοστιαία μεταβολή (αύξηση ή μείωση) που προκαλείται στην μεταβλητή Ψ για κάθε μεταβολή της X κατά 1%.

Έχει βρεθεί: $b=0,11$, $\bar{X}=122$, $\bar{\Psi}=15,8$

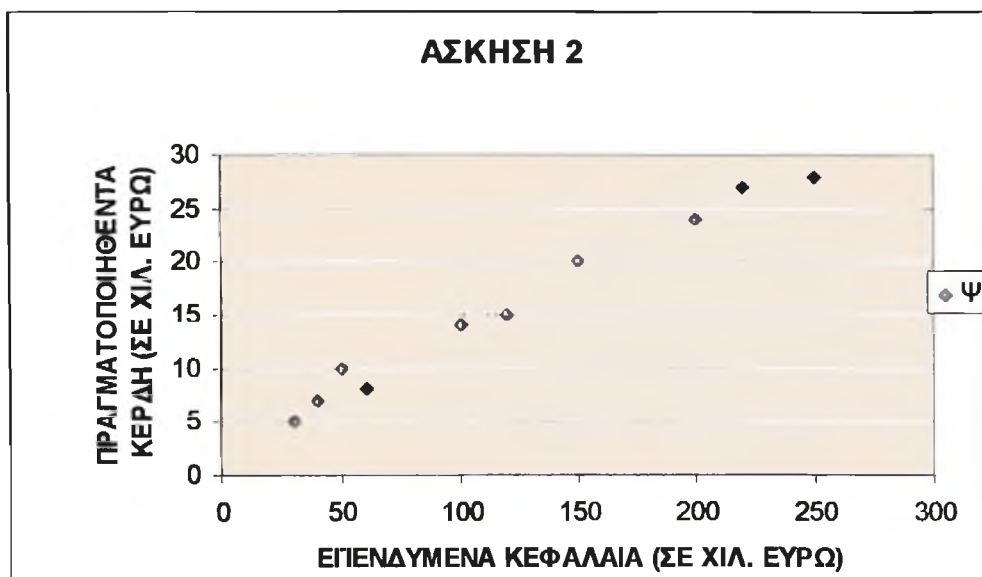
Αντικαθιστώντας τον τύπο έχουμε:

$$E_{\Psi \cdot X} = 0,11 \cdot \frac{122}{15,8} = 0,849$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Αν το κεφάλαιο (X_i) μεταβληθεί κατά 1% (αυξηθεί), τότε τα κέρδη (Ψ_i) θα αυξηθούν κατά 0,849%. (είναι ποσοστιαία μεταβολή επί τις εκατό %).

Ε) Διάγραμμα Διασποράς



ΣΤ) Για τον υπολογισμό του συντελεστή προσδιορισμού r^2 έχουμε:

$$r^2 = b \cdot b'$$

όπου έχει βρεθεί $b=0,10$, $b'=9,32$, $r=0,96$

Επομένως, αντικαθιστώντας τον παραπάνω τύπο με τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$r^2 = b \cdot b' = 0,10 \cdot 9,32 = 0,92$$

ή

$$r^2 = (0,96)^2 = 0,92 \quad \text{και} \quad 1 - r^2 = 1 - 0,92 = 0,08$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Τα πραγματοποιηθέντα κέρδη (=Ψ) εξαρτώνται από τα επενδυμένα κεφάλαια (=X) κατά 92%, ενώ κατά ποσοστό 8% επιδρούν άλλοι άγνωστοι παράγοντες. Δηλαδή, ο κυριότερος παράγοντας που διαμορφώνει τα πραγματοποιηθέντα κεφάλαια είναι τα επενδυμένα κεφάλαια.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνονται τα ακόλουθα δεδομένα :

$$X_i : 9, 10, 12, 5$$

$$\Psi_i : 6, 4, 7, 3$$

Όπου Ψ_i = Ζήτηση ενός προϊόντος (σε χιλ. τεμάχια)

και X_i = τιμή του προϊόντος (σε ευρώ)

ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ:

A) να προσδιοριστεί (με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων) η εξίσωση της ζήτησης της Ψ πάνω στη X και το αντίθετο.

B) να κατασκευαστεί το διάγραμμα διασποράς και να τοποθετηθούν πάνω σε αυτό οι ευθείες παλινδρόμησης.

Γ) να υπολογιστεί ο συντελεστής μέσης ελαστικότητας της ζήτησης.

Δ) να βρεθεί το τυπικό σφάλμα εκτίμησης.

E) Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης

ΣΤ) Να υπολογιστεί ο συντελεστής προσδιορισμού r^2

ΛΥΣΗ

Για τον υπολογισμό των διαφόρων παραμέτρων των ζητούμενων εξισώσεων κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα :

	X_i τιμή του προϊόντος σε ευρώ	Ψ_i ζητούμενη ποσότητα σε τεμάχια	$X_i\Psi_i$	X_i^2	Ψ_i^2	$\hat{\Psi}$	\hat{X}
1	9	6	54	81	36	-4	10,3
2	10	4	40	100	16	-	7,7
3	12	7	84	144	49	-	11,6
4	5	3	15	25	9	-2	6,4
σύνολο n=4	36	20	193	350	110		

Από τον πίνακα παίρνουμε τα αθροίσματα

$$n=4, \quad \sum X_i = 36, \quad \sum \Psi_i = 20, \quad \sum X_i^2 = 350, \quad \sum \Psi_i^2 = 110, \quad \sum X_i\Psi_i = 193,$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{36}{4} = 9, \quad \bar{\Psi} = \frac{\sum \Psi_i}{n} = \frac{20}{4} = 5$$

A) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής :

$$\hat{\Psi} = a + bX_i$$

$$\text{Όπου η σταθερά } b = \frac{n\sum X_i\Psi_i - \sum(X_i)\sum(\Psi_i)}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

αντικαθιστώντας τη σχέση έχουμε :

$$b = \frac{4 \cdot 193 - 36 \cdot 20}{4 \cdot 350 - (36)^2} = \frac{772 - 720}{1400 - 1296} = \frac{52}{104} = 0,5$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Η σταθερά b είναι θετικός αριθμός ($b > 0$) $b = 0,5$. Άρα η εξάρτηση είναι θετική και δείχνει ότι αν η τιμή του αγαθού αυξηθεί κατά 1 (ένα) ευρώ, τότε η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού θα αυξηθεί κατά 0,5 τεμάχια.

Υπάρχει και η σταθερά $a = \bar{\Psi} - b\bar{X}$, όπου αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση με τα συγκεκριμένα δεδομένα έχουμε: $a = 5(0,5 \cdot 9) = 5 - 4,5 = 0,5$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Η σταθερά a εκφράζει την τιμή της Ψ όταν $X=0$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η σταθερά $a=0,5$ προσδιορίζει (θεωρητικά) τη ζητούμενη ποσότητα του αγαθού που αντιστοιχεί στην τιμή $X=0$. Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση της ζήτησης είναι $\hat{\Psi} = 0,5 - 0,5 X_i$.

Άρα, οι θεωρητικές τιμές ($\hat{\Psi}_i$) της μεταβλητής Ψ_i αν στη εξίσωση

δοθούν οι τιμές X_1, X_2, \dots, X_4 .

Δηλαδή για $X_1=9$ έχουμε $0,5 - 0,5 \cdot 9 = 0,5 - 4,5 = -4$

για $X_2=10$ έχουμε $0,5 - 0,5 \cdot 10 = 0,5 - 5 = -4,5$

Με τον ίδιο τρόπο θα συνεχιστεί μέχρι το X_4 διότι το πλήθος των δεδομένων είναι $n=4$.

Η εξίσωση παλινδρόμησης (ζήτησης) της μεταβλητής X πάνω στην μεταβλητή Ψ είναι :

$$\hat{X} = a' + b' \Psi_i$$

Η σταθερά b' υπολογίζεται από τον τύπο :

$$b' = \frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum (X_i) \sum (\Psi_i)}{n \sum \Psi_i^2 - (\sum \Psi_i)^2}$$

όπου αντικαθιστώντας τη σχέση έχουμε:

$$b' = \frac{4 \cdot 193 - 36 \cdot 20}{4 \cdot 110 - (20)^2} = \frac{772 - 720}{440 - 400} = \frac{52}{40} = 1,3$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Το b' είναι θετικός αριθμός $b' = 1,3$. Άρα η εξάρτηση είναι θετική και δείχνει ότι όταν η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού αυξηθεί ($b' > 0$) κατά 1,3 τεμάχια, τότε η τιμή του αγαθού θα αυξηθεί κατά 1 ευρώ.

Η σταθερά a' υπολογίζεται από τον τύπο

$$a' = \bar{X} - b' \bar{\Psi}$$

Όπου αντικαθιστώντας τη σχέση έχουμε:

$$a' = 9 - 1,3 \cdot 5 = 9 - 6,5 = 2,5$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Η σταθερά a' προσδιορίζει (θεωρητικά) τη ζητούμενη ποσότητα του αγαθού που αντιστοιχεί στην τιμή $\Psi = 0$. Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι :

$$\hat{X} = a' + b' \Psi_i$$

$$\hat{X} = 2,5 + 1,3 \Psi_i$$

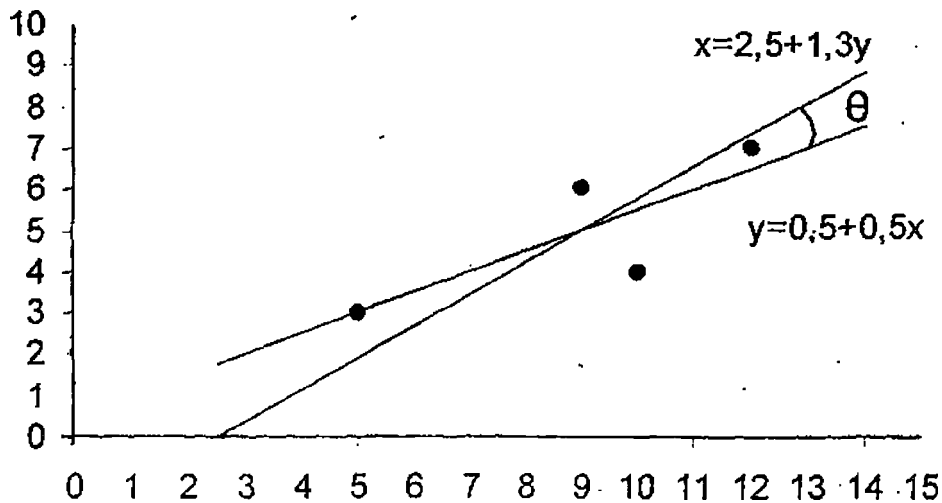
Οι θεωρητικές τιμές (\hat{X}_i) της μεταβλητής X_i θα βρεθούν αν στην παραπάνω εξίσωση δώσουμε διαδοχικά τις τιμές Ψ_1, \dots, Ψ_4 .

$$\text{Δηλαδή έχουμε } \hat{X}_1 = 2,5 + 1,3 \cdot 6 = 2,5 + 7,8 = 10,3$$

Με τον ίδιο τρόπο θα συνεχιστεί μέχρι την τιμή Ψ_4 , διότι το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n=4$.

B) Διάγραμμα διασποράς :

Στον οριζόντιο άξονα χ παρουσιάζονται οι τιμές του προϊόντος σε ευρώ και στον κάθετο ψ είναι η ζήτηση του προϊόντος σε χιλ. τεμάχια. Στο διάγραμμα 3.3 που ακολουθεί έχουν τοποθετηθεί οι ευθείες παλινδρόμησης $\hat{\Psi} = 0,5 + 0,5X_i$ και $\hat{X} = 2,5 + 1,3\Psi_i$.



Διάγραμμα 3.3

Γ) ο συντελεστής μέσης ελαστικότητας της ζήτησης θα είναι

$$E_{\Psi X} = b \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{\Psi}}$$

Ο συντελεστής ελαστικότητας προσδιορίζει την ποσοστιαία μεταβολή (αύξηση ή μείωση) που προκαλείται στη μεταβλητή Ψ για κάθε μεταβολή της X κατά 1%.

Έχει βρεθεί $b=0,5$

$$\bar{X}=9$$

$$\bar{\Psi}=5$$

$$\text{Οπότε } E_{\Psi X} = 0,5 \cdot \frac{9}{5} = 0,5 \cdot 1,8 = 0,9$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

$E_{\Psi X}=0,9$. Αυτό σημαίνει ότι αν αυξηθεί η τιμή του συγκεκριμένου αγαθού κατά 1% ή 10%, τότε η ζητούμενη ποσότητα αυτού του αγαθού θα αυξηθεί κατά 0,9% ή 9%.

Δ) το τυπικό σφάλμα εκτίμησης της Ψ θα είναι

$$S_{\Psi.X} = \sqrt{\frac{\sum \Psi_i^2 - a \sum \Psi_i - b \sum X_i \Psi_i}{n-2}}$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε :

$$S_{\Psi.X} = \sqrt{\frac{110 - 0,5 \cdot 20 - 0,5 \cdot 193}{4-2}}$$

$$S_{\Psi.X} = \sqrt{\frac{110 - 10 - 96,5}{2}}$$

$$S_{\Psi.X} = \sqrt{\frac{3,5}{2}}$$

$$S_{\Psi \cdot X} = \sqrt{1,75}$$

$$S_{\Psi X} = \pm 1,3228756 \text{ τεμάχια}$$

Ε) Για τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης έχουμε :

$$r = \sqrt{b \cdot b'}$$

Όπου :

$$b = \frac{\sum (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})}{\sum (X - \bar{X})^2} \quad \text{και} \quad b' = \frac{\sum (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})}{\sum (\Psi - \bar{\Psi})^2}$$

$$r = \sqrt{0,5 \cdot 1,3}$$

$$r = \sqrt{0,65}$$

$$r = \pm 0,81$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ :

Από την τιμή $r = 0,81$ συμπεραίνουμε ότι η συσχέτιση μεταξύ της ζήτησης του συγκεκριμένου προϊόντος σε χιλ. τεμάχια ($=\Psi$) και της τιμής του προϊόντος σε ευρώ ($=X$) αυτού είναι θετική. Δηλαδή όταν αυξάνεται η τιμή του προϊόντος σε ευρώ αυξάνεται και η ζήτηση του προϊόντος σε χιλ. τεμάχια και αντίστροφα. Επειδή $r = 0,81$ τότε έχουμε μέτρια θετική συσχέτιση. (διότι το r παίρνει το ίδιο πρόσημο με το b και επειδή εδώ έχουμε $b > 0$ τότε και $r > 0$).

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Οι τιμές Ψ_i διαφέρουν από τις θεωρητικές τιμές $\hat{\Psi}_i$, κατά μέσο όρο, κατά 1,32 Ψ_i .

ΣΤ) Για τον υπολογισμό του συντελεστή προσδιορισμού r^2 έχουμε:

$$r^2 = b \cdot b'$$

όπου έχει βρεθεί $b=0,5$, $b'=1,3$, $r=0,81$

Επομένως, αντικαθιστώντας τον παραπάνω τύπο με τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$r^2 = b \cdot b' = 0,5 \cdot 1,3 = 0,65$$

ή

$$r^2 = (0,81)^2 = 0,65 \quad \text{και} \quad 1 - r^2 = 1 - 0,65 = 0,35$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Η τιμή του προϊόντος (**=X**) προσδιορίζει τη ζητούμενη ποσότητα (**=Ψ**) αυτού κατά 65%, ενώ άλλοι άγνωστοι παράγοντες, διαφορετικοί από την τιμή, μόνο κατά 35%.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται το κατά κεφαλήν εισόδημα (X_i , σε ευρώ) μιας ομάδας ατόμων και αντίστοιχα η μέση ετήσια κατά κεφαλήν κατανάλωση (Ψ_i , σε τεμάχια) ενός αγαθού:

X_i	163	167	170	175	177	180	182	184	187	190
Ψ_i	49	55	58	63	69	70	73	74	80	94

ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ :

Α) Να προσδιοριστεί (με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων) η εξίσωση γραμμικής παλινδρόμησης της Ψ πάνω στη X και να υπολογιστούν οι θεωρητικές τιμές της Ψ .

Β) Να προσδιοριστεί η εξίσωση παλινδρόμησης της X πάνω στη Ψ .

Γ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα διασποράς και να τοποθετηθούν πάνω σε αυτό οι ευθείες παλινδρόμησης.

Δ) Να υπολογιστεί ο συντελεστής μέσης ελαστικότητας της ζήτησης.

Ε) Να βρεθεί το τυπικό σφάλμα εκτίμησης της Ψ .

ΣΤ) Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης

Ζ) Να υπολογιστεί ο συντελεστής προσδιορισμού r^2

ΛΥΣΗ

Για τον υπολογισμό των διαφορών παραμέτρων των ζητούμενων εξισώσεων, κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

	Άτομα	X_i κατά κεφαλήν εισόδημα (σε ευρώ)	Ψ_i μέση ετήσια κατά κεφαλήν κατανάλωση (σε τεμάχια)	$X_i \cdot \Psi_i$	X_i^2	Ψ_i^2	$\hat{\Psi}$	\hat{X}
	1	163	49	7987	26569	2401	-	164,85
	2	167	55	9185	27889	3025	-	168,75
	3	170	58	9860	28900	3364	-	170,7
	4	175	63	11025	30625	3969	-	173,95
	5	177	69	12213	31329	4761	-	177,85
	6	180	70	12600	32400	4900	-	178,5
	7	182	73	13286	33124	5329	-	180,45
	8	184	74	13616	33856	5476	-	181,1
	9	187	80	14960	34969	6400	-	185
	10	190	94	17860	36100	8836	-	194,1
ΣΥΝΟΛΑ	n = 10	1775	685	122592	315761	48461		

Από τον πίνακα παίρνουμε τα αθροίσματα :

$$n=10, \sum X_i = 1775, \sum \Psi_i = 685, \sum X_i^2 = 315761, \sum \Psi_i^2 = 48461,$$

$$\sum X_i \Psi_i = 122592, \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{1775}{10} = 177,5, \bar{\Psi} = \frac{\sum \Psi_i}{n} = \frac{685}{10} = 68,5$$

Α) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής :

$$\hat{\Psi} = a + bX_i$$

Όπου η σταθερά $b = \frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum (X_i) \sum (\Psi_i)}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$

αντικαθιστώντας τη σχέση έχουμε :

$$b = \frac{10 \cdot 122592 - 1775 \cdot 685}{10 \cdot 315761 - (1775)^2}$$

$$= \frac{1225920 - 1215875}{3157610 - 3150625}$$

$$= \frac{10045}{7045}$$

$$= 1,43$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ :

Στην περίπτωση μας το b είναι θετικός αριθμός $b=1,425$. Άρα, η εξάρτηση είναι θετική και δείχνει ότι, όταν το κατά κεφαλήν εισόδημα (X_i) αυξηθεί κατά ένα ευρώ τότε η μέση ετήσια κατά κεφαλήν κατανάλωση του συγκεκριμένου αγαθού θα αυξηθεί (γιατί $b>0$) κατά 1,43 τεμάχια.

Υπάρχει και η σταθερά $a = \bar{\Psi} - b\bar{X}$, όπου αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση με τα συγκεκριμένα δεδομένα έχουμε: $a = 68,5 - 1,43 \cdot 177,5 = 68,5 - 253,825 = -185,325$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Η σταθερά a εκφράζει την τιμή της Ψ όταν $X=0$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η σταθερά $a=-185,325$ προσδιορίζει (θεωρητικά) τη μέση ετήσια κατά κεφαλήν κατανάλωση ενός αγαθού που αντιστοιχεί στην τιμή $X=0$. Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\hat{\Psi} = -185,325 - 1,43X_i.$$

Άρα, οι θεωρητικές τιμές ($\hat{\Psi}_i$) της μεταβλητής Ψ_i θα βρεθούν αν στη εξίσωση δοθούν οι τιμές X_1, X_2, \dots, X_{10} .

Δηλαδή για $X_1=163$ έχουμε $-185,325 - 1,43 \cdot 163 = -185,325 - 233,09 = -418,415$

για $X_2=167$ έχουμε $-185,325 - 1,43 \cdot 167 = -185,325 - 238,81 = -424,135$

Με τον ίδιο τρόπο θα συνεχιστεί μέχρι το X_{10} διότι το πλήθος των δεδομένων είναι $n=10$.

Β) Η εξίσωση παλινδρόμησης της μεταβλητής X πάνω στην μεταβλητή Ψ είναι :

$$\hat{X} = a' + b' \Psi_i$$

Η σταθερά b' υπολογίζεται από τον τύπο :

$$b' = \frac{n \sum X_i \Psi_i - \sum (X_i) \sum (\Psi_i)}{n \sum \Psi_i^2 - (\sum \Psi_i)^2}$$

όπου αντικαθιστώντας τη σχέση έχουμε:

$$b' = \frac{10 \cdot 122592 - 1775 \cdot 685}{10 \cdot 48461 - (685)^2}$$

$$= \frac{1225920 - 1215875}{484610 - 469225}$$

$$= \frac{10045}{15385}$$

$$= 0,65$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Το b' είναι θετικός αριθμός $b' = 0,65$. Άρα η εξάρτηση είναι θετική και δείχνει ότι όταν αυξηθεί η μέση ετήσια κατά κεφαλήν κατανάλωση ενός αγαθού κατά 1ευρώ θα πρέπει να αυξηθεί ($b' > 0$) το κατά κεφαλήν εισόδημα μιας ομάδας ατόμων κατά 0,65 τεμάχια..

Η σταθερά a' υπολογίζεται από τον τύπο

$$a' = \bar{X} - b' \bar{\Psi}$$

Όπου αντικαθιστώντας τη σχέση έχουμε:

$$a' = 177,5 - 0,65 \cdot 68,5 = 177,5 - 44,52 = 133$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Η σταθερά a' προσδιορίζει (θεωρητικά) τη κατά κεφαλήν κατανάλωση ενός αγαθού που αντιστοιχεί στο κατά κεφαλήν εισόδημα $\Psi = 0$. Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι :

$$\hat{X} = a' + b' \Psi_i$$

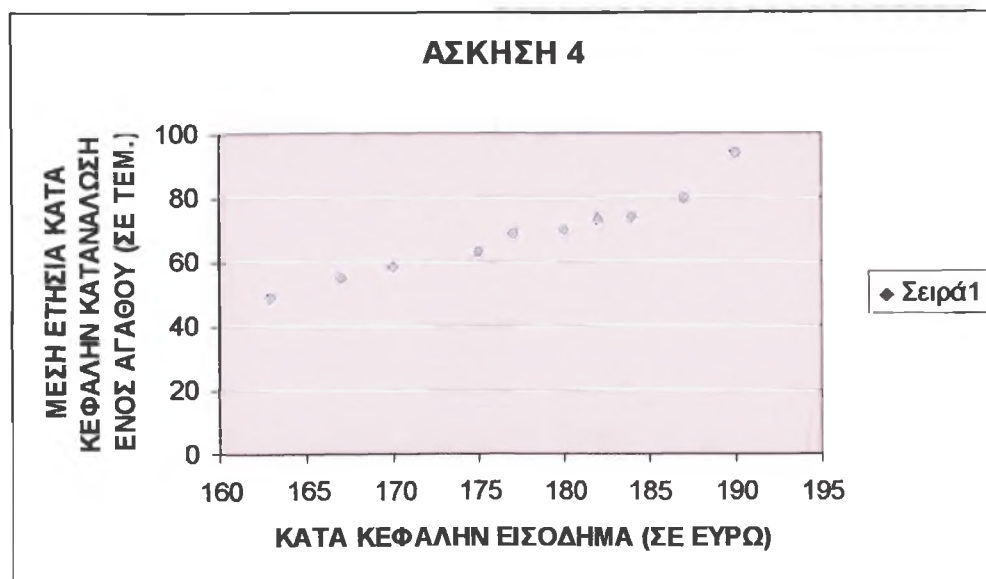
$$\hat{X} = 5590 + (-79,013) \Psi_i$$

Οι θεωρητικές τιμές (\hat{X}_i) της μεταβλητής X_i θα βρεθούν αν στην παραπάνω εξίσωση δώσουμε διαδοχικά τις τιμές Ψ_1, \dots, Ψ_{10} .

Δηλαδή έχουμε $\hat{X}_1 = 133 + 0,65 \cdot 49 = 133 + 318,5 = 164,85$

Με τον ίδιο τρόπο θα συνεχιστεί μέχρι την τιμή Ψ_{10} , διότι το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n=10$.

Γ) Διάγραμμα Διασποράς



Δ) Ο συντελεστής μέσης ελαστικότητας της ζήτησης θα είναι

$$E_{\Psi X} = b \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{\Psi}}$$

Ο συντελεστής ελαστικότητας προσδιορίζει την ποσοστιαία μεταβολή (αύξηση ή μείωση) που προκαλείται στη μεταβλητή Ψ για κάθε μεταβολή της X κατά 1%.

Έχει βρεθεί $b=1,43$

$$\bar{X}=177,5$$

$$\bar{\Psi}=68,5$$

$$\text{Οπότε } E_{\Psi X} = 1,43 \cdot \frac{177,5}{68,5} = 1,43 \cdot 2,59 = 3,70$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

$E_{\Psi X}=3,70$. Αυτό σημαίνει ότι αν μεταβληθεί το κατά κεφαλήν εισόδημα μιας ομάδας ατόμων κατά 1% ή 10% (αυξηθεί), τότε η μέση ετήσια κατά κεφαλήν κατανάλωση σε τεμάχια ενός αγαθού θα αυξηθεί κατά 3,70% ή 37%.

Δ) το τυπικό σφάλμα εκτίμησης της Ψ θα είναι

$$S_{\Psi.X} = \sqrt{\frac{\sum \Psi_i^2 - a \sum \Psi_i - b \sum X_i \Psi_i}{n-2}}$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε :

$$S_{\Psi.X} = \sqrt{\frac{48461 - (-185,325) \cdot 685 - 1,43 \cdot 122592}{10-2}}$$

$$S_{\Psi.X} = \sqrt{\frac{48461 - (-126947,62) - 175306,56}{8}}$$

$$S_{\Psi.X} = \sqrt{\frac{175408,62 - 175306,56}{8}}$$

$$S_{\Psi.X} = \sqrt{\frac{102,06}{8}}$$

$$S_{\Psi.X} = \sqrt{12,75}$$

$$S_{\Psi \cdot X} = \pm 3,57 \text{ τεμάχια}$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Οι τιμές Ψ_i διαφέρουν από τις θεωρητικές τιμές $\hat{\Psi}_i$, κατά μέσο όρο, κατά $3,57\Psi_i$.

Ε) Για τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης έχουμε :

$$r = \sqrt{b \cdot b'}$$

Όπου :

$$b = \frac{\sum (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})}{\sum (X - \bar{X})^2} \quad \text{και} \quad b' = \frac{\sum (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})}{\sum (\Psi - \bar{\Psi})^2}$$

$$r = \sqrt{1,43 \cdot 0,65}$$

$$r = \sqrt{0,93}$$

$$r = \pm 0,96$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Από την τιμή $r = 0,96$ συμπεραίνουμε ότι η συσχέτιση μεταξύ της μέσης ετήσιας κατά κεφαλήν κατανάλωση ενός αγαθού ($=\Psi$) και του κατά κεφαλήν εισοδήματος μιας ομάδας ατόμων ($=X$) είναι θετική γιατί ο r παίρνει ότι πρόσημο έχει ο b , όπου εδώ $b > 0$. Δηλαδή όταν αυξάνεται η μέση ετήσια κατά κεφαλήν κατανάλωση ενός αγαθού τότε αυξάνεται και το κατά κεφαλήν εισόδημα μιας ομάδας ατόμων και αντίστροφα. Επειδή $r = 0,96$ τότε έχουμε θετική συσχέτιση.

Ζ) Για τον υπολογισμό του συντελεστή προσδιορισμού r^2 έχουμε:

$$r^2 = b \cdot b'$$

όπου έχει βρεθεί $b=1,43$, $b'=0,65$, $r=0,96$

Επομένως, αντικαθιστώντας τον παραπάνω τύπο με τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$r^2 = b \cdot b' = 1,43 \cdot 0,65 = 0,92$$

ή

$$r^2 = (0,96)^2 = 0,92 \quad \text{και} \quad 1 - r^2 = 1 - 0,92 = 0,08$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Επομένως, η μέση ετήσια κατά κεφαλήν κατανάλωση ($=\Psi$) εξαρτάται από το κατά κεφαλήν εισόδημα ($=X$) κατά 92%, ενώ κατά ποσοστό 8%, επιδρούν άλλοι άγνωστοι παράγοντες. Δηλαδή, Ο κυριότερος προσδιοριστικός παράγοντας που διαμορφώνει την κατά κεφαλήν κατανάλωση είναι το κατά κεφαλήν εισόδημα .

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1. Τα Προϊόντα ή Οικονομικά Αγαθά.

ΑΝΑΓΚΗ: Αίσθημα έλλειψης \Rightarrow επιθυμία ικανοποίησης.

ΑΓΑΘΑ: Μέσα ικανοποίησης των αναγκών.

- Ελεύθερα αγαθά: Άφθονα στη φύση.
- Οικονομικά αγαθά ή Προϊόντα ή Εμπορεύματα: Αποτέλεσμα παραγωγικής διαδικασίας.

Βρίσκονται σε στενότητα.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΑΓΑΘΩΝ

α) Υλικά - Άϋλα (υπηρεσίες) β) Διαρκή - Καταναλωτά γ) Καταναλωτικά - Κεφαλαιουχικά
↓ ↓ ↓
(Σύσταση) (Διάρκεια) (Σκοπός)

2. Αγορά

Ο γεωγραφικός χώρος και τα μέσα που χρησιμοποιούνται για να πραγματοποιηθεί μια αγοραπωλησία.

3. Επιχειρήσεις: Παραγωγικές μονάδες με διάφορες νομικές μορφές. ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ : α) Τι; β) Πόσο; γ) Πώς; δ) Τόπος ε) Τιμή. ΣΚΟΠΟΣ: Μεγιστοποίηση κέρδους (Μεγάλη παραγωγή - Υψηλή τιμή - Χαμηλό κόστος).

II) Νοικοκυριό: Οικογένεια.

ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ : α) Πόσες δαπάνες κατανάλωσης - Πόση αποταμίευση. (Δαπάνης εισοδήματος) β) Δαπάνες: Πού και σε ποιες αναλογίες, γ) Αποταμίευση: Πόση και για ποιο σκοπό.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΠΟΥ ΕΠΗΡΕΑΖΟΥΝ ΤΙΣ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΔΑΠΑΝΗΣ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ:

α) Μέγεθος εισοδήματος γ) Γεωγραφική θέση
β) Μέγεθος νοικοκυριού- Ηλικία μελών δ) Κοινωνικό περιβάλλον.

ΕΠΙΔΙΩΞΗ ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΟΥ: Δεδομένο εισόδημα ⇒ Πληρέστερη ικανοποίηση αναγκών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: α) Οι αποφάσεις του νοικοκυριού δεν παίρνονται χωριστά, β) Ορισμένα νοικοκυριά αποτελούν και επιχειρήσεις.

III. Κράτος: Επεμβαίνει στην οικονομική ζωή μιας χώρας (φορολογία, επιδόματα, άμυνα κ.λ.π.)

ΡΟΛΟΣ ΚΡΑΤΟΥΣ: Διατήρηση κοινωνικής ισορροπίας, ώστε να ελαχιστοποιούνται οι δυνάμεις που θα μπορούσαν να ανατρέψουν το κοινωνικό-πολιτικό καθεστώς, που το ίδιο το κράτος εκφράζει.

4. Οι Συντελεστές της Παραγωγής

ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ: Τρόπος μετασχηματισμού της ύλης σε μορφές χρήσιμες για τον άνθρωπο.

α) Εργασία: Πνευματική - Σωματική προσπάθεια \Rightarrow παραγωγική διαδικασία.
β) Έδαφος: Φυσικό περιβάλλον \Rightarrow παραγωγή αγαθών. γ) Κεφάλαιο: Παραχθέντα μέσα παραγωγής \Rightarrow παραγωγή άλλων αγαθών. δ) Επιχειρηματικότητα: Ικανότητα συνδυασμού των άλλων συντελεστών παραγωγής.

5. Ο Καταμερισμός των Έργων

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ: Η Εξειδίκευση του ατόμου στην παραγωγή ορισμένων μόνο προϊόντων, ενώ καταναλώνει προϊόντα των οποίων την παραγωγή δε συμμετέχει.

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ: α) Μεγάλη απόδοση β) Δεξιότητα γ) Βελτίωση τρόπου παραγωγής.

ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ: Εξειδίκευση \Rightarrow ανιαρή απασχόληση, αλλοτρίωση.

6. Το Χρήμα

Προβλήματα στην εμπράγματη ανταλλακτική οικονομία (ανταλλαγή είδους με είδος).

Χρήμα: Γενικό μέσο ανταλλαγής, κοινωνικά αποδεκτό.

Η εμπράγματη ανταλλαγή χωρίζεται σε δύο πράξεις: Πώληση και Αγορά.

7. Η έννοια του κόστους.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ ή **ΚΟΣΤΟΣ ΕΥΚΑΙΡΙΑΣ** ή **ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ** ενός αγαθού είναι η θυσία των άλλων αγαθών που θα μπορούσαν να παραχθούν με τους ίδιους παραγωγικούς συντελεστές.

Κόστος ευκαιρίας κάθε πρόσθετης μονάδας του αγαθού Α (σε μονάδες του αγαθού Β) = $\frac{\text{Μονάδες του αγαθού Β που θυσιάστηκαν}}{\text{Μονάδες του αγαθού Α που παράγονται}}$

Κόστος ευκαιρίας κάθε πρόσθετης μονάδας του αγαθού Β (σε μονάδες του αγαθού Α) = $\frac{\text{Μονάδες του αγαθού Α που θυσιάστηκαν}}{\text{Μονάδες του αγαθού Β που παράγονται}}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το κόστος ευκαιρίας εκφράζεται σε απόλυτες τιμές.

ΣΧΕΣΗ ΧΡΗΜΑΤΙΚΟΥ - ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

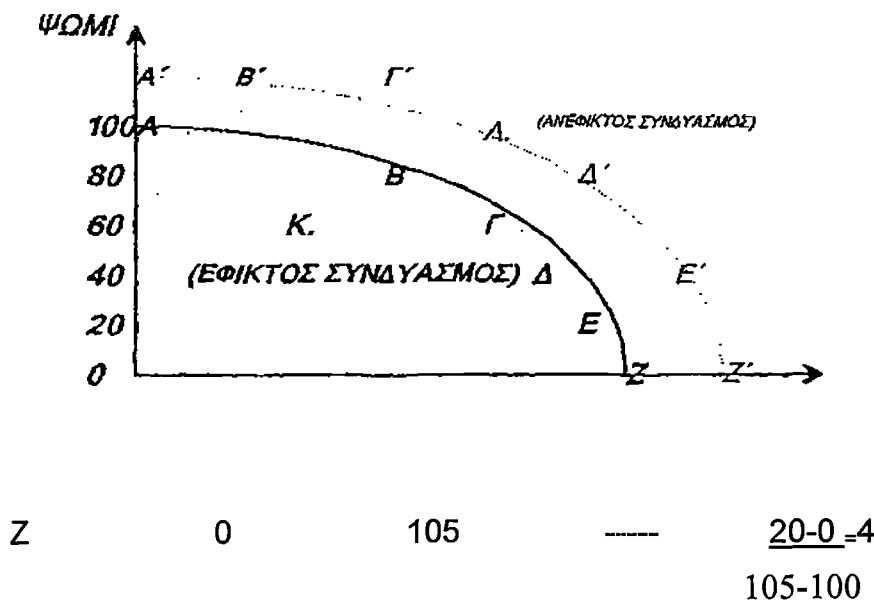
Το χρηματικό κόστος είναι το πραγματικό ή εναλλακτικό κόστος εκφρασμένο σε χρήμα.

8. Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ: α) Η οικονομία χρησιμοποιεί όλους τους παραγωγικούς συντελεστές (πλήρως και αποδοτικά). β) Η τεχνολογία παραγωγής είναι δεδομένη, γ) Η οικονομία παράγει δύο μόνο αγαθά (σταθεροί παραγωγικοί συντελεστές).

ΚΟΣΤΟΣ ΕΥΚΑΙΡΙΑΣ ΚΑΘΕ ΠΡΟΣΘΕΤΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ	ΨΩΜΙ (χιλ. κιλά)	TANKS (κομμάτια)	ΨΩΜΙΟΥ	TANKS
A	100	0	$\frac{40-0}{100-80} = 2$	-----
B	80	40	$\frac{70-40}{80-60} = 1,5$	$\frac{100-80}{40-0} = 0,5$
Γ	60	70	$\frac{90-70}{60-40} = 1$	$\frac{80-60}{70-40} = 0,66$
Δ	40	90	$\frac{100-90}{40-20} = 0,5$	$\frac{60-40}{90-70} = 1$
E	20	100	$\frac{105-100}{20-0} = 0,25$	$\frac{40-60}{100-90} = 2$



Η ΚΠΔ δείχνει τις μεγαλύτερες ποσότητες ενός προϊόντος που είναι δυνατό να

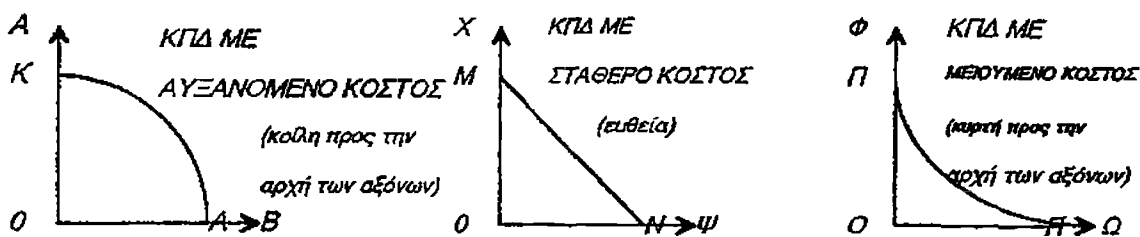
- παραχθούν σε μία οικονομία για κάθε δεδομένη ποσότητα του άλλου προϊόντος.
- Ο συνδυασμός Κ είναι εφικτός, που σημαίνει ότι η οικονομία αυτή δε χρησιμοποιεί όλες τις παραγωγικές της δυνατότητες και όλοι ή ορισμένοι οι παραγωγικοί συντελεστές υποαπασχολούνται.
 - Ο συνδυασμός Λ είναι ανέφικτος, γιατί αντιστοιχεί σε ποσότητες των δύο αγαθών ($\Psi\omega\mu\acute{\iota} = 20$, $\Gamma\acute{\alpha}\nu\kappa\varsigma = 90$) που δεν μπορούν να παραχθούν με τους παραγωγικούς συντελεστές που έχει η οικονομία.
 - Ο συνδυασμός Λ γίνεται εφικτός, αν αυξηθούν οι παραγωγικοί συντελεστές ή αν βελτιωθεί η τεχνολογία παραγωγής, οπότε η ΚΠΔ μετατοπίζεται δεξιά, στη θέση Α'ΒΓ'Δ'Ζ'.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

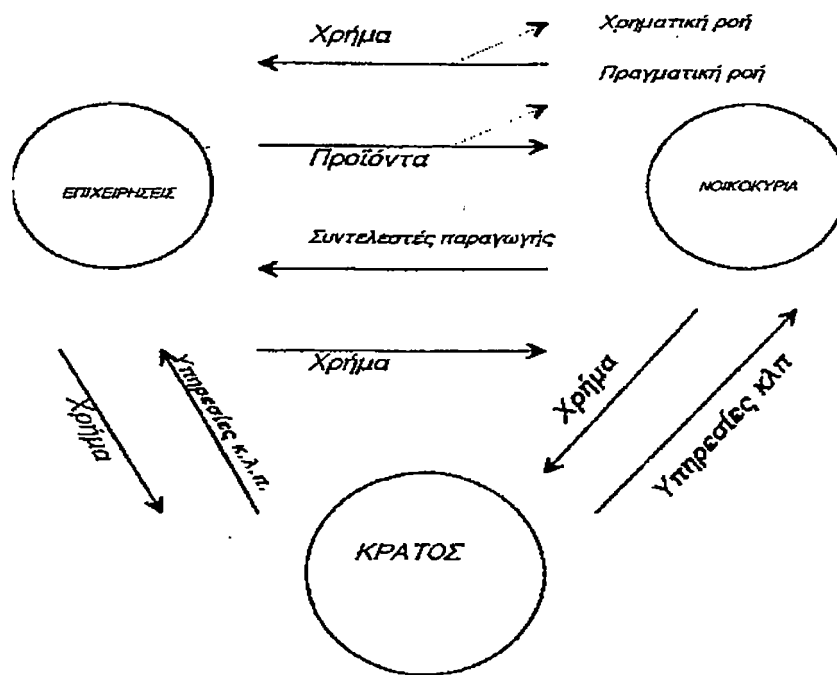
Η μορφή της ΚΠΔ σχετίζεται με το αν το κόστος ευκαιρίας είναι αυξανόμενο, σταθερό, ή μειούμενο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Η μορφή της ΚΠΔ σχετίζεται με το αν το κόστος ευκαιρίας είναι αυξανόμενο, σταθερό, ή μειούμενο.



9. Το Οικονομικό Κύκλωμα



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ :

- α) Οι ροές μεταξύ επιχειρήσεων και νοικοκυριών (πραγματική και χρηματική) είναι αντίθετες.
- β) Οι ροές είναι συνεχείς.
- γ) Οι ροές δεν έχουν πάντα το ίδιο μέγεθος σε διαφορετικές χρονικές περιόδους.

10. Το Κύριο Οικονομικό Πρόβλημα

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ : Περιορισμένα αγαθά - Απεριόριστες ανάγκες.

Έλλειψη παραγωγικών συντελεστών \Rightarrow έλλειψη αγαθών.

ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ :

Ανάπτυξη τεχνολογίας, εξεύρεση νέων παραγωγικών πόρων κ.λ.π.

11. Η Ιδιοκτησία των Συντελεστών Παραγωγής.

Οι σχέσεις παραγωγής, δηλ. ο τρόπος κατοχής των παραγωγικών συντελεστών χαρακτηρίζει το κοινωνικοοικονομικό σύστημα.

ΚΑΠΙΤΑΛΙΣΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

- Ατομική ιδιοκτησία μέσων παραγωγής.
- Ατομικό συμφέρον.
- Οικονομική ελευθερία.
- Μηχανισμός αγοράς και τιμών.
- Ελεύθερος ανταγωνισμός

ΜΙΚΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Επέμβαση του κράτους να διορθώσει τα τρωτά του καπιταλισμού.

- Ατομική και κρατική ιδιοκτησία μέσων παραγωγής.
- Ατομικό και κοινωνικό συμφέρον.
- Οικονομική ελευθερία.
- Μηχανισμός τιμών.
- Πλήρης ανταγωνισμός.

ΣΟΣΙΑΛΙΣΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

- Κοινωνική ιδιοκτησία μέσων παραγωγής.
- Κοινωνικό συμφέρον.
- Κεντρικός προγραμματισμός.
- Κυριαρχία του κράτους.

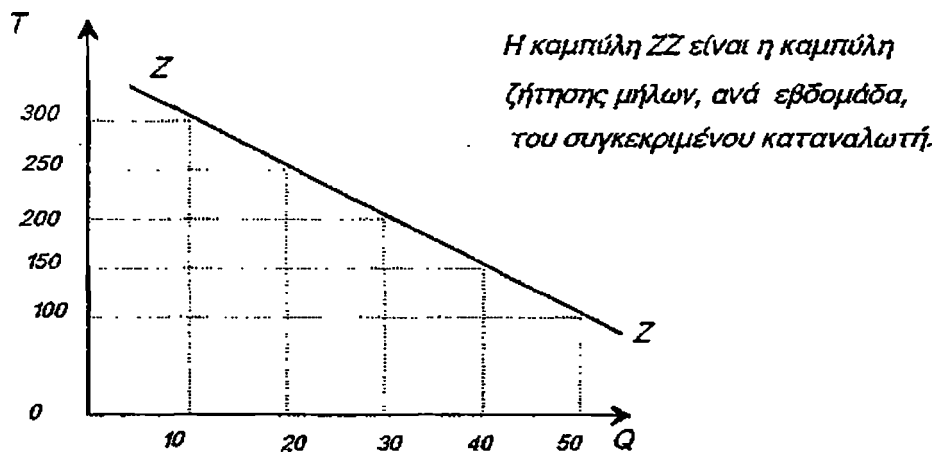
12. Ο ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ

ΝΟΜΟΣ ΖΗΤΗΣΗΣ: Όταν αυξάνεται η τιμή ενός αγαθού, μειώνεται η ζητούμενη ποσότητα και το αντίστροφο. Όταν μειώνεται η τιμή ενός αγαθού αυξάνεται η ζητούμενη ποσότητα.

13. Καμπύλη Ζήτησης

Δίνεται ο πιο κάτω υποθετικός πίνακας ζήτησης μήλων, ενός συγκεκριμένου καταναλωτή.

Τιμή μονάδας (T) (δρχ. ανά κιλό)	Ζητούμενη ποσότητα (Q) (κιλά ανά εβδομάδα)
300	10
250	20
200	30
150	40
100	50



- Η καμπύλη ζήτησης ενός αγαθού δείχνει τη ζητούμενη ποσότητα που ο καταναλωτής είναι διατεθειμένος να αγοράσει σε κάθε τιμή.
- Η καμπύλη ζήτησης κατέρχεται από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά, έχει δηλ. αρνητική κλίση, εξαιτίας του νόμου της ζήτησης, δηλ. της αντίστροφης σχέσης μεταξύ τιμής και ζητούμενης ποσότητας.

14. Η Καμπύλη Ζήτησης στην Αγορά

Η αγοραία ή συνολική καμπύλη ζήτησης είναι το άθροισμα των ατομικών καμπυλών ζήτησης και προκύπτει με τον ίδιο τρόπο που προκύπτουν και οι ατομικές καμπύλες ζήτησης.

15. Οι άλλοι Παράγοντες που Προσδιορίζουν τη Ζήτηση
α) Προτιμήσεις Καταναλωτών

Π.χ. η ζήτηση παγωτών αυξάνει τους καλοκαιρινούς μήνες.

β) Εισόδημα καταναλωτών

Αύξηση εισοδήματος \Rightarrow αύξηση ζήτησης για τα περισσότερα αγαθά.

ΟΜΩΣ: Αύξηση εισοδήματος \Rightarrow μείωση ζήτησης ορισμένων αγαθών ("κατώτερα αγαθά")

γ) τιμές των άλλων αγαθών που σχετίζονται με το συγκεκριμένο αγαθό

ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΑΤΑ: Είναι τα αγαθά που το ένα μπορεί να υποκαταστήσει το άλλο
(π.χ. βούτυρο - μαργαρίνη)

- Όταν αυξάνεται η τιμή ενός αγαθού, τότε αυξάνεται και η ζήτηση του υποκατάστατου του (σχέση ευθεία).

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ: Είναι τα αγαθά που η κατανάλωση του ενός συνεπάγεται και την κατανάλωση του άλλου (π.χ. αυτοκίνητο - βενζίνη).

- Όταν αυξάνεται η τιμή ενός αγαθού, τότε μειώνεται η ζήτηση του συμπληρωματικού του (σχέση αντίστροφη).

δ) Προσδοκίες σχετικά με τη μελλοντική εξέλιξη των τιμών και εισοδημάτων.

Αν αναμένεται αύξηση στην τιμή ενός αγαθού, οι καταναλωτές αυξάνουν τις τρέχουσες αγορές τους, για να κερδίσουν απ' τη χαμηλότερη τιμή που επικρατεί τώρα.

ε) ο αριθμός των καταναλωτών

Αν αυξηθεί ο αριθμός των καταναλωτών που ζητούν ένα αγαθό, η καμπύλη ζήτησης θα μετατοπισθεί δεξιά και αντίστροφα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ2

Στο παράρτημα 2 παραθέτονται δύο άρθρα από τον Οικονομικό Ταχυδρόμο (1^{ης} Απριλίου 2004). Το πρώτο άρθρο αναφέρεται στην παγκόσμια πληθυσμιακή αύξηση, ενώ το δεύτερο αναφέρεται στη διαδικασία λήψης αποφάσεων των Μάνατζερ. Επίσης, παραθέτονται και δύο γραφήματα που αναφέρονται στους φόβους και στις ανησυχίες των Ευρωπαίων Πολιτών.(1997 Ευρωπαϊκά Κείμενα)

Η ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΗ ΕΚΡΗΞΗ ΤΕΛΕΙΩΣΕΙ!

Μείωση στοιχεία δείχνουν επιβράδυνση

την αυθιγικών τάσεων στον παγκόσμιο πληθυσμό

Μά και ιδιαίτερα σημαντικά συμπτώματα

την νέων στο σύνολο του ενεργού πληθυσμού

Ο Τ. ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ



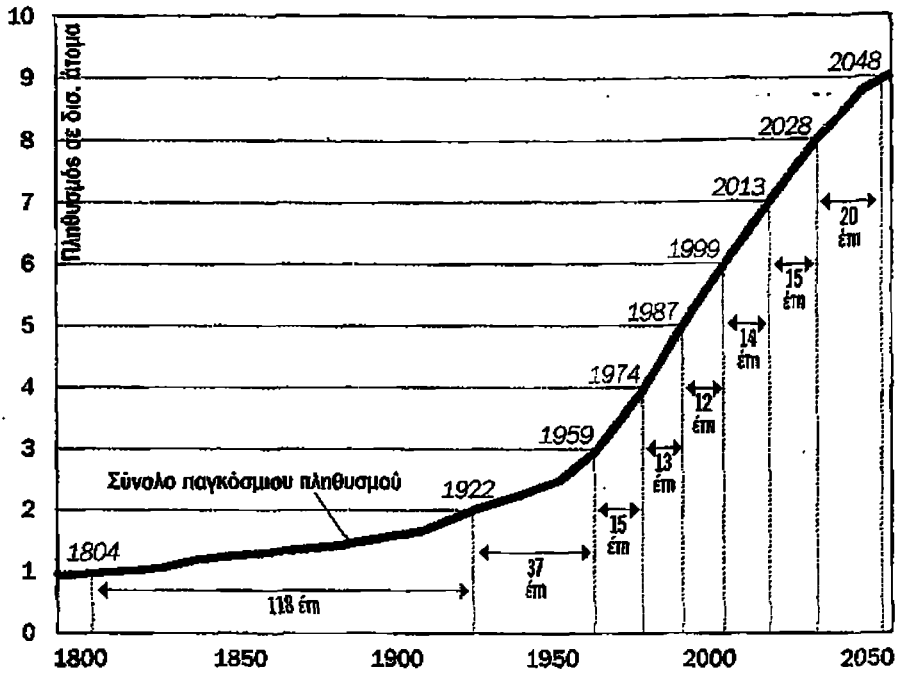
ΑΡΑ ΤΗ ΣΥΝΕΚΙΧΟΜΕΝΗ αύξηση του παγκόσμιου πληθυσμού, ο 21ος αιώνας έχει ήδη καταρχάς την αντίστροφη «συναιφική του: για παράδειγμα, άνω με τη χρονία, ο αριθμός των γέννησών που προοιβάονται στον γκόσμιο πληθυσμό είναι όλο και κρότερος. Τα 74 εκατομμύρια που ηοοιβάσαν το 2002 είναι πάλι άνω-κατωά με τα 87 εκατομμύρια που είναι ηοοιβάσει τρεις χρονία νωρίτερα. Η όνη αυτή ηροφάνας αναμέεται να ει συνάσει. Στην ηροφάση, η ηοοροφή αυτή είναι από πάλι πιο άλιη: ο ηυθός αύξησης του πληθυσμού είναι ίσως ακόμη σμηνατικός, 2% το 2002, αλλά είναι σέασητικά ηροηκόμενος σε όσηση με τους αντί-οικους ηυθούς ηπν από 40 χρόνια πριν (1963-1964 η αντίστροφη αύξηση από 2,2% - μία ολόκληρη ηονάδα ηρακίωδη).

Το αμερικανικό Census Bureau¹⁾, άό το οποίο ηαίρωρη: τα στοιχεία

το 2050, από τα 9,9 στοικατομμύρια στα 9,4. Σηηεραι η ηροβλάση τους είναι ακόμη πιο μικρή: 8,8, ενώ ηπέται να έχει κνας συνέσηση ότι αύξηση ή ηροβλάση στην ηροφάση, όλη είναι από ακόμης μια κερηκή υπόθεση σε μια ηραία σενάριο που ηπορεί να έχει ένα σην η να είναι ως και 2 διο, η και ηροοιότερο.

Το Census Bureau κάνει μια έα-ηρος πιο υήληη ηροβλάση (9,1 διο, όρωη), αλλά η ηροοιήση των ηροβλάσεων ακόλουθεί τις ίδιες κερη-όψεις: η ανηόληση γίνεται όληη ηρος τα κάρη, άπου τέοερα χροία ηπν έδιε 9,3 στοικατομμύρια για το 2050. Αυτή η διακόξς ηεοιηηει ηρο-οαήοηη των ηροβλάσημενων ηεγε-όων του παγκόσμιου πληθυσμού σε-οηέεται σε κάρους ηποδοηόηους, αλλά σε ηραηατικές έξελίξεις. Έτσι, για ηροβλάση, ένα ηηηια ης ανα-ηποοιήση ηπορεί να εσηηθεί από τη θροηή που κέρει το AIDS σε ηια-οσρα από ηεποξες. Άλλο ηηηια, όηη-ηραηακά πιο σμηνατικό, είναι η πάλι πιο ταξείη ηόση ης γονιόηηηος από την αναηέληση. Άντιόερα ηρος τη ηενηηηκότερη (ηου είναι κιάος ο λόγος του σσηολικού πληθυσμού ηπος τα ηαηιά ηου ηενηόηεται - ηηήηηη όπος το όηηο εααρηαιό, η.κ. από την ηακίκαη όνηση του πληθυσμού), η γονιόηηη (ηα ηαηιά ηου αναμέεται να ώπει στην κόρηη ηια νυακά σμη-δίοηκα του βίου ης) είναι η αυση-οσηή βόση ης ηηηοηακής όνηη-ηηης. Άλλά αυτή έααρηαιό από οικο-νηοικούς, κοηωνικούς, ίσοοοηικούς και άλλους ηαηόηητες. Οι ηροβλά-ηηες του σσηολικού σμηόηόηηος σε ηια ηείωση ης γονιόηηηος ηροβλά-όηηηας ηονηέλα από ηεποξες όηηο ηήη η γονιόηηηηα έηε ηεποξεί ηροη-

Χρόνος που απαιτείται για να προστεθεί ένα δισεκατομμύριο στον παγκόσμιο πληθυσμό



γούμενος (κυρίως στις ανεπτυγμένες χώρες). Ωστόσο, κατά τη δεκαετία του 1990, η γονιμότητα συρρικνώθηκε πολύ πιο γρήγορα απ' ό,τι αναμενόταν: στις αρχές της δεκαετίας ήταν περίπου 3,3 και το 2002 είχε ήδη μειωθεί στα 2,6 (που είναι, ακόμη, πάνω από το επίπεδο απλής ανανέωσης του

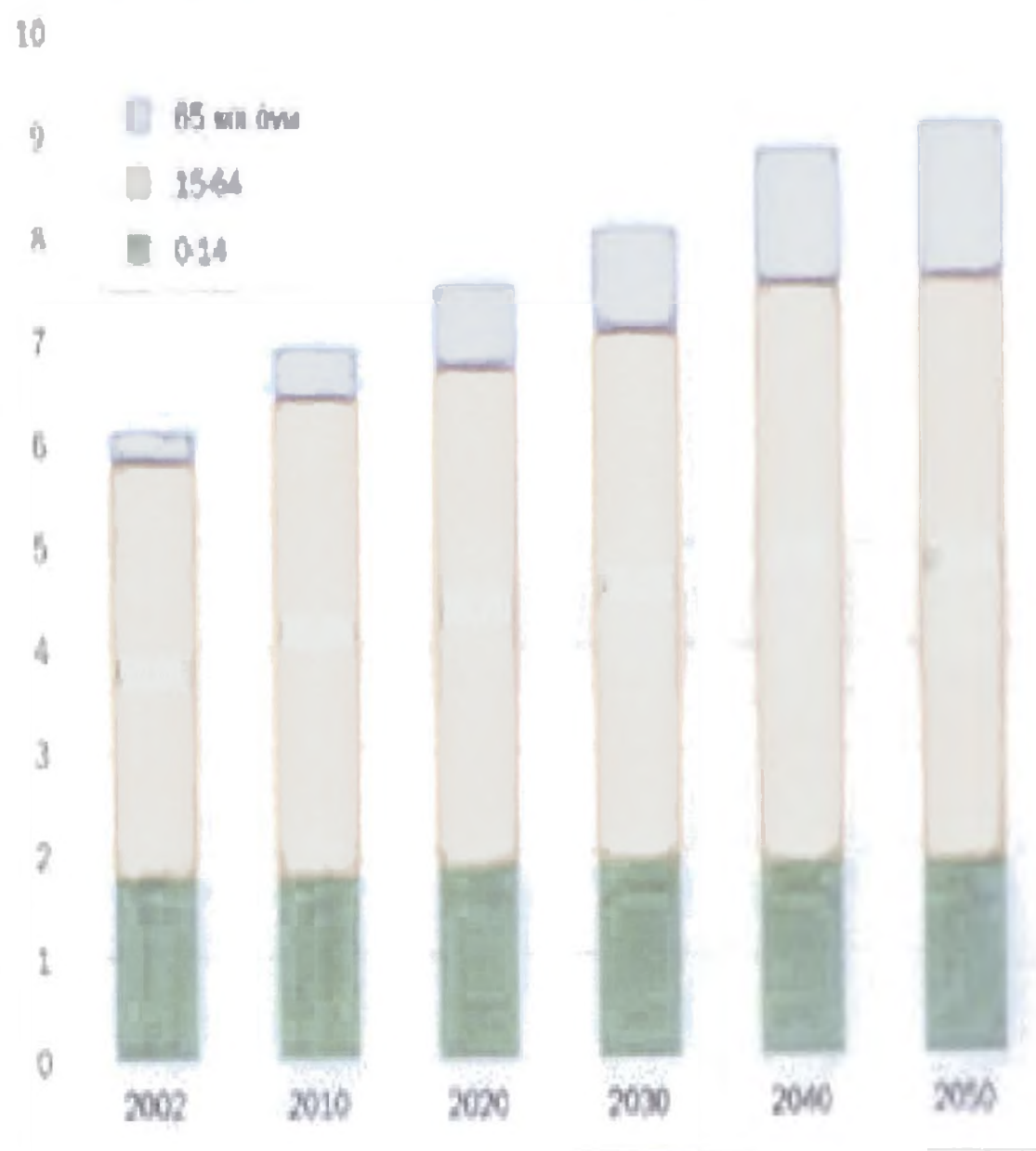
πληθυσμού -2,1 - αλλά και πολύ πιο κάτω από το αναμενόμενο). Στα επόμενα χρόνια ή δεκαετίες, όλες οι προβλέψεις συγκλίνουν στη διαπίστωση ότι η γονιμότητα θα περιοριστεί συνολικά στα επίπεδα ανανέωσης και ίσως και πιο κάτω από αυτά, παρά τις σημαντικές αποκλίσεις ανά περιοχή. Ωστό-

σο, ο πληθυσμός θα συνεχίσει να αυξάνει (με μειούμενους ρυθμούς) εξαιτίας της ίδιας της διάρθρωσής του (τώρα υπάρχουν πολύ περισσότερα παιδιά – απ' ό,τι αντιστοιχούν σε έναν απλώς αναμενόμενο πληθυσμό – εξαιτίας της υψηλής προηγούμενης γονιμότητας) και κέρη στην προβλεπόμενη επέκταση των συνθηκών που επιτρέπουν περισσότερα χρόνια ζωής.

Τα δύο αυτά στοιχεία έχουν σημαντικές οικονομικές και κοινωνικές επιπτώσεις. Μια από αυτές είναι αυτό που στην τελευταία έκθεση της UNFPA (του οργανισμού του ΟΗΕ για τον πληθυσμό) αποκαλείται «*δημογραφικό πριμ*», δηλαδή αύξηση του ποσοστού των νέων ηλικιών οι οποίες αποτελούν το 20% του παγκόσμιου πληθυσμού⁹¹. Και αυτοί οι νέοι, καθώς και η επόμενη γενιά (το ήμισυ του πληθυσμού είναι ηλικίας κάτω των 25 ετών), που ετοιμάζονται να μπουν στην «*ενήλικη*» και οικονομικά ενεργό ζωή τους, μπορεί να είναι για τον κόσμο ολόκληρο «*πραγματική ευκαιρία*» που, όπως αναφέρει η έκθεση, «*πιάνει*» σιάζεται μόνο μία φορά» (αν και για ορισμένες χώρες, που έχουν ακόμη υψηλή γονιμότητα, η «*μεταβατική*» αυτή φάση μπορεί να καθυστερήσει). Όπως επισημαίνεται στην έκθεση, «*για μεγάλο αριθμό χωρών όπου η γονιμότητα μειώθηκε αισθητά τα τελευταία 20 χρόνια, ο ενεργός πληθυσμός (15-60 χρόνων) θα αντιπροσωπεύει, κατά τις επόμενες δεκαετίες, ένα σχετικά πολύ πιο σημαντικό τμήμα του πληθυσμού σε σχέση με τον εξαρτώμενο πληθυσμό των νέων και των ηλικιωμένων*».

Η θετική εικόνα που προβάλλει όμως από αυτήν τη δημογραφική έκρηξη επιβραδύνεται από άλλους εξίσου σημαντικούς παράγοντες. Για παράδειγμα, κάθε 14 δευτερόλεπτα ένας νέος μολύνεται από AIDS στον κόσμο. Τα μισά από τα νέα κρούσματα αφορούν νέους και ιδιαίτερα τις νέες γυναίκες. Από αυτή τη σκοπιά, η UNFPA υπολογίζει ότι από τις πιο οικονομικά αποδοτικές επενδύσεις είναι αυτές σε Υγεία, Εκπαίδευση και ιδίως σε αναπαραγωγικές υπηρεσίες. «*Η πρόληψη κάθε νέας μόλυνσης από τον 10 του AIDS εκτιμάται ότι αντιπροσωπεύει όφελος ύψους 34.600 δολαρίων για μια φτωχή χώρα με ετήσια κατά κεφαλήν εισόδημα 1.000 δολαρίων*». Το 1994 έρε υπολογισθεί ότι το σύνολο των δαπανών που θα αρκούσε για να καλύψει τις απαραίτητες αναπαρα-

Η αύξηση του ενεργού πληθυσμού 2002-2050



γωγικές υπηρεσίες στις αναπτυσσόμενες χώρες θα ανερχόταν σε 18,5 δισ. δολάρια για το 2005 (σήμερα θα μπορούσαν να εκτιμηθούν σε λίγο περισσότερα εξαιτίας του AIDS). Ωστόσο, σύμφωνα με την UNFPA, το 2001 οι δαπάνες που πράγματι έγιναν, ανήλθαν μόνο σε 9,6 δισ. δολάρια, και η «διεθνής κοινότητα» έδωσε 2,5 δισ. δολάρια, δηλαδή λιγότερο από το ήμισυ του ποσού που είχε η ίδια δεσμευθεί να δώσει το 2000. Το ίδιο απαισιόδοξες, όσον αφορά το AIDS, είναι και οι εκτιμήσεις του Census Bureau, ιδιαίτερα για τις χώρες της Αφρικής: «τα επίπεδα θνησιμότητας στη δεκαετία που διανύουμε θα μειώσουν την προσδοκία ζωής στα 30 χρόνια το 2010, επίπεδα δηλαδή που δεν έχουμε ξαναδεί από τις αρχές του 20ού αιώνα!». Και όμως επισημαίνει ταυτόχρονα ότι «αν ενισχυθούν τα προγράμματα αποφυγής της μετάδοσης του ιού από μητέρα σε παιδί, τότε η πορεία της παιδικής θνησιμότητας μπορεί να αλλάξει» – όπως συνέβη σε χώρες όπως η Ταϊλάνδη, η Σενεγάλη και η Ουγκάντα.

Ακόμη όμως και αν εκλείψει η ανασχετική επίδραση του AIDS, εκεί όπου προσκρούει με μεγαλύτερη ένταση η δυναμική της δημογραφικής έκρηξης είναι οι μηχανισμοί «μετάδοσης της φτώχειας από γενιά σε γενιά» οι οποίοι θα έπρεπε να «σπάσουν». Η ίδια η UNFPA, που διατυπώνει την πρόταση, υπολογίζει ταυτοχρόνως ότι 238 εκατομμύρια νέοι, δηλαδή ο ένας στους τέσσερις, υποφέρουν από περιορισμούς της ακραίας φτώχειας, ενώ τα περίφημα «παιδιά των δρόμων» πολλαπλασιάζονται αριθμητικά, και υπολογίζεται ότι συνολικά αυτά ανέρχονται σε 100-250 εκατομμύρια (εκ των οποίων το ήμισυ στη Λατινική Αμερική), ενώ 57 εκατομμύρια είναι οι νεαροί και 96 εκατομμύρια οι νεαρές (ηλικίας 15-24 ετών) που δεν γνωρίζουν ούτε γραφή ούτε ανάγνωση – με μόνη θετική καταγραφή τους ταχύτερους ρυθμούς πρόσβασης των κοριτσιών στην εκπαίδευση.

Αν ο κόσμος έχει τη «μοναδική ευκαιρία» λόγω του «δημογραφικού πριμ» των σημερινών εφήβων και νέων, η δική τους ωστόσο «επιτυχία και ευημερία εξαρτάται από τη στήριξη» και τελικά «από τους πόρους που θα τους δοθούν». «Με κατάλλη-

λες επενδύσεις, πολιτικές και διακυβέρνηση, οι χώρες θα μπορούσαν να επωφεληθούν από τον αδύναμο λόγο των εξαρτώμενων ατόμων προς τον ενεργό πληθυσμό» έτσι ώστε «να ξεκινήσει ένας οικονομικός και κοινωνικός μετασχηματισμός».

Η δημογραφική έκρηξη είναι αναγκαία αλλά όχι και ικανή συνθήκη για αυτή την ευκαιρία. Το ίδιο ισχύει και για το άλλο πολυχρησιμοποιημένο leitmotif της σύγχρονης πολιτικής, την περίφημη «γήρανση του πληθυσμού». Όπως δείχνουν τα στοιχεία του Census

of the παραγωγικότητας. Αλλά και μόνον από ίδιες τις επιπτώσεις της «δημογραφικής μετάβασης». Η πρόβλεψη, έτσι, είναι μια συνεχής αύξηση του πληθυσμού ενεργών ηλικιών (15-64 ετών), που θα μπορούσε να εξισωθεί με τη βάση του ίδιου του ενεργού πληθυσμού: από 4 δισεκατομμύρια το 2002 σε 5,7 δισεκατομμύρια το 2050. Ακόμη περισσότερο, που η απόλυτη αυτή αύξηση δεν αναμένεται καθόλου να μεταφραστεί σε ουσιαστική μείωση της συμμετοχής του ενεργού πληθυσμού η οποία αναμένεται να παραμείνει περίπου στα ίδια επίπεδα: 63,1% έναντι 63,9% σήμερα. Δεν υπάρχει, έτσι, καμία αντικειμενική, δημογραφική βάση για μια υποτιθέμενη «δημογραφική ωρολογιακή βόμβα», όπως το εξηγούσε επίσης πολύ καλά μια παλαιότερη συνέντευξη ειδικών (Λόρδος Eatwell, J.-M. Charpin κτλ.) που είχε διοργανώσει η οικονομική επιτροπή του ΟΗΕ για την Ευρώπη (Δεκέμβριος 1999).

Σημειώσεις

(1) Census Bureau, *Global Population Profile*, Μάρτιος 2004. Στο Internet: <http://www.census.gov/prod/2004pubs/wp-02.pdf>

(2) UNFPA, *State of World Population 2003*, Οκτώβριος 2003. Στο Internet: <http://www.unfpa.org/swp/swpmain.htm>

Η αύξηση του αριθμού των ηλικιωμένων δεν γίνεται εις βάρος του ενεργού πληθυσμού διαψεύδοντας έτσι τις κινδυνολογίες περί δημογραφικής γήρανσης

Bureau, η δημογραφική έκρηξη και η συνολική βελτίωση των συνθηκών διαβίωσης δεν συνιστά μόνη της πρόβλημα.

Οι προβλέψεις του οργανισμού για αύξηση του αριθμού των ηλικιωμένων, ακόμη και για τις ομάδες των άνω των 80 ετών, συνέπεια της βελτίωσης των συνθηκών διαβίωσης, καθόλου δεν συνεπάγεται υψηλότερα «βάρη» για τον ενεργό πληθυσμό! Και όχι μόνο για τους προφανείς οικονομικούς λόγους που έχουν σχέση με την αύξη-

			
Μηνιαία Συνοπτική Λογιστική Κατάσταση της 29ης ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2004			
ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΟ	ΕΥΡΩ	ΠΑΘΗΤΙΚΟ	ΕΥΡΩ
Ταμεία & Απαιτήσεις κατά Π.Ι.	173.063.838,55	Υποχρεώσεις προς Π.Ι.	228.128.674,10
Απαιτήσεις κατά Πελάτων	1.279.504.027,00	Υποχρεώσεις προς Πελάτες	1.559.719.283,03
Πάγια Στοιχεία	12.414.580,73	Λοιπά Στοιχεία Παθητικού	14.214.180,63
Λοιπά Στοιχεία Ενεργητικού	437.079.691,48		
ΣΥΝΟΛΟ	1.902.062.137,76	ΣΥΝΟΛΟ	1.902.062.137,76
Λογαριασμοί Τόξεως	4.998.711.529,84	Λογαριασμοί Τόξεως	4.998.711.529,84
ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ	6.900.773.667,60	ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ	6.900.773.667,60

HSBC Bank plc

Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΛΗΨΗΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΑ ΟΙ ΜΑΝΑΤΖΕΡ ΤΩΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΛΑΜΒΑΝΟΥΝ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ. Η λέξη μάντζερ φέρνει στο μυαλό εικόνες ανθρώπων που καθορίζουν τι πρέπει να γίνει, ποιος θα το κάνει, πότε, πού και ενίοτε πώς. Με άλλα λόγια, η λήψη αποφάσεων είναι η κυριότερη δουλειά των μάντζερ. Από την ορθολογικότητα των αποφάσεών τους κρίνεται η επιβίωση της εταιρείας τους αλλά και η εργασιακή ποιότητα ζωής των υφισταμένων τους. Λέγεται συχνά ότι οι μάντζερ πρέπει να αποφασίζουν ορθολογικά. Τι σημαίνει όμως αυτό στην πράξη; Ποια είναι η ορθολογική διαδικασία λήψης αποφάσεων; Ποιες άλλες παράμετροι υπεισέρχονται στη διαδικασία αυτή που χρήζουν εξέτασης; Εντέλει, πώς λαμβάνεται μια ορθολογική απόφαση;

Η αλήθεια είναι ότι η «πλήρης ορθολογικότητα» στη διαδικασία λήψης αποφάσεων είναι ανέφικτη. Αυτό συμβαίνει για τέσσερις κύριους λόγους. Πρώτον, οι αποφάσεις αφορούν το μέλλον το οποίο είναι αβέβαιο. Δεύτερον, είναι δύσκολο να βρεθούν όλες οι εναλλακτικές λύσεις ενός προβλήματος. Τρίτον, είναι δύσκολο να αναλυθεί αρκούντως κάθε εναλλακτική λύση. Τέταρτον, η πληροφόρηση που χρειάζεται ο μάντζερ είναι ουσιαστικά πάντοτε ατελής και παράλληλα δεν επαρκούν ο χρόνος και τα χρήματα.

Οι αποφάσεις διακρίνονται σε δύο γενικές κατηγορίες: στις προγραμματισμέ-

νες (programmed decisions) και στις μη προγραμματισμένες (nonprogrammed decisions). Οι πρώτες αναφέρονται σε προβλήματα ρουτίνας όπου οι αποφάσεις λαμβάνονται βάσει προκαθορισμένων πολιτικών, διαδικασιών ή κανόνων (π.χ., πρόσληψη εργαζομένων). Οι δεύτερες έχουν να κάνουν με προβλήματα που ανακύπτουν κατά περιόδους τα οποία είναι φύσει δύσκολο να οριοθετηθούν (π.χ., εισαγωγή νέου προϊόντος στην αγορά). Σε αυτή την

Από την ορθολογικότητα των αποφάσεων των μάντζερ κρίνονται η επιβίωση της εταιρείας και το εργατικό μέλλον των υφισταμένων τους

κατηγορία εμπίπτουν συνήθως οι στρατηγικές αποφάσεις.

Επίσης οι αποφάσεις δεν λαμβάνονται εν κενώ αλλά υπό τρεις συνθήκες, οι οποίες είναι η βεβαιότητα (certainty), ο κίνδυνος (risk) και η αβεβαιότητα (uncertainty). Στην περίπτωση της βεβαιότητας οι μάντζερ είναι σίγουροι για το αποτέλεσμα της απόφασής τους. Υπάρχει η απαραίτητη, πλήρης και αξιόπιστη πληροφόρηση και οι σχέσεις αιτίας - αιτιατού είναι εξακρι-

βωμένες. Σε συνθήκες κινδύνου οι μάντζερ δεν μπορούν να προβλέψουν επακριβώς το αποτέλεσμα της απόφασής τους αλλά διαθέτουν αρκετή (όχι όμως πλήρη) πληροφόρηση ώστε να είναι σε θέση να προβλέψουν την πιθανότητα η απόφαση να οδηγήσει στη λύση του προβλήματος.

Τέλος, στην περίπτωση της αβεβαιότητας υπάρχει ευάριθμη πληροφόρηση σχετικά με τις εναλλακτικές αποφάσεις και τα αποτελέσματά τους και γίνεται έτσι πιθανές ότι αυτή η περίπτωση παρουσιάζει τις μεγαλύτερες δυσκολίες για τους μάντζερ. Επομένως η χρήση της πλήρους ορθολογικότητας είναι μη εφικτή. Ελλείψει χρόνου, πληροφόρησης και πόρων οι μάντζερ δεν δύνανται να αποφασίσουν με πλήρη ορθολογικότητα. Ως εκ τούτου, σύμφωνα με τον Herbert Simon, οι μάντζερ δρουν με περιορισμένη ορθολογικότητα (bounded rationality) κατά τη λήψη αποφάσεων. Σύμφωνα με τον Simon, οι μάντζερ παίρνουν την καλύτερη δυνατή απόφαση που μπορούν εντός των περιορισμών πληροφόρησης, χρόνου, χρημάτων και ικανότητας κατά περίπτωση. Αντί να ψάχνουν για την άριστη λύση, επιλέγουν την πρώτη που θα ανακαλύψουν ότι εξυπηρετεί επαρκώς τις ανάγκες τους (satisficing).

Ετσι, έχοντας κατά νου όλα τα παραπάνω, το ορθολογικό μοντέλο λήψης αποφάσεων (rational model of decision making) αποτελείται από τα παρακάτω τέσσερα στά-

δια: α) ανάλυση της κατάστασης, β) εύρεση εναλλακτικών λύσεων, γ) αξιολόγηση των εναλλακτικών λύσεων και επιλογή της καλύτερης και δ) εφαρμογή και έλεγχος της απόφασης.

α) Ανάλυση της κατάστασης. Το στάδιο αυτό περιλαμβάνει τον καθορισμό του προβλήματος και των στόχων.

Ο καθορισμός του προβλήματος είναι η σημαντικότερη ενέργεια που έχει να κάνει ο μάνατζερ, δεδομένου ότι σε περίπτωση που το πρόβλημα καθορισθεί εσφαλμένα, τότε όλη η διαδικασία ακυρώνεται. Π.χ., η μείωση των πωλήσεων ενός προϊόντος, μολονότι είθισται να χαρακτηρίζεται πρόβλημα, είναι ενίοτε το σύμπτωμα στελέσφορης επικοινωνιακής υποστήριξης. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση, η μείωση των πωλήσεων είναι το σύμπτωμα και η στελέσφορη επικοινωνία το πρόβλημα.

Ο καθορισμός των στόχων είναι η επόμενη ενέργεια. Τα περισσότερα προβλήματα αποτελούνται από πολλά στοιχεία και είναι μάλλον δύσκολο για έναν μάνατζερ να βρει μια πλήρως ικανοποιητική λύση. Επομένως πρέπει να σταθμίσει τα διάφορα στοιχεία του προβλήματος και αναλόγως να καθορίσει τον στόχο.

β) Η εύρεση εναλλακτικών λύσεων. Ένα συχνό λάθος που γίνεται σε αυτό το στάδιο είναι να μη βρίσκονται όσο γίνεται περισσότερες εναλλακτικές λύσεις. Αυτό είναι κάτι που μεκάνει φυσικά την πιθανότητα να βρεθεί η καλύτερη λύση. Μια γνωστή τεχνική που μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτό το στάδιο είναι το λεγόμενο *brainstorming*.

γ) Αξιολόγηση των εναλλακτικών λύσεων και επιλογή της καλύτερης. Η αξιολόγηση των εναλλακτικών λύσεων γίνεται βάσει ποσοτικών (quantitative) αλλά και ποιοτικών (qualitative) παραμέτρων. Οι ποσοτικές παράμετροι μπορούν να εκφραστούν αριθμητικά, π.χ. το σταθερό κόστος λειτουργίας, ενώ οι ποιοτικές είναι δύσκολο να εκφραστούν αριθμητικά, π.χ. η ποιότητα των εργασιακών σχέσεων. Πολλές φορές οι μάνατζερ παραβλέπουν τις ποιοτικές παραμέτρους επειδή είναι δύσκολο να μετρηθούν. Αυτή η πρακτική όμως μπορεί να έχει σημαντικές αρνητικές συνέπειες στην επιχείρηση σε περίπτωση που μια ποιοτική παράμετρος είναι κρίσιμης σημασίας. Έτσι οι μάνατζερ πρέπει να ποσοτικοποιούν όποτε είναι δυνατόν τις ποιοτικές παραμέτρους ή τουλάχιστον να συλλέγουν όσο γίνεται περισσότερες πληροφορίες γύ-

ρω από αυτές. Με δυο λόγια, όπως είχε πει ο Αϊνστάϊν, «*ό,τι μπορεί να μετρηθεί δεν αξίζει πάντα αλλά και ό,τι αξίζει δεν μπορεί πάντα να μετρηθεί*». Κατά την αξιολόγηση των εναλλακτικών λύσεων εξετάζεται αν η λύση είναι εφικτή, ικανοποιητική, καθώς και οι συνέπειές της στην υπόλοιπη επιχείρηση.

Αφού γίνει η αξιολόγηση, επιλέγεται η καλύτερη εναλλακτική λύση. Αυτό μπορεί να γίνει με τη χρήση της πείρας που έχει ο μάνατζερ, του πειραματισμού (experimentation) και της έρευνας και ανάλυσης. Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι η πείρα, ως μέθοδος επιλογής της καλύτερης λύσης, είναι υπερεκτιμημένη στον κόσμο των επιχειρήσεων.

Καίτοι η χρησιμότητά της είναι αδιαμφισβήτητη, πολλές φορές επηρεάζει αρνητικές συνέπειες. Κατ' αρχάς, είναι λογικό να πούμε ότι η πείρα είναι χρήσιμη στην περίπτωση που το μέλλον προσομοιάζει στο παρελθόν. Όπως όμως ακούμε και διαβάζουμε καθημερινά, η εποχή που ζούμε είναι εποχή φρενιτωδών αλλαγών και «το μέλλον δεν είναι όπως παλιά». Έτσι η πείρα μπορεί να αποτελέσει κακό οδηγό των αποφάσεων διότι οι αποφάσεις αξιολογούνται βάσει του μέλλοντος ενώ η πείρα

ανάκει στο παρελθόν.

δ) Εφαρμογή και έλεγχος της απόφασης. Σε αυτό το στάδιο ο μάνατζερ διακρίβει να τις παραδοχές, τις προεπιθέσεις και τη σχεδίαση του ενδεχόμενου προγράμματος κατά την εφαρμογή της λύσης. Η εφαρμογή της λύσης δεν αποτελεί αυτό και μόνο ότι ο μάνατζερ δίνει τις εντολές εντολές. Πρέπει να βρεθούν οι απαιτούμενοι πόροι και να κληθεί μελλοντικά άτομα. Να καταρτιστούν προεκπαιγημένοι και να αναδιοργανωθούν, καθώς και να ενισχυθεί εκ-

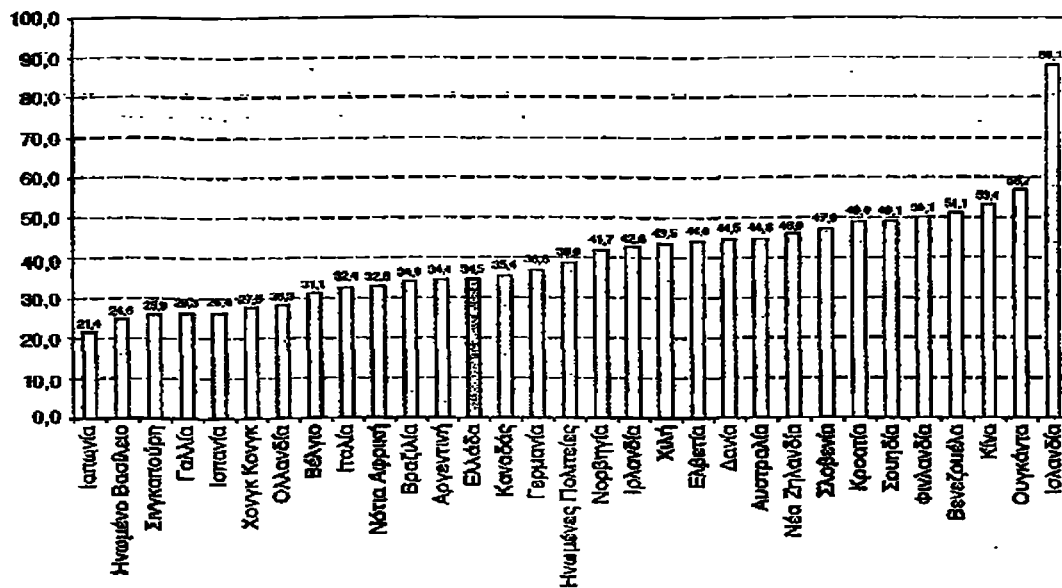
κείνη η ομάδα που είναι καθήκον να κάνει. Σε τελική ανάλυση, μια απόφαση είναι τόσο καλή όσο κατά είναι το εκτέλεση εφαρμογής της. Συχνά παρατηρείται το φαινόμενο να μην υπάρχει η θέληση να εφαρμοστεί η απόφαση έτσι όπως είναι. Τότε η εφαρμογή της θα επικρατήσει «απόφαση». Αν όμως οι προεπιθέσεις που δεν μπορούν ή δεν θέλουν να πραγματοποιήσουν την απόφαση, τότε ακόμη και η καλύτερη απόφαση θα είναι στα χαρτιά. Επιπλέον πρέπει να υπάρχει και ο έλεγχος. Έλεγχος, και

να αναλάβει ο ίδιος ο μάνατζερ. Τι συμβαίνει στα εσωτερικά και στο εξωτερικά περιβάλλον της επιχείρησης ως αποτέλεσμα της απόφασης; Η λήψη αποφάσεων είναι δυναμική διαδικασία. Σε κάθε στάδιο της οποίας ανακλύπουν προκλήσεις.

ΑΘ. ΠΙΖΟΣ

Φοιτητής επί πτυχίου
στο Γραμμάτεια της Σχολής
Διοίκησης και Οικονομίας
του ΑΠΕΙ Θεσσαλονίκης

Διάγραμμα 6.2
Προσωπική Γνώση Ατόμου που Ξεκίνησε Νέα Επιχείρηση
τα προηγούμενα 2 έτη - Έρευνα Πληθυσμού

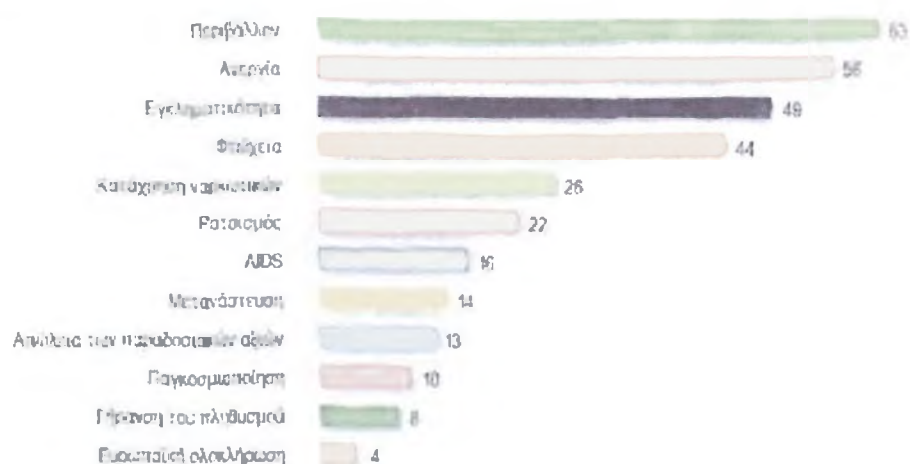


Πηγή: Επεξεργασία στοιχείων GEM

³⁷ Βλέπε και Reynolds et al (2004), Κεφάλαιο F.

Το διάγραμμα 6.2 παρουσιάζει την κατάταξη των χωρών που έλαβαν μέρος στο ερευνητικό πρόγραμμα το 2003 ανάλογα με τις απαντήσεις που συγκεντρώθηκαν στο ερώτημα που αφορά την εξοικείωση με την επιχειρηματική δραστηριότητα. Γύρω στο ένα τρίτο του δείγματος (34,5%) στην Ελλάδα απάντησαν ότι γνωρίζουν έναν επιχειρηματία. Ως προς αυτή την ερώτηση, η χώρα μας κατατάσσεται στο μέσο περίπου του συνόλου των χωρών.

Γράφημα 31: Οι ανησυχίες των Ευρωπαίων (σε % για την ΕΕ-15)

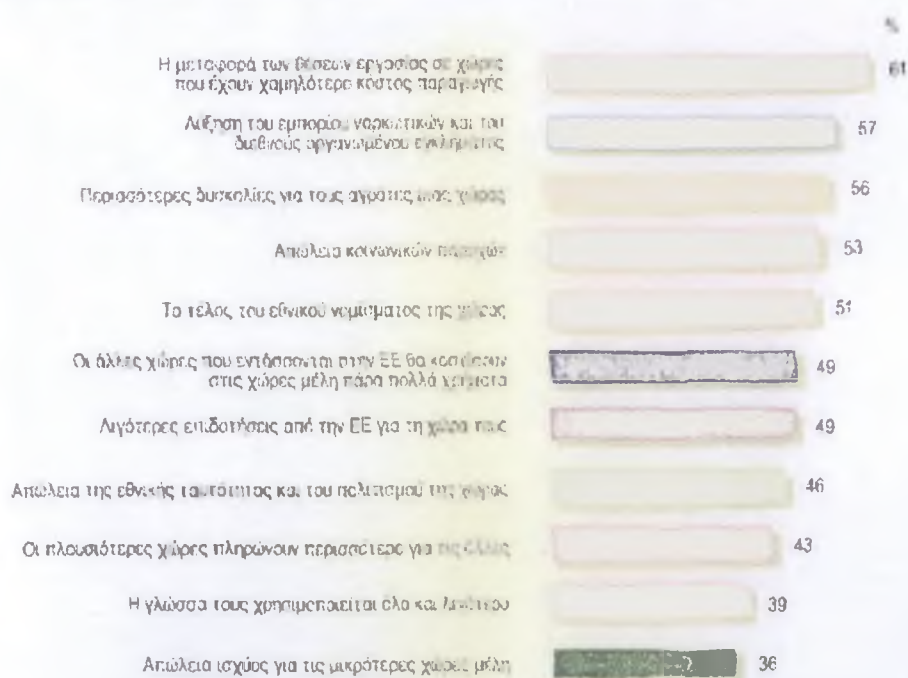


Πηγή: Ευρωπαϊκό Συμβούλιο 1997 - Έρευνα για την Ευρώπη, Άνοιξη 1997

Στο παραπάνω γράφημα απεικονίζονται μερικά από τα μεγάλα πολιτικά και κοινωνικά θέματα της εποχής (Ανοιξη 1997) που ζητήθηκε από τους ερωτηθέντες να υποδείξουν για ποια από αυτά ανησυχούν περισσότερο.

Το περιβάλλον και η ανεργία είναι οι πιο διαδεδομένες ανησυχίες και ως εκτούτου δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι το κοινό θέλει η ΕΕ να καταστήσει προτεραιότητα την καταπολέμηση και των δύο προβλημάτων. Η εγκληματικότητα είναι Τρίτη πιο διαδεδομένη ανησυχία, ενώ περίπου το ήμισυ όλων των ευρωπαίων πολιτών τη θεωρούν ως μία από τις κύριες ανησυχίες τους. Η φτώχεια (44%) έρχεται στην τέταρτη θέση. Ένα τέταρτο των Ευρωπαίων περίπου δηλώνουν ότι ανησυχούν για την κατάχρηση των ναρκωτικών και πάνω από δύο στους δέκα ανησυχούν για το ρατσισμό. Τα άλλα θέματα που εμφανίζονται στο γράφημα προκαλούν ανησυχία σε ποσοστό κάτω από 20% του πληθυσμού της ΕΕ.

Γράφημα 20: Φόβοι των πολιτών της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΕ-15)



Πηγή: Ευρωπαϊκό Ινστιτούτο για την Επιστήμη της Πολιτικής - Μάρτιος-Απρίλιος 2006

Στο γράφημα 20 διαπιστώνουμε ότι η ιδέα της μεταφοράς θέσεων εργασίας σε χώρες που έχουν χαμηλότερο κόστος παραγωγής φοβίζει τους πολίτες στο πλαίσιο της περαιτέρω ενοποίησης (61%). Ακολουθεί η αύξηση του εμπορίου ναρκωτικών και το διεθνές οργανωμένο έγκλημα (57%). Πάνω από το ήμισυ του κοινού φοβάται επίσης ότι οι αγρότες στη χώρα τους θα έχουν περισσότερες δυσκολίες (56%), ότι θα χάσουν τα κοινωνικά οφέλη τους (53%) και ότι θα χάσουν το εθνικό τους νόμισμα (51%).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζονται οι Πραγματοποιηθείσες Δαπάνες Προσωπικού και τα σταθερά έξοδα του 2004 και του 2005 με τα αντίστοιχα γραφήματά τους. Καθώς επίσης και δύο γραφήματα σχετικά με τη διαμόρφωση της τιμής του πρατηρίου σε βενζίνη αμόλυβδη και ντήζελ κίνησης αντίστοιχα.

Τα παρακάτω στοιχεία τα αντλήσαμε από το Τμήμα Μελετών και Προγραμματισμού της Ελληνικά Πετρέλαια Α.Ε.

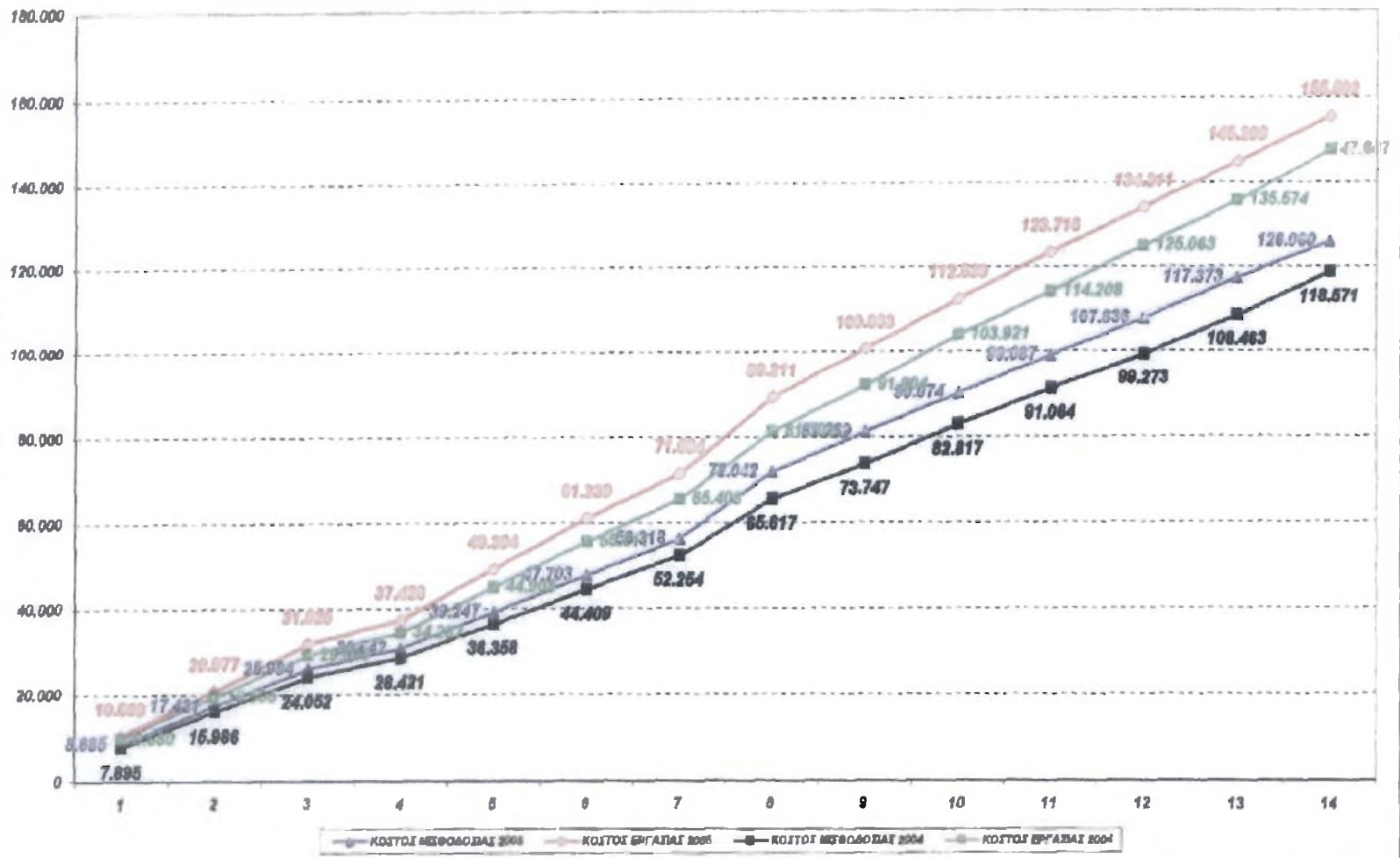
ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΕΙΣΕΣ ΔΑΠΑΝΕΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ
ΣΤΑΘΕΡΑ ΕΞΟΔΑ (ΧΙΛ. ΕΥΡΩ)
ΕΤΟΣ 2005

ΕΙΔΟΣ ΕΞΟΔΟΥ	1ος	2ος	3ος	ΔΠ	4ος	5ος	6ος	7ος	8ος	9ος	10ος	11ος	ΔΧ	12ος
	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005
ΜΙΣΘΟΙ-ΕΠΙΔΟΜΑΤΑ	7.122	14.313	21.281	28.112	32.098	38.997	46.018	69.003	66.577	73.771	81.191	88.348	98.240	103.360
ΕΡΓΟΔΟΤΙΚΕΣ ΕΙΣΦΟΡΕΣ	1.862	3.109	4.704	8.530	7.149	8.708	10.300	13.039	14.892	16.303	17.897	19.490	21.133	22.710
ΚΟΣΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣΙΑΣ 2005	8.984	17.421	25.985	36.642	39.247	47.705	56.318	82.042	81.469	90.074	99.087	107.838	119.373	126.070
ΥΠΕΡΩΡΙΕΣ	795	1.489	2.282	2.282	3.322	4.157	5.071	6.890	6.853	7.748	8.582	9.347	9.347	10.149
ΧΙΛΙΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΗ	80	80	129	129	171	222	282	304	345	388	434	485	485	515
ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ ΠΑΡΟΧΕΣ ΜΕΣΩ ΜΙΣΘΟΔΟΣΙΑΣ	440	463	465	1.121	1.129	1.139	1.153	1.187	1.178	1.407	1.422	1.434	2.405	2.527
ΑΣΦΑΛΣΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ	640	1.271	1.912	2.099	2.739	3.397	4.038	4.987	6.627	6.558	7.281	7.944	8.332	9.016
ΜΕΡΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ	10.500	20.801	30.712	39.550	42.600	52.915	62.652	90.900	89.292	98.170	107.107	117.615	129.708	140.397
ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΕΙΣ ΑΠΟΛΥΣΗΣ	0	252	1.173	1.173	2.786	4.821	4.842	4.842	6.891	6.361	6.926	7.268	7.268	7.325
ΚΟΣΤΟΣ ΕΡΓΑΖΙΑΣ 2005	10.500	21.053	31.885	37.723	45.386	57.736	67.494	95.742	96.153	105.096	114.033	124.883	137.036	147.722

ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΕΙΣΕΣ ΔΑΠΑΝΕΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ
ΣΤΑΘΕΡΑ ΕΞΟΔΑ (ΧΙΛ. ΕΥΡΩ)
ΕΤΟΣ 2004

ΕΙΔΟΣ ΕΞΟΔΟΥ	1ος	2ος	3ος	ΔΠ	4ος	5ος	6ος	7ος	8ος	9ος	10ος	11ος	ΔΧ	12ος
	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004
ΜΙΣΘΟΙ-ΕΠΙΔΟΜΑΤΑ	6.423	12.942	19.483	23.050	29.482	36.970	42.288	63.157	69.728	67.094	73.750	80.392	87.984	96.527
ΕΡΓΟΔΟΤΙΚΕΣ ΕΙΣΦΟΡΕΣ	1.472	3.044	4.589	5.371	6.806	8.440	9.968	12.469	14.020	16.723	17.314	18.891	20.479	22.044
ΚΟΣΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣΙΑΣ 2004	7.895	15.986	24.072	28.421	36.288	45.410	52.256	75.626	83.748	83.817	91.064	99.283	108.463	118.571
ΥΠΕΡΩΡΙΕΣ	705	1.515	2.367	2.367	3.290	4.356	5.482	6.828	7.808	9.414	9.796	11.570	11.870	12.594
ΧΙΛΙΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΗ	29	61	97	97	129	167	200	247	286	334	374	413	413	460
ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ ΠΑΡΟΧΕΣ ΜΕΣΩ ΜΙΣΘΟΔΟΣΙΑΣ	461	467	480	1.137	1.143	1.166	1.182	1.173	1.183	1.409	1.424	1.436	2.391	2.509
ΑΣΦΑΛΣΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ	592	1.192	1.792	1.998	2.861	3.161	3.783	4.568	5.171	5.813	6.424	7.035	7.400	8.105
ΜΕΡΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ	9.971	19.221	28.738	35.528	43.691	54.915	62.239	87.133	88.125	90.230	99.638	110.727	120.937	130.396
ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΕΙΣ ΑΠΟΛΥΣΗΣ	9	284	292	292	1.426	2.363	2.688	3.189	3.709	4.133	5.126	6.336	6.336	6.418
ΚΟΣΤΟΣ ΕΡΓΑΖΙΑΣ 2004	9.980	19.505	29.030	36.820	45.117	57.278	64.927	90.322	91.834	94.363	104.764	117.063	127.273	136.814

ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΚΟΣΤΟΥΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ ΕΤΩΝ 2004-2005 ΑΝΑ ΜΗΝΑ



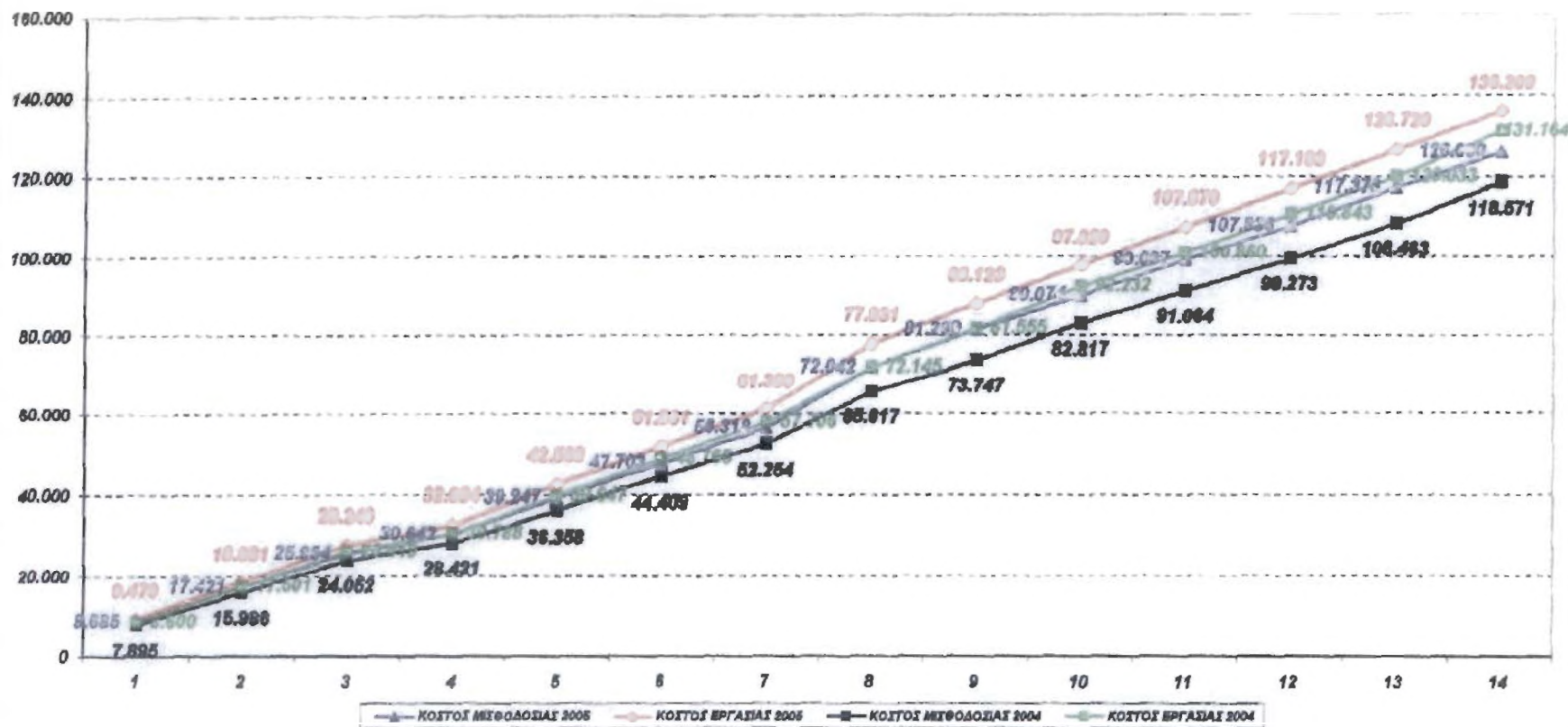
ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΕΙΣΕΣ ΔΑΠΑΝΕΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ
ΣΤΑΘΕΡΑ ΕΞΟΔΑ (Χιλ. Ευρώ)
ΕΤΟΣ 2005

ΕΙΔΟΣ ΕΞΟΔΟΥ	1ος	2ος	3ος	ΔΠ	4ος	5ος	6ος	7ος	8ος	9ος	10ος	11ος	ΔΧ	12ος
	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005	2005
ΜΙΣΘΟΙ-ΕΠΙΔΟΜΑΤΑ	7.122	14.313	21.281	28.112	32.098	38.997	48.018	59.003	66.577	73.771	81.191	88.348	96.240	103.350
ΕΡΓΟΔΟΤΙΚΕΣ ΕΙΣΦΟΡΕΣ	1.862	3.109	4.704	5.630	7.149	8.706	10.300	13.039	14.892	16.303	17.897	19.490	21.133	22.710
ΚΟΣΤΟΣ ΕΠΙΧΡΕΩΣΗΣ 2005	8.984	17.421	25.985	33.742	39.247	47.703	58.318	72.042	81.469	90.074	99.088	107.838	117.373	126.060
ΥΠΕΡΩΡΙΕΣ	798	1.459	2.282	2.282	3.322	4.167	5.071	6.880	6.853	7.746	8.582	9.347	9.347	10.149
ΚΕΡΦΟ ΣΥΝΟΛΟ	8.782	18.880	28.267	36.024	42.569	51.870	63.389	78.922	88.322	97.820	107.670	117.185	126.720	136.209
ΚΟΣΤΟΣ ΕΥΤΑΞΙΑΣ 2005	8.782	18.880	28.267	36.024	42.569	51.870	63.389	78.922	88.322	97.820	107.670	117.185	126.720	136.209

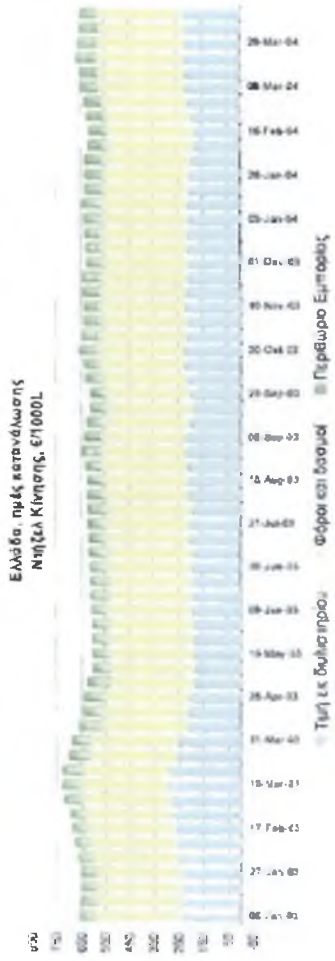
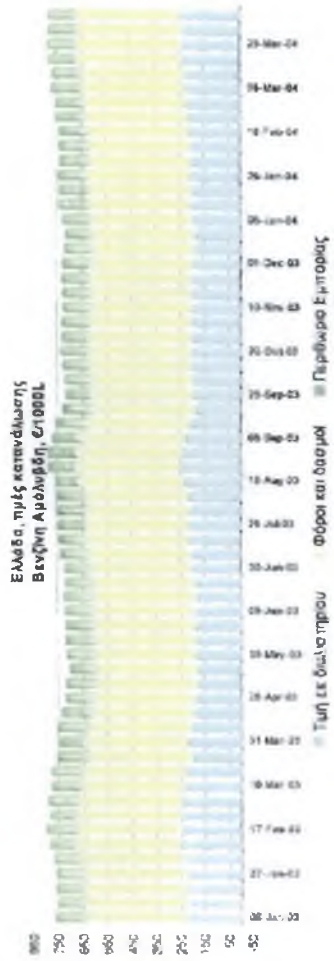
ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΕΙΣΕΣ ΔΑΠΑΝΕΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ
ΣΤΑΘΕΡΑ ΕΞΟΔΑ (Χιλ. Ευρώ)
ΕΤΟΣ 2004

ΕΙΔΟΣ ΕΞΟΔΟΥ	1ος	2ος	3ος	ΔΠ	4ος	5ος	6ος	7ος	8ος	9ος	10ος	11ος	ΔΧ	12ος
	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004	2004
ΜΙΣΘΟΙ-ΕΠΙΔΟΜΑΤΑ	6.423	12.842	19.483	23.060	29.482	36.970	42.288	53.187	59.728	67.084	73.780	80.382	87.984	96.827
ΕΡΓΟΔΟΤΙΚΕΣ ΕΙΣΦΟΡΕΣ	1.472	3.044	4.569	6.371	6.898	8.440	9.986	12.458	14.020	16.723	17.314	18.881	20.479	22.044
ΚΟΣΤΟΣ ΕΠΙΧΡΕΩΣΗΣ 2004	7.895	15.886	24.052	29.431	36.380	45.410	52.274	65.645	73.748	83.807	91.094	99.263	108.463	118.871
ΥΠΕΡΩΡΙΕΣ	708	1.516	2.387	2.387	3.290	4.368	6.482	6.528	7.808	9.414	9.798	11.570	11.570	12.694
ΚΕΡΦΟ ΣΥΝΟΛΟ	8.603	17.401	26.439	31.818	39.670	49.778	58.756	72.173	81.556	93.521	100.892	110.833	120.033	131.565
ΚΟΣΤΟΣ ΕΥΤΑΞΙΑΣ 2004	8.603	17.401	26.439	31.818	39.670	49.778	58.756	72.173	81.556	93.521	100.892	110.833	120.033	131.565

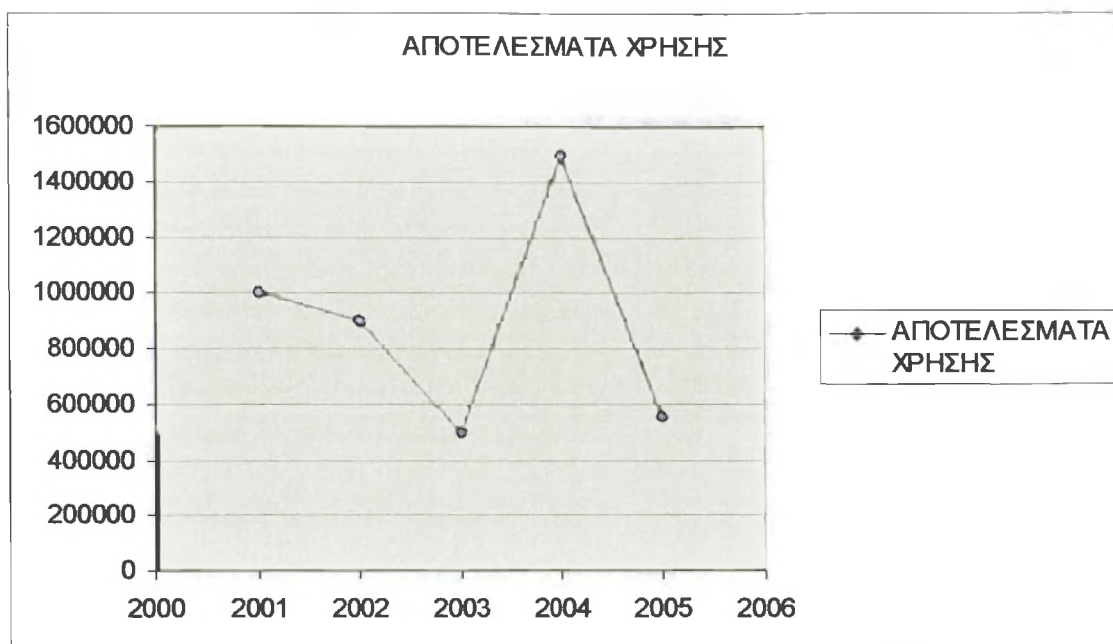
ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΚΟΣΤΟΥΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ ΕΤΩΝ 2004-2005 ΑΝΑ ΜΗΝΑ



Διαμόρφωση Τιμής Πρατηρίου



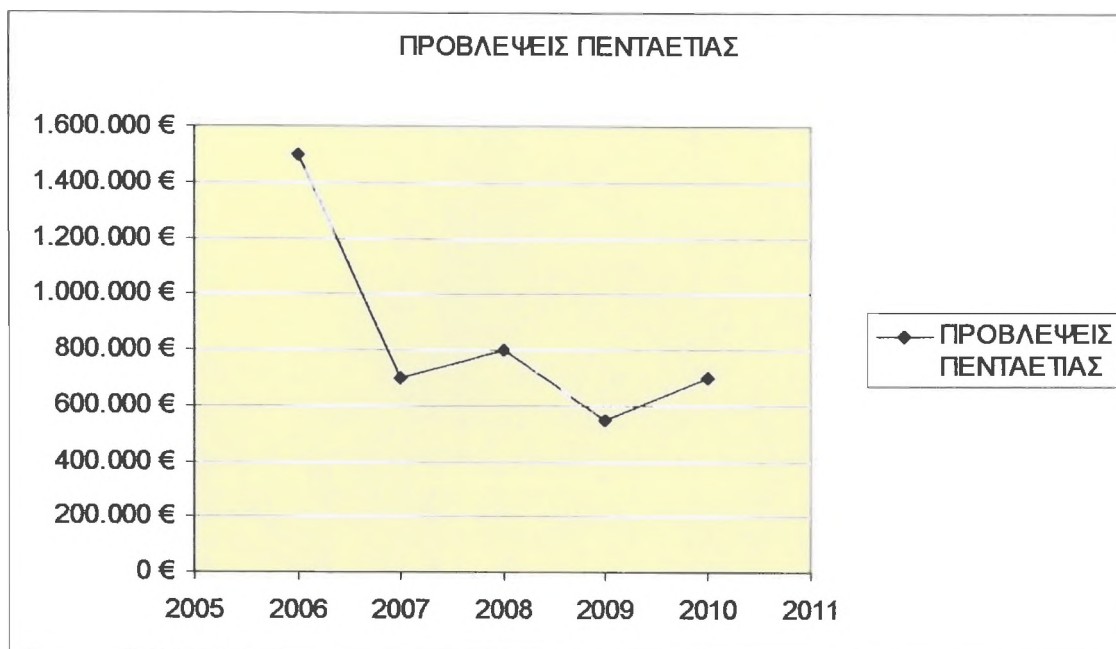
ΠΗΓΗ: Τμήμα Μελετών και Προγραμματισμού ΕΛΠΕ Α.Ε.



ΕΤΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΧΡΗΣΗΣ

2001	1.000.097 €
2002	900.000 €
2003	500.800 €
2004	1.500.000 €
2005	555.000 €

ΠΗΓΗ: Τμήμα Μελετών και Προγραμματισμού ΕΛΠΕ Α.Ε.



ΕΤΗ	ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΣ
2006	1.500.000 €
2007	700.000 €
2008	800.000 €
2009	550.000 €
2010	700.000 €

ΠΗΓΗ: Τμήμα Μελετών και Προγραμματισμού ΕΛΠΕ Α.Ε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΗΓΕΣ ΑΠΟ ΒΙΒΛΙΑ

- ❖ Αγιάκλογλος, Χρήστος, Ν., & Οικονόμου, Γεώργιος, Σ. (2004) *Μέθοδοι Προβλέψεων και Ανάλυσης Αποφάσεων*. (2^η έκδοση) Αθήνα: Εκδόσεις Γ. Μπένου.
- ❖ Αθανασόπουλος, Δημήτριος, Α. (1988) *Στατιστική*. Εκδόσεις Α. Σταμούλης.
- ❖ Αποστολόπουλος, Θεόδωρος, Η. (2003) *Περιγραφική Στατιστική Επιχειρήσεων* (4^η έκδοση). Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.
- ❖ Αρτίκης, Θ., & Μαλλiάρης, Α. (1992). *Οικονομική της αβεβαιότητας. Χρηματοοικονομικές Εφαρμογές Θεωριές Πιθανοτήτων*. Πειραιάς: Εκδόσεις Α. Σταμούλης.
- ❖ Γναρδέλλης, Χαράλαμπος. (2003). *Εφαρμοσμένη Στατιστική*. Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση.
- ❖ Ευρωπαϊκά κείμενα. (Σεπτέμβριος 2001). *Ποια εικόνα έχουν οι Ευρωπαίοι για τον εαυτό τους*. Λουξεμβούργο. Υπηρεσία Επισήμων Εκδόσεων των Ευρωπαϊκών Κοινοτήτων.
- ❖ Ιωαννίδης, Σταύρος. (2004). *Η Επιχειρηματικότητα στην Ελλάδα. Παγκόσμιο Παρατηρητήριο Επιχειρηματικότητας 2003*. Αθήνα: Ίδρυμα Οικονομικών και Βιομηχανικών ερευνών.
- ❖ Κιόχος, Πέτρος, Α. (1993). *Στατιστική*. Αθήνα: Εκδόσεις Interbooks.
- ❖ Κολυβά – Μαχαίρα, Φ., & Μπόρα – Σέντα, Ε. (Νοέμβριος 1995). *Στατιστική*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΖΗΤΗ.
- ❖ Λιανός, Θεόδωρος, Παπαβασιλείου Αντώνης & Χατζηανδρέου Ανδρέας. (1999). *Αρχές Οικονομικής Θεωρίας*. (1^η Έκδοση). Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

- ❖ Μαρκάτος, Κοσμάς. Μ. (2001). *Στατιστική Επιχειρήσεων*. (1^η Έκδοση). Λάρισα: Εκδόσεις Ελληνικός Λόγος.
- ❖ Παπαδήμας, Όθωνας, & Κοιλάς, Χρήστος. (1998). *Εφαρμοσμένη Στατιστική*. (Α' Έκδοση). Αθήνα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.
- ❖ Τζιαφέτας, Γεώργιος. Ν. (1991). *Θεωρία & Τεχνική Δειγματοληψίας*. Αθήνα: ΕΛΚΕΠΑ.
- ❖ Χαλικιάς, Ιωάννης. (2003). *Στατιστικοί Μέθοδοι Ανάλυσης για Επιχειρηματικές Αποφάσεις*. (2^η Έκδοση). Αθήνα: Εκδοτικός Οίκος Rosili και Ιωάννης Γ.Χαλικιάς.

ΠΗΓΕΣ ΑΠΟ ΤΟ INTERNET

- ❖ Καφούσιας, Δ.(Εκδ.2^η). (2007). *Σεμινάριο Τελειόφοιτων. Οδηγός Σπουδών. Πτυχιακή Εργασία*. Αντλήθηκε στις 08.02.2007 από την ιστοσελίδα
<http://rea.teimes.gr/~dkafous/>

ΠΗΓΕΣ ΑΠΟ ΗΜΕΡΗΣΙΟ ΤΥΠΟ

- ❖ Αναστασιάδης, Τ. (2004). Πολιτική –Οικονομία-Επιχειρήσεις. *Οικονομικός Ταχυδρόμος*. (φύλλο 14), Σελ.39-41.
- ❖ Ρίζος, Αθ. (2004). Πολιτική –Οικονομία-Επιχειρήσεις. *Οικονομικός Ταχυδρόμος*. (φύλλο 14), Σελ..63-65.