Γραμμικοί Μετασχηματισμοί και 3D Γραφικά

Νικόλαος Κουρής

Επιβλέπων: Ιωάννης Κούγιας
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Σχολή Μηχανικών
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ **3**

1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ **7**
1.1 Γενικές Πληροφορίες 7
1.2 Ιστορική Αναδρομή 10

2 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ, ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ **17**
2.1 Διανυσματική Ανάλυση 17
2.2 Καρτεσιανές Συντεταγμένες 21
2.3 Πίνακες 23
2.4 Γραμμικοί Μετασχηματισμοί 29

3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ **35**
3.1 Πίνακες και μετασχηματισμοί 35
3.2 Γραμμικοί μετασχηματισμοί σε 2D 39
3.3 Εφαρμογές σε 3D γραφικά 41
3.4 Η αρχή των αξόνων 46
3.5 Προβολή 50

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θα περίμενε κανείς πως η ιδέα της μοντελοποίησης ενός τρισδιάστατου αντικειμένου θα πρέπει να εμφανίστηκε μετά τη δημιουργία του υπολογιστή ή, στην καλύτερη περίπτωση, τον ίδιο καιρό με αυτήν. Πράγματι, στην καθημερινή μας ζωή ερχόμαστε συνεχώς σε επαφή με τρισδιάστατα μοντέλα τα οποία δημιουργούνται με υπολογιστικές μεθόδους: βιομηχανικός σχεδιασμός, ιατρικές μέθοδοι απεικόνισης, αρχιτεκτονικές, γεωγραφικές και τεχνικές μελέτες, μηχανική σχεδίαση, παραγωγή videoclip, ταινίες animation, διεπαφές εφαρμογών και ιστοσελίδων, διαφημιστικές καμπάνιες και πολλοί άλλοι κλάδοι της παραγωγής χρησιμοποιούν σε κάποια έκταση αντικείμενα που προέκυψαν από μοντελοποίηση. Στη συντριπτική πλειοψηφία τους, αυτά τα αντικείμενα, με πολλά εκ των οποίων ερχόμαστε σε επαφή καθημερινά, έχουν προκύψει μέσω κάποιας υπολογιστικής εφαρμογής. Επομένως, φαίνεται να είναι απαραίτητη η ύπαρξη του υπολογιστή για τη δημιουργία της μοντελοποίησης.

Στην πραγματικότητα, δεν είναι ακριβώς έτσι. Οι σπόροι των ιδεών πάνω στις οποίες εδράζεται κάθε τεχνική δημιουργίας τρισδιάστατων γραφικών είναι πανάρχαιοι: στον πυρήνα της όλης διαδικασίας βρίσκονται μια σειρά από μαθηματικές ιδέες, οι οποίες χρονολογούνται αιώνες πριν από την εμφάνιση του υπολογιστή.

Για να το αντιληφθούμε αυτό, θα πρέπει να εξετάσουμε λίγο πιο προσεκτικά το τι ακριβώς σημαίνει μοντελοποίηση. Ο όρος έχει τις ρίζες του στη λατινική λέξη modulus, που σημαίνει μέτρο. Και, τελικά, αυτό ακριβώς είναι: η επινόηση και δημιουργία ένος "μέτρου" κάποιου άλλου πράγματος.

Ένα μοντέλο μπορεί να είναι φυσικό: για παράδειγμα, η Ιταλίδα ευγενής Λίζα Γκεραρντίνι, σύμφωνα με την επικρατέστερη εκδοχή, πόζαρε για να ζωγραφίσει ο Λεονάρντο Ντα Βίντσι τη Μόνα Λίζα. Δηλαδή, η Λίζα Γκεραρντίνι ήταν η φυσική "έκδοχή" της Μόνα Λίζα. Παρομοίως, όταν μια κατασκευαστική εταιρία φτιάχνει μια μινιατούρα με σκοπό να αναπαραστήσει ένα πραγματικό αεροπλάνο, στην ουσία κατασκευάζει μια αναπαράσταση ή ένα "μέτρο" ενός άλλου αντικειμένου, δηλαδή μοντελοποιεί.

Πέραν των φυσικών μοντέλων υπάρχουν και τα αντιληπτικά: σε αυτά δεν έχουμε φυσική απεικόνιση, αλλά, αντίθετα, επιστρατεύονται θεωρητικά εργαλεία προκειμένου να αναπαρασταθεί κάτι. Όταν κάποιος χρησιμοποιεί μια σειρά από εξισώσεις για να περιγράψει την τροχιά ενός ουράνιου σώματος κάνει ακριβώς αυτό: επιστρατεύει μαθηματικά κατασκευάσματα -τα οποία είναι νοητά- και φυσικούς νόμους -οι οποίοι είναι εκφράσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά μιας ευρείας κατηγορίας συστημάτων- προκειμένου να αναπαραστήσει την πραγματικότητα. Ένα οικονομικό μοντέλο είναι μια θεωρητική κατασκευή που στοχεύει στο να αναπαραστήσει πραγματικές οικονομικές διαδικασίες. Όταν μια εικόνα δημιουργείται με υπολογιστή, το λεγόμενο CGI (Computer Generated Imagery), αυτό που γίνεται στην πραγματικότητα είναι ότι ένα πραγματικό αντικείμενο αναπαρίσταται στις τρεις του διαστάσεις, σχεδιάζοντας τις επιφάνειές του. Η αναπαράσταση αυτή, όμως, διαφέρει από την αναπαράσταση που θα έκανε ένας ζωγράφος στον καμβά ή ένας γλύπτης στον πηλό, διότι προκύπτει με χρήση αμιγώς μαθηματικών διαδικασιών.

Στην εποχή μας τέτοιου είδους μοντέλα έχουν νευραλγικό ρόλο σε μια σειρά από επιστημονικούς, τεχνοκρατικούς και καλλιτεχνικούς κλάδους: στην ιατρική σχεδιάζονται μοντέλα ανθρωπίνων οργάνων για την καλύτερη κατανόηση της ανατομίας -και όπως θα δούμε παρακάτω ακόμη και για μεταμοσχεύσεις-, στην αρχιτεκτονική και στη διακόσμηση χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση πραγματικών χώρων και την καλύτερη διαχείριση των παραμέτρων τους, στη μηχανική χρησιμοποιούνται για το σχεδιασμό και τον έλεγχο πραγματικών συσκευών, εξαρτημάτων και οχημάτων, στα ηλεκτρονικά παιχνίδια απεικονίζουν χώρους και χαρακτήρες, ενώ στον κινηματογράφο έχουν δώσει ένα νέο, χρήσιμο εργαλείο στους δημιουργούς.

Σε αυτή την εργασία θα επικεντρωθούμε σε τέτοια τρισδιάστατα μοντέλα και θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε σε αδρές γραμμές τις βάσεις των διαδικασιών δημιουργίας και διαχείρισής τους.

Στο Πρώτο Κεφάλαιο θα δώσουμε κάποιες πολύ γενικές πληροφορίες, ώστε να αναδειχθούν οι βασικές διαδικασίες που υπεισέρχονται στην μοντελοποίηση, και στη συνέχεια μια συνοπτική παρουσίαση της εξέλιξης των ιδεών πίσω από αυτές τις διαδικασίες. Στη ραχοκοκαλιά αυτών των διαδικασιών βρίσκονται κάποιοι συγκεκριμένοι μαθηματικοί κλάδοι, με κυρίαρχο εκείνον της γραμμικής άλγεβρας. Επομένως, στο δεύτερο Κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε με περισσότερες λεπτομέρειες τις ιδέες του εν λόγω κλάδου που εμφανίζονται κατά την μοντελοποίηση. Τέλος, στο Τρίτο Κεφάλιο θα παρουσιάσουμε την εφαρμογή των μαθηματικών εργαλείων του Δεύτερου Κεφαλαίου σε πρακτικά προβλήματα που εμφανίζονται κατά τη δημιουργία ενός μοντέλου.

Κεφάλαιο 1

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

1.1 Γενικές Πληροφορίες

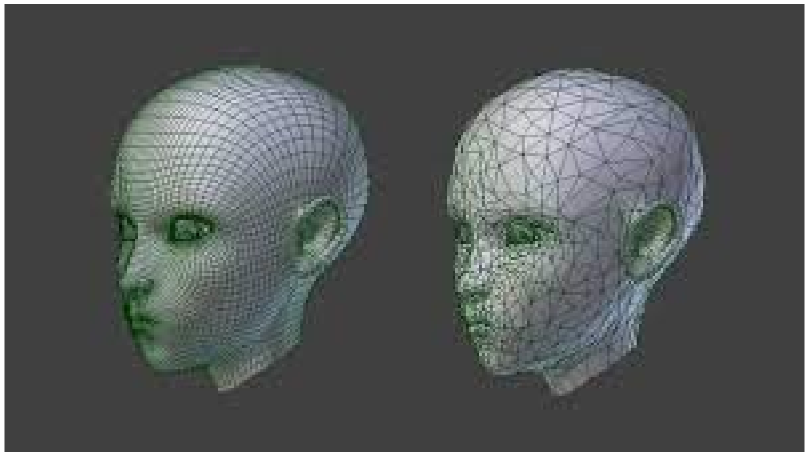
Η δημιουργία ένος τρισδιάστατου μοντέλου έγκειται στη χειραγώγηση σημείων (οι λεγόμενοι κόμβοι) μέσα σε έναν εικονικό χώρο για να δημιουργηθεί ένα πλέγμα -επί της ουσίας μια ομάδα σημείων- το οποίο αποτελεί και την αναπαράσταση του αντικειμένου. Η χειραγώγηση αυτή γίνεται με χρήση ειδικών λογισμικών. Τα προγράμματα έχουν συνήθως τη δυνατότητα να αποδίδουν κάποια αντικείμενα αυτόματα, αλλά επιτρέπουν, φυσικά, και στο χρήστη να τα διαμορφώνει ή να δημιουργεί νέα, αναλόγως των απαιτήσεών του, ενώ συχνά επιτρέπουν και τη δημιουργία μοντέλων που έχουν προκύψει από σάρωση αντικειμένων.

Ο τρόπος κατασκευής του τρισδιάστατου μοντέλου, παρέχει τη δυνατότητα στον εξειδικευμένο χειριστή να το κινήσει, γεγονός συγκλονιστικής σημασίας για μια σειρά από διαδικασίες, όπως είναι τα ειδικά εφέ και η δημιουργία ταινιών.

Το φυσικό αντικείμενο αναπαρίσταται αρχικά μέσω του πλέγματος που αναφέρθηκε νωρίτερα, με τα διάφορα σημεία του να συνδέονται μεταξύ τους με γεωμετρικά αντικείμενα (γραμμές, τρίγωνα, κοίλες ή κυρτές επιφάνειες ή πολύγωνα). Κάθε σημείο-κόμβος έχει τη θέση του στο πλέγμα που δημιουργείται. Το όλο πλέγμα, αφότου τα σημεία του συνδεθούν, αποδίδει την επιφάνεια του αντικείμενου.

Η συντριπτική πλειοψηφία των μοντέλων που υπάρχουν σήμερα είναι ακριβώς αυτού του τύπου, δηλαδή συνοριακά μοντέλα. Αυτό σημαίνει ότι σχεδιάζεται μόνο η επιφάνεια του μοντέλου και αυτή είναι που δίνει την ψευδαίσθηση της τρισδιάστατης υπόστασης του απεικονιζόμενου αντικειμένου. Είναι προφανές ότι η επιφάνεια αυτή δεν πρέπει να έχει τρύπες ή ραγίσματα αν επιδιώκεται η αληθοφάνεια της απεικόνισης. Ωστόσο, υπάρχουν και τα λεγόμενα στερεά μοντέλα, τα οποία είναι συμπαγή, δηλαδή δεν κατασκευάζεται μόνο η επιφάνεια του μοντέλου αλλά ολόκληρος ο όγκος του. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η απεικόνιση ζωτικών οργάνων για ιατρικούς σκοπούς.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, υπάρχουν διάφοροι τρόποι ένωσης των κόμβων για τη δημιουργία πλέγματος. Ο πιο δημοφιλής είναι η ένωσή τους μέσω γραμμών. Τότε το αντικείμενο επί της ουσίας αναπαρίσταται μέσω ενός πολυγώνου,



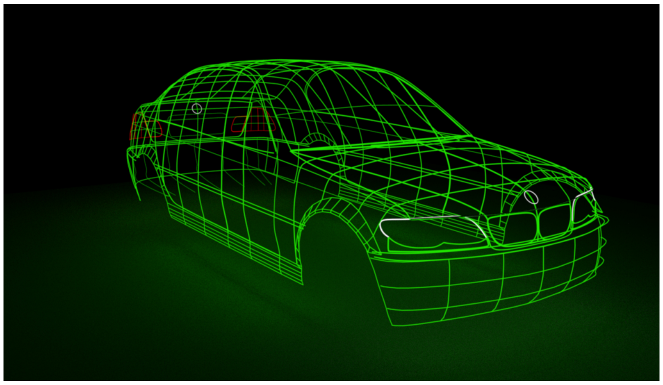
Σχήμα 1.1: *Μοντέλα ανθρώπινου κεφαλιού. Στο μοντέλο αριστερά η σύνδεση των κόμβων έχει γίνει με τετράπλευρα, ενώ στο μοντέλο δεξιά με τρίγωνα (φωτογραφία από τη σελίδα all3dp.com).*

εξ ου και η ονομασία πολυγωνική μοντελοποίηση. Τα πλεονκτήματά της είναι η ευελιξία της και η ταχύτητά της. Το -προφανές- μειονεκτημά της είναι ότι αποδίδει προσεγγιστικά οποιοδήποτε καμπύλο αντικείμενο, μέσω ενός πολυγώνου. Η δε μοντελοποίηση μέσω καμπυλών γίνεται συνδέοντας τους διάφορους κόμβους με καμπύλες και επισυνάπτοντας σε αυτές ειδικούς συντελεστές-βάρη που ρυθμίζουν το σχήμα τους. Έτσι δημιουργείται μια μεγάλη καμπύλη η οποία αναπαριστά το αντικείμενο. Ακόμη μια μοντελοποίηση που αξίζει να αναφέρουμε λόγω της ταχείας ανέλιξής της τα τελευταία χρόνια είναι η γλυπτική με ψηφιακό πηλό, όπου αυτό που γίνεται κατά κύριο λόγο είναι μια αναπροσαρμογή της τοποθεσίας των κόμβων με τελικό αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός νέου αντικειμένου, ενώ συχνά γίνεται και δυναμική ψηφιδοποίηση προκειμένου να αναπαραχθούν και πιο αδιόρατες λεπτομέρειες ενός αντικειμένου.

Πριν περάσουμε στην ιστορική αναδρομή της μοντελοποίησης, θα δώσουμε μια συνοπτική περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθείται πρακτικά για τη δημιουργία ενός τυπικού τρισδιάστατου μοντέλου.

Όλα ξεκινάνε από τη δημιουργία ενός πρωτογενούς μοντέλου. Τυπικά, πρόκειται για ένα πολύ βασικό σχήμα: μπορεί να είναι μια σφαίρα, ένας κύβος ή ένα επίπεδο. Αυτό το σχήμα αποτελεί τη βάση της δημιουργίας, και οι περισσότεροι ειδικοί συμφωνούν ότι είναι πάντα προτιμότερο να ξεκινάει κανείς από κάτι απλό και να χτίζει πάνω σε αυτό, παρά να προσπαθεί να δημιουργήσει εξ αρχής μια περίπλοκη δομή.

Ο δρόμος από αυτό το απλό, πρωτόγονο σχήμα προς το τελικό μοντέλο είναι συχνά δύσβατος και επίπονος. Ο στόχος είναι να επέλθει στην επιφάνεια η επιθυμητή ακρίβεια -η οποία μπορεί να υπαγορεύεται από το βαθμό αυστηρότητας ή την αισθητική που θέλει να αποδώσει ο σχεδιαστής- και αυτό συμβαίνει με τη σχολαστική τοποθέτηση νέων κόμβων, ώσπου να επιτευχθεί η επιθυμητή καμπυλότητα



Σχήμα 1.2: *Μια BMW E46 που μοντελοποιήθηκε μέσω καμπυλών (φωτογραφία από τη σελίδα www.glassroof.nl).*

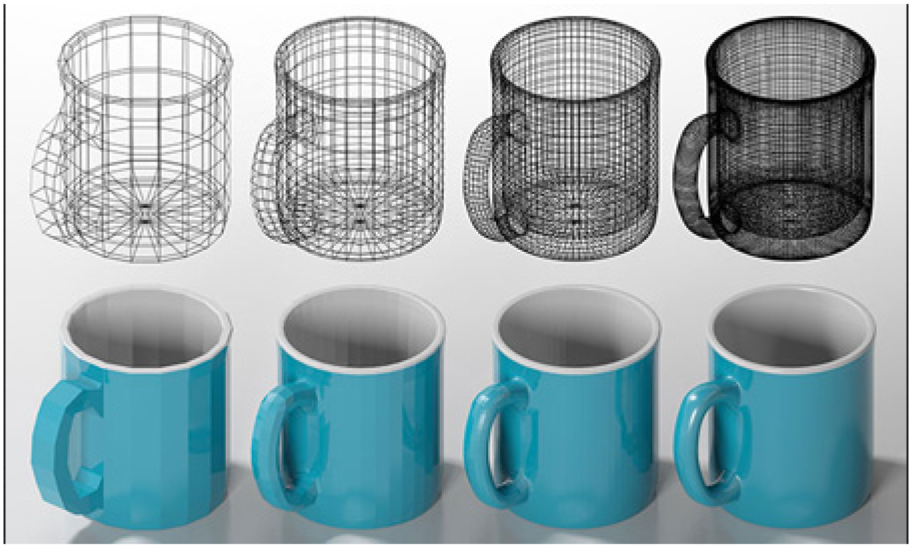
στο μοντέλο. Το πολύγωνο που προκύπτει, αν η μοντελοποίηση είναι πολυγωνική όπως ήθισται, μπορεί να διαμεριστεί περεταίρω κατά βούληση, ώστε να αποδοθούν και οι πιο μικρές λεπτομέρειες, πράγμα που είναι πολύ σημαντικό αν τελικά το μοντέλο τεθεί σε κίνηση (πχ ταινίες animation). Πράγματι, ένας κινούμενος άνθρωπος θα πρέπει κάποια στιγμή να λυγίσει το γόνατό του: αν δεν έχει σχεδιαστεί λεπτομερώς η άρθρωση στο αρχικά αλύγιστο γόνατο, τότε κατά την κίνηση μπορεί να καταστραφεί η ρεαλιστικότητα της απεικόνισης.

Μια τεχνική που χρησιμοποιούν συχνά οι σχεδιαστές είναι η κατοπτρική μοντελοποίηση. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο όταν πρέπει να σχεδιαστούν αντικείμενα με κατοπτρική συμμετρία, όπως είναι μια ανθρώπινη μορφή. Στην κατοπτρική μοντελοποίηση, ο σχεδιαστής φροντίζει να αποδώσει λεπτομερώς και με ευκρίνεια το μισό αντικείμενο, και το πρόγραμμα αντικατοπτρίζει το σχέδιό του ως προς τον επιθυμητό άξονα, σχηματίζοντας ένα εκ κατασκευής απόλυτα συμμετρικό μοντέλο. Είναι προφανής η χρησιμότητα αυτής της μεθόδου, ιδιαίτερα όταν κάποιος θέλει να μοντελοποιήσει ανθρώπους ή ζώα.

Επίσης, καμιά φορά οι σχεδιαστές κάνουν ¨μελετημένη ζημιά' στο μοντέλο τους. Συχνά, για να επιτύχουν πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα, εισάγουν υφές θορύβου. Έτσι, ορισμένοι κόμβοι του πλέγματος μπορεί να μετατοπιστούν, αλλά η επιφάνεια να αποκτήσει μια πιο ρεαλιστική μορφή.

Άλλη μέθοδος που χρησιμοποιείται συχνά είναι να δοκιμάσουν να βάλουν στην επιφάνεια των μοντέλων τους περισσότερα πολύγωνα. Αυτό τους επιτρέπει να μην καταστρέφουν το αρχικό τους σχέδιο, κάτι ιδιαίτερα σημαντικό σε εφαρμογές όπου απαιτείται πειραματισμός για να επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Όταν τελικά το μοντέλο είναι πλήρες, είναι έτοιμο για να χρωματιστεί, ενώ ο σχεδιαστής μπορεί να του εισάγει υφές, για να το κάνει να εμφανίζεται πιο περίπλοκο από ό,τι είναι. Αυτό -η εκ των υστέρων τοποθέτηση υφών στο μοντέλο ώστε να φαίνεται πιο περίπλοκο- είναι πολύ συχνά βολικότερο από την εξ αρχής δημιουργία ένος περίπλοκου αντικειμένου, διότι προφανώς μεγαλύτερη πολυπλοκότητα στην αρχική κατασκευή σημαίνει κατάληψη περισσότερης μνήμης.



Σχήμα 1.3: *Τα διάφορα στάδια της δημιουργία ενόςς 3D μοντέλου κούπας (φωτογραφία από τη σελίδα thetechnologygeek.org).*

1.2 Ιστορική Αναδρομή

Μετά από αυτή την πολύ αδρή εισαγωγή που κάναμε στην προηγούμενη ενότητα, θα πρέπει να έχει γίνει πλέον σαφής η σημασία που έχουν για την τρισδιάστατη μοντελοποίηση οι έννοιες των μαθηματικών. Πράγματι, εφόσον ο σχεδιασμός στον υπολογιστή γίνεται με χρήση γεωμετρικών δομών και με χειραγώγηση σημείων στο χώρο, οι διαδικασίες που πραγματώνουν το τελικό μοντέλο είναι οπωσδήποτε μαθηματικές. Φυσικά, αυτό δε σημαίνει ότι αναιρούνται πλήρως οι θεωρήσεις αισθητικής: αναλόγως του πλαισίου, ο σχεδιαστής μπορεί να επιτρέπει περισσότερο ή λιγότερο στην αισθητική του να παρεμβαίνει και να επηρεάζει το δημιούργημά του. Ωστόσο, όπως και να ΄χει, στη βάση της παραγωγής του μοντέλου, εφόσον αυτή γίνεται με υπολογιστή, ενυπάρχουν μαθηματικές διαδικασίες.

Οι βασικές μαθηματικές ιδέες πίσω από την οπτικοποίηση αντικειμένων εμφανίζονται καταγεγραμμένες για πρώτη φορά στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη, ο οποίος έζησε περίπου τον 3ο αιώνα πΧ. Ο Ευκλείδης ήταν ο πρώτος που έδωσε ένα ενιαίο και συνεκτικό σύνολο μαθηματικών τοποθετήσεων (θεωρήματα, προτάσεις, πορίσματα) βασισμένος στα παροιμιώδη πέντε αξιώματά του. Η αξιωματική μέθοδος που εμφανίζεται για πρώτη φορά τότε, έχει σημαδέψει ολόκληρη την ιστορία και τη λογική των μαθηματικών: μέχρι σήμερα, το οποιοδήποτε μαθηματικό οικοδόμημα έχει στηθεί, ακολουθεί ακριβώς αυτή τη λογική -αρχικά ορίζονται αξιώματα και αυτά οδηγούν σε θεωρήματα και προτάσεις. Στα "Στοιχεία" εξετάζονται και αναλύονται εκτενώς οι ιδιότητες των ακεραίων αριθμών και, σε πολύ μεγαλύτερη έκταση, οι ιδιότητες των γεωμετρικών σωμάτων. Επομένως, εφόσον στην τρισδιάστατη μοντελοποίηση τα γεωμετρικά αντικείμενα έχουν νευραλγικό ρόλο, η ιστορία της ξεκινάει από εκεί.

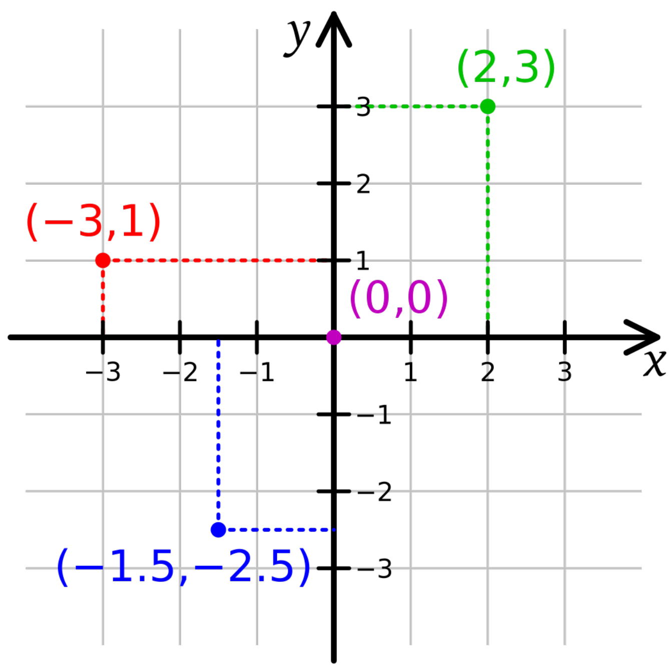
Στο έργο του Ευκλείδη, τα γεωμετρικά αντικείμενα και ο χώρος όπου είναι εμβαπτισμένα κατανοούνται με μη-αναλυτικό τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία του χώρου ορίζονται, εξετάζονται και χειραγωγούνται με μια αμιγώς γεωμετρική λογική -πχ ένας κύκλος ορίζεται από σημεία που ισαπέχουν από ένα κέντρο, χωρίς να αποδίδονται περεταίρω χαρακτηριστικά (αριθμητικές τιμές) σε αυτά. Έπρεπε να φτάσουμε στο 17ο αιώνα για να εμφανιστεί -τουλάχιστον με ένα συμπαγή τρόπο- μια αναλυτική περιγραφή της γεωμετρίας.

Τη νέα αυτή περιγραφή επινόησαν ο Ντεκάρτ και ο Φερμά, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον -αν και συνήθως η πατρότητα της περιγραφής αποδίδεται αποκλειστικά στον Ντεκάρτ. Η κεντρική ιδέα αυτού του νέου μαθηματικού οικοδομήματος -η λεγόμενη αναλυτική γεωμετρία- είναι η τοποθέτηση συστήματος συντεταγμένων στο χώρο. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σημείο στο επίπεδο περιγράφεται πλήρως από δύο συντεταγμένες, δηλαδή δύο πραγματικούς αριθμούς, ενώ κάθε σημείο στον τρισδιάστατο χώρο περιγράφεται από τρεις. Αυτές οι συντεταγμένες εξαρτώνται από το ποιο σημείο επιλέγεται ως αρχή των αξόνων.

Η νέα αυτή θεώρηση των ιδεών του Ευκλείδη έφερε επανάσταση στα μαθηματικά, ανοίγοντας νέους και ανέλπιστους ορίζοντες. Εφόσον πλέον όλα περιγράφονται από πραγματικούς αριθμούς, θεωρητικά μπορεί κανείς να κάνει γεωμετρία με χρήση αμιγώς αριθμητικών μεθόδων -δε χρειάζεται πια να σχεδιάζει σχήματα, πράγμα εξαιρετικά βολικό για περίπλοκες γεωμετρικές δομές. Επιπλέον, με το νέο σύστημα μπορούν να μετρηθούν αποστάσεις με μια ακρίβεια που η παλιά μέθοδος δε θα μπορούσε να προσφέρει. Ακόμη, εφόσον πλέον ο χώρος, οι διαστάσεις του και τα σημεία του ορίζονται απλώς μέσω αριθμητικών τιμών, γίνεται εφικτό να μελετήσει κανείς σχήματα και δομές που εδράζονται σε χώρους όχι μόνο δύο και τριών, αλλά περισσότερων διαστάσεων -ακόμη και άπειρων- όπου ακόμη και η σύλληψη του σχήματος είναι ανέφικτη, πόσω μάλλον ο σχεδιασμός του! Αυτό αξιοποιήθηκε σε πληθώρα μαθηματικών και φυσικών κλάδων -πχ η ανάλυση σήματος είναι ακριβώς αυτό: καταγραφή των "συνιστωσών" ενός σημείου-σήματος σε ένα χώρο άπειρων διαστάσεων, οι διαστάσεις του οποίου είναι οι αρμονικές.

Λίγο αργότερα, στα μέσα του 18ου αιώνα, ο Συλβέστερ επινόησε τους πίνακες και τα μαθηματικά τους. Οι πίνακες πρόσφεραν ακόμα περισσότερες δυνατότητες μελέτης και διαχείρισης των χώρων -Ευκλείδιων ή μη. Ένα από τα συγκλονιστικά οφέλη που προσέφεραν και που σημάδεψε ανεξίτηλα την επιστήμη ήταν ότι τοποθέτησαν σε ένα πάρα βολικό πλαίσιο τους λεγόμενους γραμμικούς μετασχηματισμούς, δηλαδή την επικοινωνία μεταξύ διαφορετικών συστημάτων συντεταγμένων, καθώς και τους μετασχηματισμούς διανυσμάτων (περισσότερα για αυτό το θέμα στη συνέχεια της εργασίας). Σε ό,τι αφορά τα τρισδιάστατα γραφικά, δε θα ήταν υπερβολή αν λέγαμε ότι χωρίς τους πίνακες το CGI θα ήταν εντελώς διαφορετικό απ' αυτό που ξέρουμε σήμερα: όπου υπάρχουν αντανακλάσεις ή διαστρεβλώσεις φωτός, υπάρχουν και πίνακες.

Οι υπολογιστές τελικά εμφανίστηκαν τη δεκαετία του 1950 και επιστρατεύτηκαν για μαθηματικές χρήσεις. Αρχικά, η χρήση τους εξαντλούταν σε στρατιωτικές



Σχήμα 1.4: *Το Καρτεσιανό επίπεδο και κάποια σημεία πάνω σε αυτό (πηγή wikipedia)*

Σχήμα 1.5: *Ένα μοντέλο της τσαγιέρας της Γιούτα (πηγή Wikipedia).*

και επιστημονικές εφαρμογές. Η χρήση τους για τρισδιάστατη μοντελοποίηση θεωρείται ότι ξεκίνησε λίγο μετά το 1960, οπότε και διατέθηκε στο εμπόριο το πρώτο σύστημα υπολογιστικής σχεδίασης (CAD, Computer Aided Design). Η πραγματική τομή έγινε το 1963, οπότε ο Σάδερλαντ έβγαλε το Schetchpad, το οποίο με την τρομερά εύχρηστη διεπαφή μεταξύ χρήστη και υπολογιστή που παρείχε, έδειξε υπαράνω πάσης αμφιβολίας ότι ο υπολογιστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξυπηρετήσει σχεδιαστές και καλλιτέχνες. Την ίδια χρονιά, η κοινοπραξία της General Motors και της IBM έφερε το DAC-1 (Design Augmented by Computer). Αυτή η εφαρμογή απέδειξε ότι η οπτικοποίηση του σχεδιασμού με υπολογιστή μπορεί να περικόψει σε τεράστιο βαθμό το φόρτο εργασίας του σχεδιασμού, με συνακόλουθο αποτέλεσμα την επιτάχυνση της παραγωγής. Μέχρι τις αρχές του 1970 είχαν αρχίσει ήδη να στήνονται οι πρώτες εταιρίες εξαρτημάτων και λογισμικού τρισδιάστατων γραφικών.

Ακολούθησαν κάποια χρόνια δοκιμών και βελτιστοποίησης των αλγορίθμων για να αναπαραχθούν φαινόμενα όπως ανακλάσεις, διαθλάσεις και σκιές. Στο πλαίσιο αυτής της μελέτης εμφανίστηκε και το διάσημο μοντέλο τσαγιέρας της Γιούτα, το οποίο έγινε σύμβολο των τρισδιάστατων γραφικών, αφού πρώτα είχε χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της ικανότητας λογισμικών και προγραμμάτων. Λόγω της δομής του, της ποικιλίας των επιφανειών του και του ότι λόγω σχήματος μπορούσε να ρίξει σκιά στον εαυτό του, θεωρήθηκε ιδανικό τεστ.

Το 1981 εισήχθηκαν στην αγορά οι πρώτοι προσωπικοί υπολογιστές της IBM. Μέχρι τότε τα τρισδιάστατα γραφικά εφαρμόζονταν σχεδόν αποκλειστικά στην αεροπορική και την αυτοκινητιστική βιομηχανία. Από εκεί και πέρα όμως άρχισαν να χρησιμοποιούνται και στη διαφήμιση και αναπτύχθηκε και η στερεά μοντελοποίηση.

Το 1983 εκδόθηκε το διδιάστατο AutoCAD, το οποίο ήταν τομή διότι ήταν εξίσου λειτουργικό με τα μέχρι τότε προγράμματα CAD, αλλά είχε μικρότερο κόστος. Με τον καιρό, η πρόσβαση σε επαγγελματικά προγράμματα και υλικά άρχισε να γίνεται όλο και ευκολότερη και φθηνότερη, δίνοντας την ευκαιρία σε

Σχήμα 1.6: *Ένα ανθρώπινο αυτί που προέκυψε από τρισδιάστατη εκτύπωση (πηγή www.theverge.com).*

εταιρίες, ανεξάρτητους πράκτορες και ερασιτέχνες να αναπτύσσουν μοντέλα, ενώ η ανάπτυξη του λογισμικού έκανε τα προγράμματα γρηγορότερα και πιο εύχρηστα. Η εμφάνιση και διάδοση του διαδικτύου επιτάχυνε ακόμα περισσότερο την εξοικείωση του κοινού με το σχεδιασμό, ενώ δεν άργησε να κάνει την εμφάνισή της και η τρισδιάστατη εκτύπωση.

Αυτό έγινε με την ανάπτυξη της τεχνικής της στερεολιθογραφίας, δηλαδή την παραγωγή αντικειμένων σε στρώματα. Το πρώτο μηχάνημα που αξιοποίησε αυτή την τεχνική κυκλοφόρησε το 1992 και λειτουργούσε με φωτοπολυμερές, ένα υλικό με ακρυλική βάση, το οποίο μετατρέπεται σε πλαστικό υπό την επίδραση υπεριώδους ακτινοβολίας λέιζερ. Άλλα μηχανήματα που εμφανίστηκαν αργότερα χρησιμοποιούσαν σκόνη.

Στην αρχή, όπως είναι φυσικό, δεν είχαν συνειδητοποιήσει όλοι την αξία της νέας αυτής τεχνολογίας. Ήταν ακόμη ακριβή και, προφανώς, είχε και ελαττώματα. Ωστόσο, άρχισαν να γίνονται βελτιώσεις, οι οποίες προήλθαν κυρίως από τον τομέα της ιατρικής, όπου εταιρίες άρχισαν να δημιουργούν όργανα και προσθετικά. Τελικά, το 1999 έγινε σε άνθρωπο η πρώτη μεταμόσχευση οργάνου -μια συνθετική κύστη- που παράχθηκε από τρισδιάστατη εκτύπωση.

Με τον καιρό και με τη συμβολή του διαδικτύου, οι άνθρωποι άρχισαν να εξοικειώνονται με την τρισδιάστατη εκτύπωση και να συνειδητοποιούν την αξία της -αναπτύχθηκε μέχρι και εκτυπωτής που μπορούσε να τυπώσει τα ίδια του τα εξαρτήματα!

Μέχρι σήμερα, έχουν χρηματοδοτηθεί αμέτρητα προγράμματα για την ενδυνάμωση και βελτιστοποίηση της τρισδιάστατης εκτύπωσης. Πλέον τυπώνονται από οικιακά αντικείμενα και μικροηλεκτρονικά εξαρτήματα μέχρι προσθετικά μέλη και όργανα.

Κλείνοντας, επισημαίνουμε την καίρια σημασία που είχαν τα μαθηματικά για την ανάπτυξη όλων αυτών των θαυμαστών επιτευγμάτων: όλα ξεκινάνε από την συνεκτική τοποθέτηση και μελέτη της γεωμετρίας. Με την ανάπτυξη του υπολογιστή βρέθηκε ο τρόπος η γεωμετρία αυτή να απεικονιστεί και αυτή η δυνατότητα, με τον καιρό, έγινε διαθέσιμη στο κοινό, χωρίς να είναι απαγορευτική οικονομικά. Πλέον ο ρεαλισμός δεν εξαντλείται στην εικόνα: με την τρισδιάστατη εκτύπωση τα σχέδια μπορούν να γίνουν στην κυριολεξία χειροπιαστά. Ζούμε στην εποχή που το όριο μοντέλου και πραγματικού αντικειμένου, σε αυτό τουλάχιστον το πλαίσιο, αρχίζει να γίνεται θολό!

Πλέον, θα πρέπει να έχει αποσαφηνιστεί η σημασία των μαθηματικών για τα τρισδιάστατα γραφικά. Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε κάποιες μαθηματικές έννοιες που υπεισέρχονται στο πεδίο των τρισδιάστατων μοντέλων. Συγκλονιστικής σημασίας εκεί είναι η αναλυτική γεωμετρία, γι΄ αυτό από αυτήν θα ξεκινήσουμε.

Κεφάλαιο 2

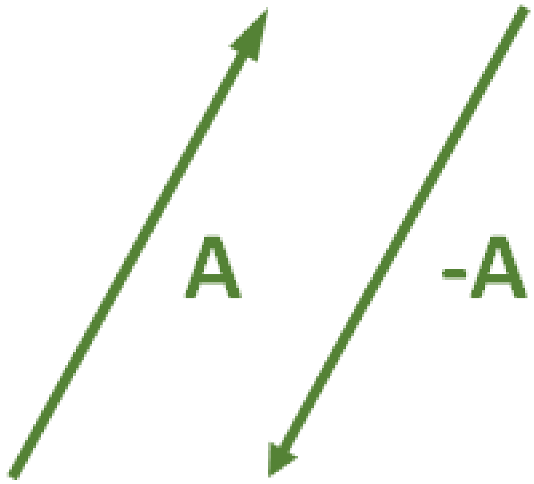
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ, ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

2.1 Διανυσματική Ανάλυση

Τη χρησιμότητα της έννοιας του διανυσματός είναι πολύ εύκολο να την αντιληφθεί κανείς διαισθητικά. Στην ουσία διάνυσμα είναι μια οντότητα η οποία εκτός από μέτρο -δηλαδή μήκος- έχει και κατεύθυνση. Πράγματι, είναι προφανές ότι αν κάποιος βρίσκεται σε κάποιο σημείο και μετακινηθεί κατά 4 μέτρα, δε μάθαμε και πολλά για το πού ακριβώς κατέληξε: θα μπορούσε να έχει μετακινηθεί προς τα πάνω, προς τα δεξιά, προς τα αριστερά ή προς οποιαδήποτε άλλη κατεύθυνση. Επομένως, για να μάθουμε την τελική του θέση, χρειαζόμαστε περισσότερες πληροφορίες. Αυτές οι πληροφορίες είναι κωδικοποιημένες στο διάνυσμα μετατόπισής του.

Φυσικά, δεν είναι όλα τα μεγέθη διανύσματα. Όταν κάτι έχει μάζα πέντε κιλά αυτό είναι όλο κι όλο που χρειάζεται να ξέρουμε, διότι η μάζα είναι αυτό που αποκαλούμε "μονόμετρο" ή αλλιώς "βαθμωτό" μέγεθος, δηλαδή δεν έχει κατεύθυνση -η μάζα δεν πρέπει να συγχέεται με το βάρος, το οποίο είναι διάνυσμα, διότι είναι δύναμη!

Τώρα, όπως είπαμε, η τομή που έφερε η αναλυτική γεωμετρία ήταν η κωδικοποίηση των σημείων μέσω συντεταγμένων. Άμεση συνέπεια αυτής της θεώρησης, είναι η εμπλοκή των διανυσμάτων σε αυτή την περιγραφή: η μετακίνηση από ένα σημείο σε ένα άλλο θα περιγράφεται από ένα διάνυσμα διότι μια τέτοια μετακίνηση έχει τόσο μέτρο όσο και κατεύθυνση. Αυτό είναι προφανές για χώρους δύο διαστάσεων και άνω, αλλά ακόμη και σε χώρους μίας διάστασης -δηλαδή επάνω σε γραμμές-, η μετακίνηση μπορεί να έγινε είτε προς τη μία είτε προς την άλλη



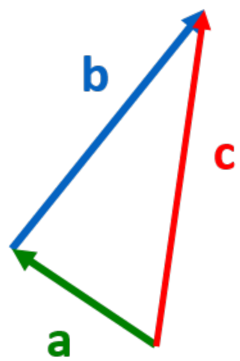
Σχήμα 2.1: *Απεικόνιση των διανυσμάτων* $\vec{A}$, $-\vec{A}$*(πηγή efcms.engr.utk.edu).*

κατεύθυνση. Πέραν αυτού, κάθε σημείο μπορεί να περιγραφεί ισοδύναμα από ένα διάνυσμα: αντί να λέμε ότι ασχολούμαστε, για παράδειγμα, με το σημείο με συντεταγμένες 3 στον άξονα x και 5 στον άξονα y (το οποίο γράφεται πιο συνεκτικά βάζοντας τις συντεταγμένες σε μια παρένθεση, δηλαδή $(3, 5)$), μπορούμε ισοδύναμα να αναφερόμαστε στο διάνυσμα $3\hat{x} + 5\hat{y}$ (το τι ακριβώς σημαίνουν αυτά τα σύμβολα θα το εξηγήσουμε σύντομα), υπό την έννοια ότι είναι ένα διάνυσμα με αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το σημείο $(3, 5)$.

Σε όλη την εργασία θα ακολουθούμε το συνήθη συμβολισμό, όπου ένα διάνυσμα θα αναγράφεται με ένα βελάκι από πάνω του, σε αντίθεση με τα βαθμωτά μεγέθη που θα αναγράφονται χωρίς βελάκι. Το μέτρο ενός διανύσματος θα το γράφουμε περικλείοντας το διάνυσμα σε δύο κάθετες γραμμές (πχ το μέτρο του διανύσματος $\vec{a}$ θα το γράφουμε $|\vec{a}|$) και, βέβαια, αυτή η ποσότητα θα ταυτίζεται με το μήκος του. Στα διαγράμματα, τα διανύσματα σχεδιάζονται με ένα απλό βέλος: η μύτη του βέλους υποδεικνύει την κατεύθυνση του διανύσματος και το μήκος του αντιστοιχεί στο μέγεθός του, δηλαδή στο μέτρο του. Να σημειωθεί ότι το διάνυσμα $-\hat{a}$ είναι ένα διάνυσμα ακριβώς ίδιο με το $\hat{a}$, αλλά αντίθετης κατεύθυνσης. Σημειώνεται ότι τα διανύσματα επιδέχονται παράλληλη μετατόπιση: αυτό σημαίνει ότι όλα τα διανύσματα με συγκεκριμένο μέτρο και κατεύθυνση είναι απολύτως ισοδύναμα, επομένως μπορούμε να μετακινούμε ένα διάνυσμα κατά βούληση όπου μας βολεύει, εφόσον δεν αλλάζουμε το μέτρο και την κατεύθυνσή του.

Συνεχίζουμε ορίζοντας τις πράξεις διανυσμάτων, οι οποίες εξυπηρετούν στη διαχείρισή τους.

Α) Η πρώτη πράξη που θα ορίσουμε είναι η *πρόσθεση διανυσμάτων*. Είναι προ-



Σχήμα 2.2: *Η πρόσθεση δύο διανυσμάτων εικονικά (πηγή efcms.engr.utk.edu).*

φανές από τη θεώρηση των διανυσμάτων ως εικονοποίηση μετακινήσεων, ότι αυτή η πράξη θα ισοδυναμεί με διαδοχικές μετακινήσεις. Επομένως, αν υποθέσουμε ότι έχουμε δύο διαδοχικές τέτοιες μετακινήσεις και θέλουμε να βρούμε την τελική θέση, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να δούμε πού κατέληξε το σώμα μετά την πρώτη μετατόπιση και από εκεί να κάνουμε και τη δεύτερη. Δηλαδή, το άθροισμα δύο διανυσμάτων προκύπτει τοποθετώντας την ουρά του δεύτερου ακριβώς πάνω στη μύτη του πρώτου. Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική, γεγονός που οφείλεται στην αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης βαθμωτών, και προσεταιριστική (αυτά μπορούν εύκολα να αποδειχτούν από τη θεώρηση των διανυσμάτων ως σημεία με συντεταγμένες), δηλαδή

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{2.1}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \tag{2.2}$$

ενώ σημειώνουμε ότι η αφαίρεση ενός διανύσματος ισοδυναμεί με πρόσθεση του αντίθετού του,

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}). \tag{2.3}$$

Β) Πέραν της πρόσθεσης, υπάρχει ο *πολλαπλασιασμός διανυσμάτων με βαθμωτά μεγέθη*. Πρακτικά, αυτό που προκύπτει σε αυτή την περίπτωση είναι ένα διάνυσμα με ίδια κατεύθυνση με το αρχικό, αλλά με μέτρο πολλαπλασιασμένο με το βαθμωτό -προφανώς αν το βαθμωτό είναι αρνητικός αριθμός, επειδή το μέτρο είναι μήκος οπότε δε μπορεί να είναι αρνητικό, το αποτέλεσμα θα είναι διάνυσμα αντίθετης κατεύθυνσης και μέτρου πολλαπλασιασμένου με την απόλυτη τιμή του βαθμωτού. Αυτός ο πολλαπλασιασμός είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι είναι επιμεριστικός:

$$k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}, \tag{2.4}$$

k βαθμωτό. Σημειώνουμε ότι δεν ορίζεται πρόσθεση βαθμωτού και διανύσματος: είναι μεγέθη ανόμοια και η πρόσθεσή τους στερείται νοήματος!

Μιλήσαμε για πρόσθεση διανυσμάτων μεταξύ τους και πολλαπλασιασμό διανυσμάτων με βαθμωτά. Το επόμενο βήμα είναι να ασχοληθούμε με πολλαπλασιασμό διανύσματος με διάνυσμα. Υπάρχουν δύο τέτοιου είδους πολλαπλασιασμοί: το εσωτερικό ή βαθμωτό και το εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο.

Γ) Το *εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων* ορίζεται ως

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta, \tag{2.5}$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα αν τοποθετηθούν με τρόπο ώστε να έχουν κοινή αρχή. Παρατηρούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος και όχι διάνυσμα. Εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι αντιμεταθετική και επιμεριστική πράξη:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}, \tag{2.6}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}. \tag{2.7}$$

Από τον ορισμό είναι προφανές ότι το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του είναι ίσο με το μέτρο του στο τετράγωνο (προφανώς κάθε διάνυσμα σχηματίζει με τον εαυτό του μηδενική γωνία), ενώ το εσωτερικό γινόμενο δύο κάθετων διανυσμάτων είναι ίσο με 0.

Δ) Το *εξωτερικό γινόμενο* δύο διανυσμάτων ορίζεται ως:

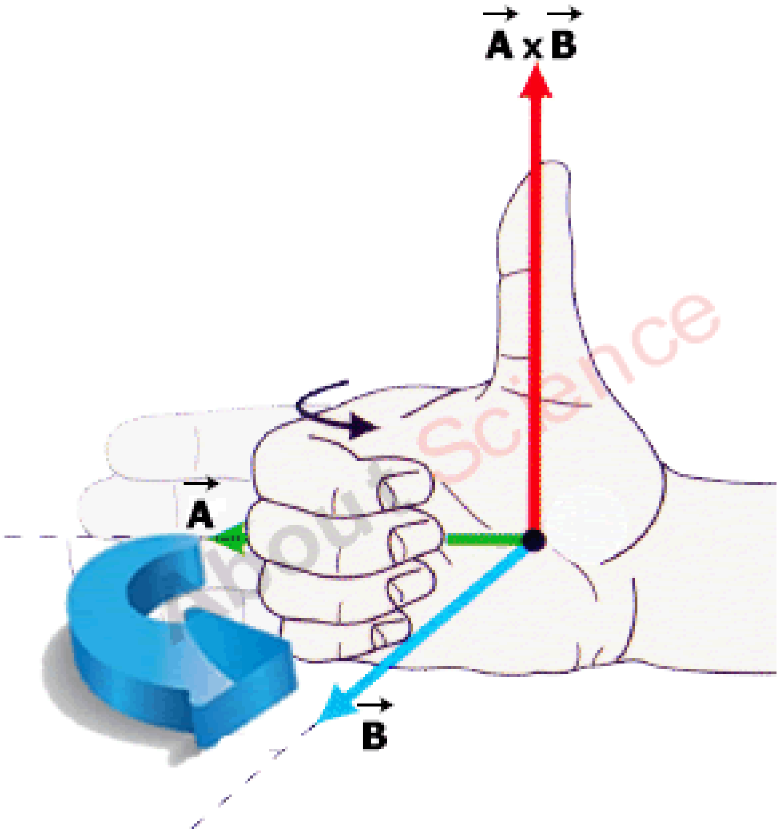
$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|sin\theta\hat{n}, \tag{2.8}$$

όπου $\hat{n}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{a}$, $\vec{b}$. Μοναδιαίο διάνυσμα είναι ένα διάνυσμα που εξ ορισμού έχει μήκος 1 και, για να το ξεχωρίζουμε από τα υπόλοιπα, θα το συμβολίζουμε όχι με βελάκι από πάνω, αλλά με καπελάκι. Προφανώς, σε τρισδιάστατο χώρο υπάρχουν δύο κατευθύνσεις κάθετες στο επίπεδο που ορίζουν δύο διανύσματα. Η κατεύθυνση του εξωτερικού γινομένου αποσαφηνίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού: ξεκινάμε με τα δάχτυλα του δεξιού χεριού επάνω στο πρώτο διάνυσμα που εμφανίζεται στο εξωτερικό γινόμενο και τα στρέφουμε προς το δεύτερο -μέσω της μικρότερης γωνίας! Τότε, ο αντίχειρας δείχνει προς την κατεύθυνση του $\hat{n}$.

Να σημειωθεί ότι, σε αντίθεση με το εσωτερικό γινόμενο όπου το αποτέλεσμα είναι βαθμωτό, στο εξωτερικό γινόμενο το αποτέλεσμα είναι διάνυσμα.

Το εξωτερικό γινόμενο διαθέτει την επιμεριστική ιδιότητα:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}, \tag{2.9}$$



Σχήμα 2.3: *Ο κανόνας του δεξιού χεριού (πηγή www.pinterest.com).*

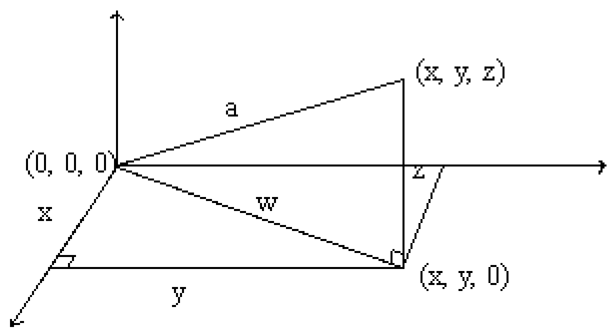
όμως όχι την αντιμεταθετική. Για την ακρίβεια, ισχύει

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \tag{2.10}$$

Σημειώνουμε, επίσης, ότι γεωμετρικά το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το εμβαδό ενός παραλληλογράμμου με μήκη πλευρών τα μέτρα των δύο επιμέρους διανυσμάτων. Τέλος, επειδή ένα διάνυσμα σχηματίζει με τον εαυτό του μηδενική γωνία, το εξωτερικό γινόμενο κάθε διανύσματος $\vec{a}$ με τον εαυτό του είναι ίσο με 0: $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

2.2 Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Στην προηγούμενη ενότητα μιλήσαμε για πράξεις διανυσμάτων και τις ιδιότητές τους, χωρίς να αναφερθούμε σε συστήματα συντεταγμένων. Πολλές φορές, στην πράξη, βολεύει να γινόμαστε πιο συγκεκριμένοι και να γράφουμε τα διανύσματα επάνω σε κάποιο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Ο τρόπος γραφής τους



Σχήμα 2.4: *Ένα διάνυσμα στον τρισδιάστατο χώρο και η ανάλυσή του στους τρεις άξονες (πηγή members.tripod.com).*

γενικά εξαρτάται από την αρχή των αξόνων που επιλέγεται κάθε φορά και από το σύστημα συντεταγμένων πάνω στο οποίο επιλέγουμε να εκφράσουμε τα διανύσματα. Υπάρχουν πάρα πολλά συστήματα συντεταγμένων, αλλά εδώ θα ξεκινήσουμε από το απλούστερο, το λεγόμενο Καρτεσιανό. Θέλουμε να συνδεθούμε με τρισδιάστατα γραφικά, οπότε σε όλη την παρακάτω ανάλυση θα θεωρούμε τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, δηλαδή χώρο που όλα τα σημεία του περιγράφονται από τρεις ανεξάρτητες μεταξύ τους συντεταγμένες.

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ορίζονται στο χώρο τρεις κάθετοι μεταξύ τους άξονες, όπου ο ένας μετράει μήκος (x), ο άλλος πλάτος (y) και ο τρίτος ύψος (z). Ορίζουμε για καθεμιά από αυτές τις διαστάσεις και ένα μοναδιαίο διάνυσμα επί του αντίστοιχου άξονα, δηλαδή τα $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ αντίστοιχα. Αυτά αποκαλούνται διανύσματα βάσης.

Λόγω του ότι, όπως έχουμε πει, μπορούμε να γράψουμε κάθε σημείο του χώρου μέσω των συντεταγμένων του, μπορούμε να γράψουμε και κάθε διάνυσμα συναρτήσει των διανυσμάτων βάσης:

$$\vec{a} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, \tag{2.11}$$

όπου οι x, y, z καλούνται συνιστώσες του διανύσματος και αντιστοιχούν στο μήκος των προβολών του διανύσματος σε κάθε άξονα. Σημειώνεται ότι η ανάλυση σε αυτά τα διανύσματα βάσης γίνεται με μοναδικό τρόπο για κάθε διάνυσμα.

Χρησιμοποιώντας αυτά που είδαμε πριν, μπορούμε να δούμε πώς γράφονται οι ιδιότητες των διανυσμάτων υπό μορφή συντεταγμένων:

$$\vec{a_1}+\vec{a_2} = (x_1\hat{x}+y_1\hat{y}+z_1\hat{z})+(x_2\hat{x}+y_2\hat{y}+z_2)\hat{z} = (x_1+x_2)\hat{x}+(y_1+y_2)\hat{y}+(z_1+z_2)\hat{z}, \tag{2.12}$$

δηλαδή οι συνιστώσες του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι τα αντίστοιχα αθροίσματα των επιμέρους συνιστωσών του.

Παρομοίως, για τον πολλαπλασιασμό διανύσματος και βαθμωτού:

$$k\vec{a} = k(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = kx\hat{x} + ky\hat{y} + kz\hat{z}, \tag{2.13}$$

δηλαδή η κάθε συνιστώσα του τελικού διανύσματος είναι το γινόμενο της αρχικής συνιστώσας επί το βαθμωτό.

Για το εσωτερικό γινόμενο, θα χρειαστεί να παρατηρήσουμε ότι τα μοναδιαία διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, οπότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι 0, ενώ το εσωτερικό γινόμενο κάθε μοναδιαίου με τον εαυτό είναι, από τον ορισμό του μοναδιαίου, ίσο με 1. Έτσι, μπορούμε να δούμε εύκολα ότι:

$$\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \tag{2.14}$$

από την οποία προκύπτει και ότι

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = x^2 + y^2 + z^2, \tag{2.15}$$

ή αλλιώς $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Για το εξωτερικό γινόμενο, θα πρέπει να παρατηρήσουμε τις εξής ισότητες για τα μοναδιαία διανύσματα: $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$, $\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z}$, $\hat{y} \times \hat{z} = -\hat{z} \times \hat{y} = \hat{x}$, $\hat{z} \times \hat{x} = -\hat{x} \times \hat{z} = \hat{y}$. Από αυτές συνάγουμε τον περίπλοκο τύπο:

$$\vec{a_1} \times \vec{a_2} = (y_1z_2 - z_1y_2)\hat{x} + z_1x_2 - x_1z_2)\hat{y} + x_1y_2 - y_1x_2)\hat{x}, \tag{2.16}$$

ο οποίος όμως μπορεί να γραφεί σε πιο βολική μορφή υπό μορφή ορίζουσας:

$$\vec{a_1} \times \vec{a_2} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{2.17}$$

Στο τι ακριβώς είναι η ορίζουσα θα αναφερθούμε στην επόμενη ενότητα όπου θα ασχοληθούμε με πίνακες, αλλά κάνουμε αυτή την αναφορά από τώρα για την πληρότητα της συζήτησης περί εξωτερικού γινομένου.

2.3 Πίνακες

Τα ζητήματα που θίχτηκαν στις δύο προηγούμενες ενότητες αποτελούν αντικείμενα μελέτης του κλάδου της αναλυτικής γεωμετρίας. Επί της ουσίας, αυτός ο κλάδος ασχολείται με τη μελέτη της γεωμετρίας μέσω συντεταγμένων. Στην Ευκλείδεια γεωμετρία τα διάφορα αντικείμενα ορίζονται μέσω κάποιου συγκεκριμένου χαρακτηριστικού -πχ κύκλος είναι το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από ένα συγκεκριμένο σημείο. Στην αναλυτική γεωμετρία, αντίθετα, τα αντικείμενα ορίζονται μέσω κάποιας σχέσης μεταξύ συντεταγμένων -πχ κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1 είναι το σύνολο των σημείων (x, y) για τα οποία ισχύει $x^2 + y^2 = 1$.

Ένας άλλος κλάδος των μαθηματικών που έχει έντονη σχέση με την αναλυτική γεωμετρία είναι η λεγόμενη γραμμική άλγεβρα. Η γραμμική άλγεβρα ενδιαφέρεται για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων, και μια από τις πιο συνηθισμένες μεθόδους για να γίνει αυτό είναι η αναπαράσταση των εξισώσεων σε διανυσματικούς χώρους. Επομένως, είναι προφανής η σχέση μεταξύ αναλυτικής γεωμετρίας και γραμμικής άλγεβρας: και οι δύο ενδιαφέρονται για διανύσματα, απλώς η δεύτερη ασχολείται με αυτά για έναν πολύ συγκεκριμένο λόγο. Οι πίνακες αποτελούν οντότητα νευραλγικής σημασίας για τη γραμμική άλγεβρα, και σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με αυτούς (σε όλη την εργασία παρακάτω θα αναφερόμαστε σε πραγματικούς πίνακες, δηλαδή πίνακες που όλα τους τα στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί, εκτός αν διευκρινίζεται αλλιώς).

Ο πίνακας σαν αντικείμενο είναι κάτι πάρα πολύ απλό: μια συλλογή από στοιχεία τα οποία είναι τακτοποιημένα με τρόπο ώστε να σχηματίζουν στήλες και γραμμές -ήθισται ο πίνακας να συμβολίζεται με τα στοιχεία του περικλειόμενα από παρενθέσεις ή αγκύλες. Τα στοιχεία αυτά μπορεί να είναι αριθμοί, σύμβολα ή αφηρημένες εκφράσεις. Για παράδειμα ένα αντικείμενο $\begin{bmatrix} 3 & \pi & 2.25 & 6 \\ 4r & 0 & 12 & 438 \end{bmatrix}$ είναι ένας πίνακας και, επειδή έχει 2 γραμμές και 4 στήλες, λέμε ότι είναι ένας πίνακας 2×4 (γενικά ένας $m \times n$ πίνακας είναι ένας πίνακας με m γραμμές και n στήλες). Επίσης, είναι εμφανές ότι κάθε στοιχείο ανήκει ακριβώς σε μια γραμμή και ακριβώς σε μια στήλη, και για να αναφερθούμε σε συγκεκριμένα στοιχεία ενός πίνακα χρησιμοποιούμε κάτω δείκτες που δείχνουν τη γραμμή και τη στήλη τους: το στοιχείο $A_{k,l}$ είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην k-οστή γραμμή και στην l-οστή στήλη του πίνακα A.

Οι πίνακες έχουν κι εκείνοι πράξεις, πλην όμως λίγο πιο ιδιαίτερες από τις πράξεις των απλών αριθμών και των διανυσμάτων.

Α) Η *πρόσθεση πινάκων* ορίζεται μόνο αν οι δύο πίνακες που αθροίζονται είναι της ίδιας μορφής, δηλαδή έχουν ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών. Τότε, τα στοιχεία του αθροίσματος δύο $m \times n$ πινάκων A, B δίνονται από την:

$$(A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \tag{2.18}$$

Δηλαδή, πολύ απλά, για να βρούμε τα στοιχεία του αθροίσματος πινάκων αθροίζουμε ανά θέση στον πίνακα. Είναι προφανείς όλες οι βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης, εφόσον αυτή ορίζεται (πχ $A+B = B+A$, $(A+B)+C = A+(B+C)$).

Β) Πολύ εύκολα ορίζεται και ο *πολλαπλασιασμός πίνακα με βαθμωτό.* Αν c είναι ένα βαθμωτό και A ένας πίνακας, τότε μπορεί να οριστεί ο νέος πίνακας cA και κάθε στοιχείο του είναι το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα A πολλαπλασιασμένο επί c, δηλαδή

$$(cA)_{i,j} = cA_{i,j}. \tag{2.19}$$

Γ) Ο *πολλαπλασιασμός πινάκων* είναι κάπως πιο περίπλοκος. Πρώτα απ΄ όλα, για να ορίζεται πολλαπλασιασμός μεταξύ δύο πινάκων A, B, είναι απαραίτητο ο αριθμός των στηλών του πίνακα που εμφανίζεται πρώτος στο γινόμενο να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα που εμφανίζεται δεύτερος. Πχ αν έχουμε έναν πίνακα A ο οποίος είναι 3×6 και έναν B ο οποίος είναι 6×9, τότε το γινόμενο AB ορίζεται, διότι ο A έχει τόσες στήλες όσες είναι οι γραμμές του B, δηλαδή 6. Αντίθετα, αν ο B είναι 2×3, τότε ο AB δεν ορίζεται διότι ο A έχει 6 στήλες αλλά ο B 2 γραμμές -οι A, B δεν μπορούν να πολλαπλασιαστούν!

Αν υποθέσουμε ότι καλύπτεται η παραπάνω συνθήκη και άρα ορίζεται η πράξη, τότε το γινόμενο ενός $m \times r$ πίνακα A και ενός $r \times n$ πίνακα B είναι ένας πίνακας $m \times n$ (δηλαδή ένας πίνακας με αριθμό γραμμών ίσο με τον αριθμό γραμμών του A και αριθμό στηλών ίσων με τον αριθμό στηλών του B) και το κάθε στοιχείο του δίνεται από τη σχέση

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} A_{i,k} B_{k,j}, \qquad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \tag{2.20}$$

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων ικανοποιεί την προσεταιριστική και την επιμεριριστική ιδιότητα:

$$(AB)C = A(BC), \tag{2.21}$$

$$(A+B)C = AC + BC, \qquad C(A+B) = CA + CB, \tag{2.22}$$

εφόσον ορίζονται όλοι οι επιμέρους πολλαπλασιασμοί.

Την ίδια στιγμή, όπως θα πρέπει να είναι σαφές από τη συνθήκη ορισμού του πολλαπλασιασμού, σημειώνουμε ότι ακόμη και αν ορίζεται ο AB, δεν είναι απαραίτητο να ορίζεται και ο BA. Αλλά ακόμη και να ορίζονται και οι δύο, γενικά $AB \neq BA$ (βέβαια, μπορεί υπό συνθήκες να τύχει $AB = BA$, απλώς δεν ισχύει γενικά), δηλαδή ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός.

Δ) Τέλος, ορίζεται για κάθε πίνακα η πράξης της *αναστροφής*. Ο ανάστροφος ενός πίνακα A (συμβολίζεται ως A^T) είναι ένας πίνακας που έχει τις γραμμές του A για στήλες και το αντίστροφο. Έτσι, ο ανάστροφος ενός $m \times n$ A είναι ένας $n \times m$ A^T για τα στοιχεία του οποίου ισχύει

$$(A^T)_{i,j} = A_{j,i}. \tag{2.23}$$

Είναι προφανές ότι αν αναστρέψουμε δύο φορές έναν πίνακα προκύπτει πάλι ο αρχικός πίνακας, δηλαδή $(A^T)^T = A$. Επίσης, είναι προφανείς οι ιδιότητες $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(cA)^T = cA^T$, ενώ, αν ορίζεται το γινόμενο δύο πινάκων, τότε $(AB)^T = B^T A^T$.

Τώρα θα επικεντρωθούμε σε κάποιες συγκεκριμένες κατηγορίες πινάκων οι οποίες απαντώνται πάρα πολύ συχνά σε εφαρμογές.

Ένας πίνακας της μορφής $1 \times n$ (πχ $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -10 & 9 \end{bmatrix}$) καλείται για ευνόητους λόγους πίνακας-γραμμή, ενώ ένας της μορφής $n \times 1$ (πχ $\begin{bmatrix} 1 \\ 56 \\ -31 \end{bmatrix}$) καλείται πίνακας-στήλη. Αυτά τα δύο είδη πινάκων συχνά χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν ένα διάνυσμα, και είναι εμφανές το γιατί: όπως είδαμε, ένα διάνυσμα μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω των συνταταγμένων του πάνω σε μια βάση. Οπότε κι εδώ, κωδικοποιώντας το κάθε διάνυσμα βάσης σε μία θέση πχ ενός πίνακα-στήλη και γράφοντας σε αυτή τη θέση του πίνακα την αντίστοιχη συντεταγμένη, προκύπτει μια απόλυτα συνεπής αναπαράσταση του διανύσματος.

Μια άλλη πολύ σημαντική κατηγορία πινάκων είναι οι λεγόμενοι τετραγωνικοί. Αυτοί είναι οι πίνακες που έχουν ίσο αριθμό γραμμών και στηλών, δηλαδή όλοι οι $n \times n$, για οποιοδήποτε n (κάθε $n \times n$ πίνακας καλείται τετραγωνικός τάξης n). Ακολουθούν κάποιες σημαντικές υποκατηγορίες τετραγωνικών πινάκων.

Διαγώνιος πίνακας καλείται ένας τετραγωνικός που όλα του τα στοιχεία είναι μηδενικά, εκτός από τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου. Πχ ο πίνακας $\begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,3} \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιος 3×3. Αν όλα τα στοιχεία από την κύρια διαγώνια και πάνω (και κάτω) είναι μηδενικά, ο πίνακας καλείται κάτω (άνω) τριγωνικός. Πχ ο $\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} \\ 0 & 0 & A_{3,3} \end{bmatrix}$ είναι άνω τριγωνικός.

Ο πίνακας-ταυτότητα I_n (ή απλώς I) είναι ένας διαγώνιος πίνακας τάξης n που όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι μονάδα. Καλείται ταυτότητα, διότι ο πολλαπλασιασμός του με οποιοδήποτε πίνακα -εφόσον ορίζεται- αφήνει τον πίνακα αναλλοίωτο: $AI = IA = A$ για κάθε A.

Είναι και οπτικά προφανές το πότε ένας πίνακας θα πρέπει να καλείται συμμετρικός (η συμμετρία εξετάζεται ως προς την κύρια διαγώνιο): θα πρέπει $A_{i,j} = A_{j,i}$, ή αλλιώς, από τον ορισμό του ανάστροφου, $A^T = A$. Εντελώς αντίστοιχα, θα καλείται αντισυμμετρικός όταν $A^T = -A$, ή για τα στοιχεία του $A_{i,j} = -A_{j,i}$.

Ένας πίνακας A καλείται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε $AB = BA = I_n$, I_n ο πίνακας-ταυτότητα ίδιας τάξης n με τον A. Αυτός ο B συχνά συμβολίζεται και ως A^{-1} και καλείται ο αντίστροφος του A. Για τον αντίστροφο ισχύει η ιδιότητα $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, αν οι A, B είναι αντιστρέψιμοι.

Όπως είπαμε μπορούμε να ταυτίζουμε τους πίνακες-στήλες με διανύσματα, οπότε αντίστοιχα χρησιμοποιείται συχνά και η ορολογία διάνυσμα-στήλη, Επίσης, εφόσον μιλάμε για διανύσματα που έχουν n διαστάσεις, δηλαδή n συντεταγμένες και ασχολούμαστε με πραγματικές τιμές συντεταγμένων, κάθε πίνακας-στήλη $1 \times n$ με πραγματικά στοιχεία μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα διάνυσμα που ανήκει στο χώρο $\mathbb{R}^n$, όπου ως $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται ο χώρος με n πραγματικές διαστάσεις. Τώρα, για κάθε πίνακα $n \times n$ μπορούμε να σχηματίσουμε την ποσότητα $f = x^T A x$, όπου x είναι ένα διάνυσμα-στήλη που ανήκει στον $\mathbb{R}^n$. Αν η ποσότητα f είναι θετική (αρνητική) για κάθε μη μηδενικό x, τότε ο A καλείται θετικά (αρνητικά) ορισμένος.

Τέλος, ορθογώνιος καλείται ένας αντιστρέψιμος πίνακας A που ο αντίστροφός του ισούται με τον ανάστροφό του: $A^T = A^{-1}$. Η ορίζουσα, την οποία θα ορίσουμε σε λίγο, κάθε ορθογώνιου πίνακα είναι +1 ή -1. Οι ορθογώνιοι με ορίζουσα +1 λέγονται ειδικοί ορθογώνιοι πίνακες.

Πριν κλείσουμε την ενότητα των πινάκων, θα ήταν παράλειψη αν δεν αναφερθούμε σε τρία πολύ σημαντικά αντικείμενα τα οποία μπορούμε να ορίσουμε για έναν πίνακα, και τα οποία είναι συγκλονιστικής σημασίας για τις περισσότερες εφαρμογές τους. Σημειώνουμε ότι εξακολουθούμε να ασχολούμαστε αποκλειστικά με τετραγωνικούς πίνακες, και όλα τα παρακάτω ορίζονται μόνο για αυτούς.

Α) Η πρώτη ποσότητα είναι το λεγόμενο *ίχνος* ενός πίνακα A. Πολύ απλά, το ίχνος trA είναι το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του A,

$$trA = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}. \tag{2.24}$$

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων, όπως είπαμε, δεν είναι εν γένει αντιμεταθετικός. Αντίθετα, το ίχνος του γινομένου δύο πινάκων (σημειώνεται ότι εφόσον ασχολούμαστε αποκλειστικά με τετραγωνικούς πίνακες ίδιας τάξης το γινόμενό τους ορίζεται πάντα) δεν επηρεάζεται από τη σειρά εμφάνισής τους, $tr(AB) = tr(BA)$. Με άλλα λόγια, οι πίνακες AB, BA μπορεί να είναι διαφορετικοί, όμως τα ίχνη τους είναι ίδια. Άμεση συνέπεια αυτού είναι ότι το ίχνος ενός γινομένου πολλών πινάκων είναι αναλλοίωτο υπό κυκλικές μεταθέσεις τους, αλλά όχι υπό οποιαδήποτε μετάθεση: πχ, ισχύει ότι $tr(ABCD) = tr(DABC) = tr(CDAB) = ...$ αλλά, εν γένει, $tr(ABCD) \neq tr(ACBD)$. Επίσης, από τον ορισμό του ανάστροφου, είναι εμφανές ότι $tr(A^T) = trA$.

Β) Η επόμενη ποσότητα είναι από τις πιο σημαντικές που εξετάζονται σε εφαρμογές των πινάκων, διότι παρέχει με συμπαγή τρόπο πάρα πολύ σημαντικές πληροφορίες για έναν πίνακα. Πρόκειται για την *ορίζουσα*, την οποία έχουμε ήδη αναφέρει. Συμβολίζεται ως $\det A$ ή απλώς $|A|$. Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό της ορίζουσας είναι ότι, όπως και το ίχνος, είναι αριθμός. Δηλαδή, και οι δύο αυτές οντότητες κωδικοποιούν με συνεκτικό τρόπο σημαντικές πληροφορίες για μια οντότητα πιο πολύπλοκη, όπως είναι ο πίνακας.

Αυτό δε σημαίνει ότι η ορίζουσα είναι μια ποσότητα εύκολη στο να υπολογιστεί πάντα. Το ίχνος, που αναφέρθηκε πριν, είναι κάτι εντελώς τετριμμένο: απλώς απομονώνουμε τα στοιχεία της διαγωνίου και τα προσθέτουμε. Αντίθετα, εδώ ο αυστηρός ορισμός είναι γενικά περίπλοκος:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \Big(sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma_i} \Big). \tag{2.25}$$

Το γράμμα σ αναφέρεται στις μεταθέσεις της συμμετρικής ομάδας S_n. Μια μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ είναι μια συνάρτηση που αναδιατάσσει αυτούς τους αριθμούς. Αυτό γίνεται μέσω διαδοχικών αντιμεταθέσεων δύο στοιχείων. Αν καταλήξουμε σε μια αναδιάταξη η οποία προέκυψε από το αρχικό σύνολο κατόπιν άρτιου (περιττού) αριθμού τέτοιων διαδοχικών αντιμεταθέσεων, λέμε ότι η μετάθεση ήταν άρτια (περιττή) και τότε η υπογραφή της $sgn(\sigma)$ ορίζεται ότι είναι +1 (-1). Πχ η διάταξη $\{1, 4, 2, 3\}$ προκύπτει από άρτια μετάθεση του αρχικού συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ (πρώτα ανταλλάσσεται το 3 με το 4 και προκύπτει το $\{1, 2, 4, 3\}$ και μετά το 2 με το 4 και προκύπτει το $\{1, 4, 2, 3\}$, άρα δύο μεταθέσεις), οπότε έχει υπογραφή +1. Ως σ_i ορίζεται η τιμή της i-οστής θέσης μετά τη μετάθεση σ. Στον τύπο της ορίζουσας, λοιπόν, εμφανίζεται ένα άθροισμα πάνω σε όλες τις μεταθέσεις των ακεραίων που αριθμούν τις γραμμές και τις στήλες του πίνακα και κάθε όρος του αθροίσματος έρχεται μαζί με την υπογραφή της αντίστοιχης μετάθεσης, ενώ αποτελείται από ένα γινόμενο στοιχείων του πίνακα ίσων σε πλήθος με την τάξη του. Σε κάθε όρο εμφανίζεται ακριβώς ένα στοιχείο κάθε γραμμής και κάθε στήλης.

Για να διατυπώσουμε αυτό τον τύπο με πιο απλά λόγια, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα πρέπει να κάνουμε το εξής: να πάρουμε ένα στοιχείο και να το πολλαπλασιάσουμε με ένα άλλο που όμως δεν ανήκει στην ίδια γραμμή και στην ίδια στήλη. Κατόπιν να πολλαπλασιάσουμε το γινόμενο που προέκυψε με ένα τρίτο στοιχείο, που να μην ανήκει ούτε στη γραμμή ούτε στη στήλη που ανήκαν τα δύο προηγούμενα, και να συνεχίσουμε να το κάνουμε αυτό μέχρι να εξαντλήσουμε όλες τις γραμμές και τις στήλες του πίνακα. Αυτό τον όρο θα τον συνοδέψουμε με ένα πρόσημο που θα κριθεί από το πόσες μεταθέσεις χρειάστηκαν για να φτάσουμε στη διάταξη που φτιάξαμε αν είχαμε ξεκινήσει από το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου. Και αυτό είναι μόνο ένας όρος του αθροίσματος! Θα πρέπει να βρούμε όλους τους δυνατούς τρόπους να κάνουμε αυτή τη διαδικασία, μετά να προσθέσουμε τους όρους που θα προκύψουν, και τότε, επιτέλους, θα έχουμε βρει την ορίζουσα! Φαίνεται πολύ βάρβαρη δουλειά και, πράγματι, για μεγάλους πίνακες (δηλαδή τάξης 4 και πάνω) είναι. Φυσικά, έχουν βρεθεί αρκετά τεχνάσματα στο πέρας των χρόνων τα οποία μπορούν να απλοποιήσουν τη διαδικασία υπό συνθήκες, αλλά κι αυτά δεν μπορούν να εφαρμοστούν πάντα.

Ευτυχώς, για τις μικρές τάξεις που ενδιαφερόμαστε εμείς (δηλαδή για τάξεις 1, 2, 3) τα πράγματα είναι πολύ απλά. Προφανώς ένας πίνακας τάξης 1 είναι απλώς ένα στοιχείο, οπότε δεν υπάρχουν ούτε μεταθέσεις ούτε γινόμενα: η ορίζουσα ισούται με το ίδιο το στοιχείο. Για πίνακες τάξης 2, τα πράγματα είναι και πάλι πολύ απλά:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix} = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1}, \tag{2.26}$$

ενώ για πίνακες τάξης 3 το αποτέλεσμα είναι μεν λίγο πιο περίπλοκο, αλλά πάντως διαχειρίσιμο:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3}\\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3}\\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3}\end{vmatrix} &= A_{1,1}\begin{vmatrix}A_{2,2} & A_{2,3}\\ A_{3,2} & A_{3,3}\end{vmatrix} - A_{1,2}\begin{vmatrix}A_{2,1} & A_{2,3}\\ A_{3,1} & A_{3,3}\end{vmatrix} + A_{1,3}\begin{vmatrix}A_{2,1} & A_{2,2}\\ A_{3,1} & A_{3,2}\end{vmatrix}\\ &= A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{2,1}A_{3,2}A_{1,3}\\ &\qquad - A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1} - A_{2,1}A_{3,2}A_{1,3} - A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Τώρα, για ποιο λόγο να μπει κανείς σε αυτή τη διαδικασία και να υπολογίσει αυτή την παράξενη ποσότητα; Ένα συγκλονιστικής σημασίας θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας λέει ότι ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι μη μηδενική. Αυτό είναι σπουδαίο, διότι πολύ συχνά καλούμαστε να εξετάσουμε αν ένας πίνακας μπορεί να αντιστραφεί. Λίγες δοκιμές ακόμη και σε σχετικά απλούς πίνακες αρκούν για να φανεί ότι ο ορισμός του αντίστροφου πίνακα συνήθως είναι πολύ δύσχρηστος και δεν είναι εύκολο με την εφαρμογή του να δώσουμε απάντηση σε αυτό το ερώτημα. Αντίθετα, με το προαναφερθέν θέωρημα ο ορισμός παρακάμπτεται: αρκεί να υπολογίσουμε μια συγκεκριμένη ποσότητα -η οποία μάλιστα προκύπτει κατευθείαν από τον πίνακα- και να ελέγξουμε αν αυτή είναι μηδέν. Φυσικά, η ορίζουσα δεν είναι και αυτή πάντα πολύ εύκολο να υπολογιστεί, ωστόσο ο δρόμος του ορισμού του αντίστροφου πίνακα είναι σίγουρα πιο δύσβατος, πολλές φορές ακόμη και για πίνακες μικρής τάξης.

Τέλος, αναφέρουμε την ενδιαφέρουσα ιδιότητα $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Γ) Η τελευταία ποσότητα, στην οποία θα αναφερθούμε πριν προχωρήσουμε, είναι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα A.

Αν για έναν αριθμό λ και για ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{v}$ ισχύει η εξίσωση

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}, \tag{2.28}$$

τότε το λ λέγεται ιδιοτιμή και το $\vec{v}$ ιδιοδιάνυσμα του A. Το σημαντικό εδώ είναι ότι η παραπάνω εξίσωση έχει μη μηδενική λύση $\vec{v}$ αν και μόνο αν ο πίνακας $A-\lambda I_n$ είναι μη αντιστρέψιμος, ή ισοδύναμα όταν ισχύει

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{2.29}$$

Αυτή η εξίσωση είναι η λεγόμενη εξίσωση ιδιοτιμών του A, διότι συχνά επιλύεται για να βρεθούν οι ιδιοτιμές του. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτή η εξίσωση έχει το πολύ n διαφορετικές λύσεις για $n \times n$ πίνακες, που σημαίνει ότι το πλήθος διαφορετικών ιδιοτιμών ενός πίνακα είναι το πολύ ίσιο με την τάξη του. Στην πράξη, όταν βρεθούν οι ιδιοτιμές ενός πίνακα, επιλύεται και η $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ προκειμένου να βρεθούν και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε καθεμιά από αυτές.

2.4 Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

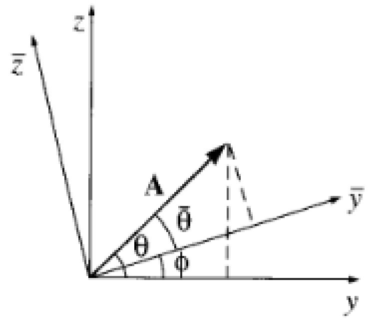
Στην πρώτη ενότητα ορίσαμε ως διάνυσμα μια ποσότητα που έχει μέτρο και κατεύθυνση. Η αλήθεια είναι ότι, πολλές φορές, αν αρκεστούμε σε αυτό, η απλότητα της ιδέας του διανύσματος μπορεί να γίνει παραπλανητική.

Σύμφωνα με την ανάλυση που ακολούθησε, δίνεται η εντύπωση ότι μπορούμε να κωδικοποιούμε πληροφορίες κατά βούληση σε διανύσματα. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι κάποιος έχει στην τσέπη του x_1 χαρτονομίσματα των 5 Ευρώ, y_1 των 10 και z_1 των 20. Μπορεί κανείς να μπει στον πειρασμό, για οικονομία χώρου και υπολογισμών, να κωδικοποιήσει αυτή την πληροφορία σε ένα διάνυσμα ενός τρισδιάστατου χώρου, δηλαδή να ορίσει το $\vec{a_1} = x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}$. Πράγματι, αυτή η τοποθέτηση μοιάζει να ικανοποιεί την ιδιότητα της πρόσθεσης διανυσμάτων: αν κάποιος άλλος έχει x_2 χαρτονομίσματα των 5 Ευρώ, y_2 των 10 και z_2 των 20, τότε για αυτόν $\vec{a_2} = x_2\hat{x} + y_2\hat{y} + z_2\hat{z}$, και προφανώς όταν προσθέσουν τα λεφτά τους προκύπτει ένα διάνυσμα $\vec{a} = (x_1 + x_2)\hat{x} + (y_1 + y_2)\hat{y} + (z_1 + z_2)\hat{z}$, δηλαδή πράγματι η ποσότητα που ορίσαμε αρχικά ως διάνυσμα προστίθεται ως διάνυσμα. Όμως είναι απόλυτα προφανές ότι υπάρχει κάτι μάλλον προβληματικό σε αυτή: τι νόημα έχει η έννοια της κατεύθυνσης σε ένα τέτοιο πλαίσιο; Αυτό που ορίσαμε μοιάζει εντελώς αφύσικο, ή τουλάχιστον πολύ διαφορετικό από το "διάνυσμα" όπως συνήθως χρησιμοποιείται στη φυσική και στα μαθηματικά. Και πράγματι, στη διαδικασία που ακολουθήσαμε, υπάρχει μια λεπτομέρεια η οποία δεν ελήφθη υπ΄ όψιν και μας οδήγησε σε κάτι ασυνάρτητο. Αυτή η λεπτομέρεια έχει να κάνει με τους μετασχηματισμούς.

Θα πρέπει να είναι προφανές από όσα έχουμε πει ότι αν αλλάξουμε σύστημα συντεταγμένων, προφανώς θα αλλάξει και το διάνυσμα. Αυτό ακριβώς συμβαίνει, για παράδειγμα, όταν δύο συρμοί του μετρό πλησιάζουν μεταξύ τους: ένας επιβάτης του ενός συρμού βλέπει τον άλλο να κινείται πιο γρήγορα απ΄ ό,τι τον βλέπει ένας ακίνητος παρατηρητής στην αποβάθρα, διότι άλλο διάνυσμα μετατόπισης έχει ο δεύτερος συρμός για τον επιβάτη και άλλο για τον ακίνητο παρατηρητή. Ο λόγος είναι ότι αυτοί οι δύο αντιλαμβάνονται τα πάντα μέσα από διαφορετικά συστήματα αναφοράς (όπως λέγονται σε αυτό το πλαίσιο τα συστήματα συντεταγμένων). Άρα, λοιπόν, αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ είναι να θυμόμαστε ότι τα διανύσματα μετασχηματίζονται με κάθε αλλαγή συστήματος συντεταγμένων. Ο ακριβής τρόπος που συμβαίνει αυτό, είναι στην πραγματικότητα απόρροια της ίδιας της γεωμετρίας, δηλαδή είναι ένα απολύτως εγγενές χαρακτηριστικό του χώρου, κάτι σαν "γεωμετρικός νόμος". Αυτόν ακριβώς το νόμο αποτυγχάνει να ικανοποιήσει το χρηματικό διάνυσμα που επινοήσαμε νωρίτερα, και γι΄ αυτό ακριβώς στην πραγματικότητα δεν είναι διάνυσμα, με την αυστηρή έννοια του όρου.

Τώρα, ας θεωρήσουμε δύο διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων x, y, z και $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, που έχουν κοινή αρχή των αξόνων και κοινό άξονα $x = \bar{x}$, αλλά ο $\bar{y}$ (οπότε και ο $\bar{z}$ λόγω της αμοιβαίας καθετότητας) είναι στραμμένος ως προς τον y κατά γωνία ϕ. Αν θεωρήσουμε ως θ, $\bar{\theta}$ τις γωνίες που σχηματίζει ένα διάνυσμα $\vec{A}$ με τους άξονες y, $\bar{y}$ αντίστοιχα, τότε με απλή τριγωνομετρία μπορούμε να βρούμε τις συνιστώσες που έχει το $\vec{A}$ στο δεύτερο σύστημα συντεταγμένων συναρτήσει των συνιστωσών που έχει στο πρώτο:

$$\bar{A}_y = a\cos\bar{\theta} = A\cos(\theta - \phi) = A(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) = A_y\cos\phi + A_z\sin\phi, \tag{2.30}$$



Σχήμα 2.5: *Ένα διάνυσμα σε δύο διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων, όπου το ένα έχει στραφεί ως προς το άλλο (ο άξονας x είναι κοινός και για τα δύο, πηγή D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics).*

$$\bar{A}_z = A\sin\bar{\theta} = A\sin(\theta-\phi) = A(\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi) = -A_y\sin\phi + A_z\cos\phi. \tag{2.31}$$

Τώρα, αυτές οι σχέσεις μπορούν να γραφούν σε μια συμπαγή μορφή, αν θυμηθούμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων. Πράγματι, οι παραπάνω ξαναγράφονται με τον πολύ πιο εύχρηστο τρόπο:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_y \\ \bar{A}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_y \\ A_z \end{bmatrix}. \tag{2.32}$$

Αυτή η διαπίστωση είναι συγκλονιστικής σημασίας. Αυτό που κάναμε εδώ, στην ουσία, ήταν να ψάξουμε τι συμβαίνει στις συντεταγμένες ενός διανύσματος όταν το σύστημα συντεταγμένων στρίψει κατά κάποια γωνία γύρω από έναν άξονα (εδώ αυτός ο άξονας ήταν ο x, αλλά φυσικά θα μπορούσε να είναι οποιοσδήποτε από τους τρεις). Αυτό που βρήκαμε μας δείχνει ότι, τελικά, ο τρόπος που θα μετασχηματιστεί το διάνυσμα υπό μια τέτοια αλλαγή δεν είναι τίποτα άλλο παρά η δράση ενός πίνακα πάνω του! Επομένως, καταφέραμε με έναν πολύ γενικό τρόπο να συνδέσουμε τους πίνακες με αλλαγές συστημάτων συντεταγμένων. Ο λόγος που καταφέραμε να το κάνουμε αυτό είναι ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι γραμμικός, δηλαδή δρα γραμμικά στα διανύσματα. Ο αυστηρός ορισμός για διανύσματα $\vec{v}, \vec{u}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ότι ένας μετασχηματισμός T είναι γραμμικός όταν ισχύει:

$$T(\vec{v}+\vec{u}) = T\vec{v} + T\vec{u}, \tag{2.33}$$

$$T(c\vec{v}) = cT\vec{v} \tag{2.34}$$

για κάθε βαθμωτό c και για κάθε $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$.

Μπορεί να αποδειχτεί -αλλά μετά την παραπάνω θεώρηση θα πρέπει να είναι και διαισθητικά προφανές- ότι όταν θέλουμε να περάσουμε από ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο το οποίο έχει περιστραφεί σε σχέση με το πρώτο κατά μια αυθαίρετη γωνία γύρω από έναν αυθαίρετο άξονα, τα διανύσματα μετασχηματίζονται γραμμικά. Ο λόγος είναι ότι όλες οι συνιστώσες του διανύσματος στο νέο σύστημα συντεταγμένων μπορούν να γραφούν ως προβολές του διανύσματος στον αντίστοιχο άξονα, δηλαδή ως το μέτρο του διανύσματος επί κάποιο ημίτονο ή συνημίτονο, και αυτό το ημίτονο ή συνημίτονο μπορεί με τη σειρά του να συνδεθεί με άλλα, και έτσι το αποτέλεσμα να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των συνιστωσών του διανύσματος στο αρχικό σύστημα. Επομένως, ο γενικός μετασχηματισμός διανύσματος υπό αυθαίρετη περιστροφή συστήματος συντεταγμένων μπορεί να γραφεί:

$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}. \tag{2.35}$$

Τώρα, θα πρέπει να είναι προφανές ποιο είναι το πρόβλημα με το χρηματικό διάνυσμα που ορίσαμε νωρίτερα: με αλλαγές συστήματος συντεταγμένων, οι συνιστώσες των διανυσμάτων γενικά αλλάζουν. Οπότε, αν πράγματι το χρηματικό διάνυσμα υπήρχε, με μια αλλαγή συστήματος συντεταγμένων θα ήταν εφικτή η μετατροπή χαρτονομισμάτων των 5 ευρώ σε χαρτονομίσματα των 20, κάτι που φυσικά δεν έχει νόημα.

Η σύντομη μελέτη που κάναμε παραπάνω για να βρούμε τις συνιστώσες στο νέο σύστημα συντεταγμένων συναρτήσει εκείνων στο παλαιό, είναι ένα παράδειγμα μιας ευρύτερης και κομβικής διαπίστωσης που ενυπάρχει στο πλαίσιο της γραμμικής άλγεβρας: κάθε γραμμικός μετασχηματισμός μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν πίνακα. Έτσι, μια αφηρημένη ιδέα (πχ στροφή κατά 120 μοίρες γύρω από έναν άξονα, στροφή κατά 30 γύρω από έναν άλλον και στροφή κατα 45 γύρω από έναν τρίτο), η οποία πολλές φορές μπορεί να είναι δύσκολο να εικονοποιηθεί ή να κατανοηθεί, μπορεί να γραφτεί με έναν συμπαγή και απλό τρόπο: απλώς δρούμε με έναν πίνακα στις παλιές συνιστώσες και έτσι βρίσκουμε τις νέες.

Ένα λεπτό σημείο που θα πρέπει να επισημάνουμε είναι το εξής: παραπάνω αναφερθήκαμε σε αλλαγές συστημάτων συντεταγμένων, όπου βρίσκουμε νέες συνιστώσες συναρτήσει των παλαιών. Όμως, φυσικά, δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε αυτές τις ιδέες αποκλειστικά όταν αλλάζουμε σύστημα συντεταγμένων. Αν, για παράδειγμα, κάποιος έχει ένα διάνυσμα και θέλει να το στρίψει κατά κάποια γωνία γύρω από έναν άξονα, είναι εμφανές ότι το διάνυσμα που θα προκύψει μπορεί να βρεθεί εναλλακτικά κρατώντας το διάνυσμα καίνητο και στρίβοντας το σύστημα συντεταγμένων κατά την αντίθετη γωνία (κάτι που κωδικοποιείται μαθηματικώς στον αντίστροφο πίνακα) γύρω από τον ίδιο άξονα. Επομένως, η παραπάνω συζήτηση σχετίζεται τόσο με αλλαγές συστημάτων συντεταγμένων όσο και με διαδικασίες πάνω στα διανύσματα και αυτό είναι κάτι που θα το θεωρούμε από εδώ και μπρος δεδομένο.

Το μεγάλο κέρδος από αυτή τη θεώρηση της γραμμικής άλγεβρας είναι ότι μια αφηρημένη ή δύσχρηστη ιδέα, όπως ο γεωμετρικός μετασχηματισμός, ταυτοποιείται με ένα αυστηρά ορισμένο και εύχρηστο αντικείμενο, όπως ο πίνακας. Η εφαρμογή αυτής της διαπίστωσης σε φυσικά προβλήματα ήταν καθοριστικής σημασίας για την ανάπτυξη της επιστήμης -πχ ο φορμαλισμός της κβαντομηχανικής όπως τον έδωσε ο Heisenberg είναι βασισμένος σε πράξεις πινάκων.

Στο δικό μας πλαίσιο, όπου θέλουμε να μελετήσουμε εφαρμογές που αφορούν τα 3D γραφικά, θα πρέπει να είναι ήδη κατανοητή η σημασία που έχουν αυτές οι ιδέες. Όπως είπαμε στο πρώτο κεφάλαιο, αρχικά υπάρχει μια δομή (πχ μια ανθρώπινη φιγούρα), η οποία έχει σχηματιστεί από ένα πλέγμα σημείων στο χώρο. Κάθε τέτοιο σημείο, όπως εξηγήσαμε, μπορεί να ταυτοποιηθεί με ένα διάνυσμα, επομένως το μοντέλο μας, ό,τι κι αν είναι, στην πραγματικότητα μπορεί να εκφραστεί πλήρως με μια συστοιχία διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$ (εφόσον ο χώρος είναι τρισδιάστατος). Κατόπιν, θέλουμε αυτό το μοντέλο να κινηθεί ή να κατοπτριστεί ή να παραμορφωθεί. Ναι, αλλά όλα αυτά δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια αναδιάταξη της συστοιχίας των διανυσμάτων που το σχηματίζουν και, όπως δείξαμε ήδη, πληθώρα τέτοιων αναδιατάξεων είναι στην ουσία γραμμικοί μετασχηματισμοί, οι οποίοι κωδικοποιούνται από πίνακες. Επομένως, η εικονικά περίπλοκη ή και απρόσιτη διαδικασία της παραμόρφωσης ενός σχεδίου, τώρα πια ανάγεται στην πάρα πολύ απλούστερη (για τον υπολογιστή που μπορεί να κάνει πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις πάρα πολύ γρήγορα) διαδικασία του πολλαπλασιασμού πινάκων με τα διανύσματα που στήνουν το αρχικό σχέδιο.

Επόμενως, έχουμε καταφέρει να εντοπίσουμε μια μέθοδο διαχείρισης μοντέλων σε υπολογιστικό περιβάλλον και, για την ακρίβεια, αυτή ακριβώς η διαδικασία της "δράσης" πινάκων σε διανύσματα είναι που έχει επιφέρει όλα τα θαυμαστά επιτεύγματα της τρισδιάστατης μοντελοποίησης.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δώσουμε ορισμένα παραδείγματα πινάκων τα οποία σχετίζονται με τη δημιουργία και χειραγώγηση 3D γραφικών, ώστε να αποσαφηνιστεί πλήρως η σημασία που έχουν οι ιδέες της γραμμικής άλγεβρας στη μοντελοποίηση.

Κεφάλαιο 3

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

3.1 Πίνακες και μετασχηματισμοί

Σε αυτή την ενότητα θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε τη σύνδεση μεταξύ της γραμμικής άλγεβρας και των τρισδιάστατων γραφικών, ή, ακριβέστερα, τον τρόπο που εφαρμόζεται η γραμμική άλγεβρα στο πλάισιο της μοντελοποίησης.

Όπως εξηγήθηκε στην προηγούμενη ενότητα, στο πλαίσιο των γραμμικών μετασχηματισμών, είναι συγκλονιστικής σημασίας η διαπίστωση ότι αυτοί μπορούν να κωδικοποιηθούν με συμπαγή τρόπο σε έναν πίνακα. Την ίδια στιγμή, αν θυμηθούμε τα όσα ειπώθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο, έχουμε ήδη κάνει νύξεις σχετικά με τη σχέση που έχουν τέτοιου είδους διαδικασίες στη μοντελοποίηση: η δημιουργία και χειραγώγηση των 3D γραφικών έγκειται στην κατασκευή διανυσμάτων και στη διαχείρισή τους (στροφές κλπ). Επομένως, υπό το φως των όσων παρουσίαστηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο, αρχίζει να διαφαίνεται ήδη ότι οι πίνακες θα πρέπει να έχουν κάποιο ρόλο στο θέμα.

Πριν μιλήσουμε πιο συγκεκριμένα, θα επανέλθουμε σε κάποιες από τις κατηγορίες πινάκων που παρουσίασαμε στην ενότητα 2.3, προκειμένου να δούμε τι ακριβώς κωδικοποιούν αυτές οι κατηγορίες στο πλαίσιο των γραμμικών μετασχηματισμών.

Όπως είπαμε εκεί, ένας πίνακας-στήλη $n \times 1$ κωδικοποιεί ένα διάνυσμα, το οποίο λόγω των n συνιστωσών του προφανώς εδράζεται στο χώρο $\mathbb{R}^n$. Εξηγήσαμε ήδη τι ακριβώς σημαίνει διάνυσμα: δεν αρκεί να οριστεί απλώς ως μια οντότητα που έχει μέτρο και κατεύθυνση, θα πρέπει να αλλάζει και με συγκεκριμένο τρόπο υπό αλλαγές συστημάτων συντεταγμένων, κάτι που κωδικοποιείται στην ικανότητα δράσης γραμμικών μετασχηματισμών, δηλαδή πινάκων, επάνω του -οι οποίοι έχουν κάποιο συγκεκριμένο νόημα κάθε φορά. Επομένως, από εδώ και μπρος, όταν έχουμε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ θα θεωρούμε δεδομένο ότι αυτό μπορεί να γραφεί ως πίνακας-στήλη με n ορίσματα. Οι πίνακες-γραμμές έχουν κι αυτοί την έννοια του διανύσματος, πλην όμως σε λίγο διαφορετικό πλαίσιο -αποτελούν το δυικό χώρο των διανυσμάτων-στηλών- οπότε δε θα αναφερθούμε εκτενώς σε αυτά για να μην περιπλέξουμε τη μελέτη.

Όπως ξέρουμε από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων, ένας πίνακας $n \times 1$, δηλαδή ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$, μπορεί να πολλαπλασιαστεί από αριστερά του με πίνακες $m \times n$, και το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας $m \times 1$, δηλαδή ένα διάνυσμα-στήλη στο $\mathbb{R}^m$. Άρα η δράση ενός πίνακα $m \times n$ έχει σαν αποτέλεσμα ένα διάνυσμα του χώρου $\mathbb{R}^n$ να καταλήγει στο χώρο $\mathbb{R}^m$, δηλαδή, για $m \neq n$, σε έναν άλλο χώρο. Στο πλαίσιο των τρισδιάστατων γραφικών μας ενδιαφέρουν περισσότερο διαδιακσίες που αλλάζουν μεν τα διανύσματα, αλλά τα κρατάνε στον ίδιο χώρο. Έτσι, θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση $m = n$, δηλαδή παρακάτω ασχολούμαστε με τετραγωνικούς πίνακες.

Ξεκινάμε από τον απλούστερο δυνατό πίνακα, τον πίνακα-ταυτότητα, δηλαδή τον διαγώνιο πίνακα που όλα του τα στοιχεία είναι μονάδα (εκτός από τα μηδενικά, φυσικά). Προφανώς, πολλαπλασιάζοντάς αυτόν αριστερά από ένα διάνυσμα, είναι εύκολο να δούμε ότι το αφήνει απαράλλαχτο. Άρα, η ταυτότητα είναι ένας πίνακας που αφήνει αναλλοίωτο οποιοδήποτε διάνυσμα, δηλαδή κωδικοποιεί τον τετριμμένο μετασχηματισμό.

Ο γενικός διαγώνιος πίνακας, από την άλλη, είναι διαφορετική υπόθεση. Αν πολλαπλασιάσουμε ένα διαγώνιο πίνακα επί ένα διάνυσμα-στήλη, θα προκύψει ένα διάνυσμα το οποίο θα έχει κάθε συντεταγμένη του "τεντωμένη" ή "μαζεμένη" κατά διαφορετικό παράγοντα. Πράγματι, αν επικεντρωθούμε στους 3×3 πίνακες, που είναι και αυτοί που μας ενδιαφέρουν για τα 3D γραφικά, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Δηλαδή, είναι σαν να αλλάξαμε τον τρόπο που μετράμε τα μήκη σε κάθε άξονα, οπότε μπορεί να πει κανείς ότι ο μετασχηματισμός που επάγουν οι διαγώνιοι πίνακες στα διανύσματα είναι μια αναβαθμονόμηση των αξόνων(διαφορετική για κάθε άξονα).

Σε ό,τι αφορά συμμετρικούς πίνακες, θα πρέπει πρώτα να επανέλθουμε στην έννοια των ιδιοδιανυσμάτων. Σημειώνουμε το εξής: έχοντας κατά νου ότι ένας πίνακας κωδικοποιεί μετασχηματισμό, είμαστε σε θέση να ερμηνεύσουμε σε αυτό το πλαίσιο την εξίσωση ιδιοδιανυσμάτων $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$: αυτή σημαίνει ότι τα ιδιοδιανύσματα $\vec{u}$ του μετασχηματισμού A είναι εκείνα τα διανύσματα που υπό τη δράση του μετασχηματισμού διατηρούν την κατεύθυνσή τους (σημειώνεται ότι το διάνυσμα $\lambda\vec{u}$ έχει ακριβώς ίδια κατεύθυνση με το $\vec{u}$), χωρίς να είναι απαραίτητο ότι διατηρούν και το μέτρο τους.

Η πρώτη πολύ σημαντική ιδιότητα (είναι πολύ απλό να αποδειχθεί) των συμμετρικών πινάκων είναι ότι έχουν πραγματικές ιδιοτιμές. Σημειώνουμε ότι ένας πραγματικός πίνακας μπορεί γενικά να έχει μιγαδικές ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Η δεύτερη ιδιότητα, που προκύπτει από την πρώτη, είναι ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Αυτό είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί, και παρουσιάζουμε ενδεικτικά την απόδειξη: ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο ζεύγη ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων $(\lambda_1, \vec{u_1})$, $(\lambda_2, \vec{u_2})$, δηλαδή ισχύει $A\vec{u_1} = \lambda\vec{u_1}$, $A\vec{u_2} = \lambda\vec{u_2}$. Εξ άλλου, αντιμετωπίζοντας τα ιδιοδιανύσματα ως πίνακες-στήλες, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $(Au_{1,2})^T = u_{1,2}^T A$, από τον ορισμό του συμμετρικού πίνακα.

Τότε, σχηματίζουμε την ποσότητα $u_1^T A u_2$, για την οποία ισχύει $u_1^T A u_2 = u_1^T \lambda_2 u_2 = \lambda_2 u_1^T u_2$, ενώ, από την άλλη, $u_1^T A u_2 = u_1^T A^T u_2 = (Au_1)^T u_2 = \lambda_1 u_1^T u_2$. Άρα, $\lambda_2 u_1^T u_2 = \lambda_1 u_1^T u_2$ ή $(\lambda_2 - \lambda_1) u_1^T u_2 = 0$, που σημαίνει ότι για $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $u_1^T u_2 = 0$. Όμως αυτή η ποσότητα δεν είναι παρά το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων, δηλαδή $\vec{u_1}\vec{u_2} = 0$, δηλαδή είναι κάθετα. Αυτό είναι σημαντικό, γιατί σημαίνει πως τα ιδιοδιανύσματα των συμμετρικών πινάκων μπορούν να αξιοποιηθούν για να στήσουν ορθοκανονική βάση στο χώρο (ορθοκανονική βάση είναι ένα σετ μοναδιαίων διανυσμάτων, κάθετων μεταξύ τους, τέτοιών ώστε κάθε διάνυσμα του χώρου να εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους).

Η τελευταία πολύ σημαντική τους ιδιότητα είναι ότι όλοι οι συμμετρικοί πίνακες είναι διαγωνοποιήσιμοι, δηλαδή υπάρχουν διαγώνιος πίνακας D και αντιστρέψιμος P τέτοιοι ώστε $D = P^{-1}AP$.

Η συγκλονιστική σημασία αυτών έρχεται όταν μελετάμε εν γένει μιγαδικούς πίνακες, όπου η ιδιότητα της συμμετρίας επεκτείνεται στην ιδιότητα της αυτοσυζυγίας (για παράδειγμα, στην κβαντομηχανική κάθε φυσικό μέγεθος περιγράφεται από έναν αυτοσυζυγή τελεστή). Ωστόσο, και στο δικό μας πλαίσιο έχουν τη σημασία τους. Πράγματι, οι ιδιότητες που αναφέραμε παραπάνω είναι πάρα πολύ σημαντικές, διότι μας επιτρέπουν να ευθυγραμμίσουμε την τετριμμένη βάση (που δίνεται από την ταυτότητα) με τα ιδιοδιανύσματα συμμετρικών πινάκων. Αυτό επάγεται απευθείας από την ορθογωνιότητα των ιδιοδιανυσμάτων αυτών.

Πολύ ενδιαφέροντες είναι οι ορθογώνιοι πίνακες, για τους οποίους ισχύει ότι ο ανάστροφός τους ισούται με τον αντίστροφό τους, το οποίο εκφράζεται αλλιώς μέσω της ιδιότητας $OO^T = O^T O = I$.

Για να κάνουμε πιο ξεκάθαρο το πόσο ενδιαφέρον έχουν αυτοί οι πίνακες για το θέμα που εξετάζουμε, μπορούμε τώρα να αποδείξουμε κάποιες ενδιαφέρουσες ιδιότητές τους.

Πρώτον, το γινόμενο δύο ορθογωνίων πινάκων είναι επίσης ορθογώνιος πίνακας. Αυτό μπορούμε πολύ εύκολα να το δούμε. Αν A, B ορθογώνιοι, δηλαδή $A^{-1} = A^T$, $B^{-1} = B^T$, τότε $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$.

Δεύτερον, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι έχουν ορίζουσα 1 ή -1, κάτι που έχουμε αναφέρει ήδη. Πράγματι, $A^T A = I$, και από τις ιδιότητες των οριζουσών $\det(A^T) = \det(A)$, $\det(A^T)\det(A) = \det(I)$, οι οποίες οδηγούν στο ότι $(\det(A))^2 = 1$, δηλαδή $\det(A) = \pm 1$.

Τρίτον -και πάρα πολύ σημαντικό για τις εφαρμογές σε γραφικά- οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί διατηρούν το μήκος των διανυσμάτων! Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα διάνυσμα με μήκος $|u|$. Αυτό σημαίνει ότι $u^T u = |u|^2$. Αν μετασχηματίσουμε με έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό το u, προκύπτει το διάνυσμα Ou.

Εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος αυτού με τον εαυτό του: $|Ou|^2 = (Ou)^T Ou = u^T O^T Ou = u^T u$, δηλαδή $|Ou| = |u|$. Αυτό είναι συγκλονιστικής σημασίας: βρήκαμε μια οικογένεια γραμμικών μετασχηματισμών, η οποία διατηρεί τα μήκη των διανυσμάτων!

Τέταρτον, λογιζόμενοι ως γραμμικοί μετασχηματισμοί, οι ορθογώνιοι πίνακες διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο. Και αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύκολα. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο τυχαία διανύσματα-στήλες u_1, u_2 με εσωτερικό γινόμενο $u_1^T u_2$ και ότι μετασχηματίζονται σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων μέσω ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού. Τότε, όπως έχουμε εξηγήσει, προκύπτουν δύο νέα διανύσματα Ou_1, Ou_2 και το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με

$$(Ou_1)^T Ou_2 = u_1^T O^T Ou_2 = u_1^T O^{-1} Ou_2 = u_1^T I u_2 = u_1^T u_2, \tag{3.2}$$

δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο στο νέο σύστημα συντεταγμένων ισούται με το εσωτερικό γινόμενο στο αρχικό. Σε πιο αυστηρή γλώσσα, αυτό σημαίνει ότι οι ορθογώνιοι πίνακες δρουν ως ισομετρίες του Ευκλείδειου χώρου, και αν σκεφτούμε διαισθητικά τι σημαίνει αυτό, εύκολα κατανοούμε τη σημασία τους.

Η τρίτη και η τέταρτη ιδιότητα οδηγούν σε μία πέμπτη που έχει να κάνει με τις γωνίες. Όπως ξέρουμε, το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ισούται με το γινόμενο των μέτρων τους επί το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας. Αν δράσουμε, λοιπόν, σε ένα χώρο διανυσμάτων με έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό, εφόσον αυτός αφήνει αναλλοίωτο τόσο το εσωτερικό γινόμενο όσο και τα μέτρα των διανυσμάτων, είναι προφανές ότι θα πρέπει να αφήνει αναλλοίωτες και τις γωνίες που σχηματίζουν μεταξύ τους! Πέμπτον, λοιπόν, οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί διατηρούν τις γωνίες μεταξύ διανυσμάτων!

Η τρίτη και η πέμπτη ιδιότητα, μας διαφωτίζουν πλήρως για τη γεωμετρική ερμηνεία των ορθογώνιων μετασχηματισμών: αφήνουν αναλλοίωτα τα μήκη των διανυσμάτων και τις γωνίες μεταξύ τους (επομένως και τα παραλληλεπίπεδα που σχηματίζουν οποιαδήποτε δύο διανύσματα). Αν σκεφτούμε εντελώς εικονικά και προσπαθήσουμε να φανταστούμε ποιοι μετασχηματισμοί έχουν αυτές τις δύο ιδιότητες, γρήγορα μπορούμε να καταλήξουμε σε τουλάχιστον δύο πολύ ενδιαφέροντα είδη.

Το πρώτο είναι οι ανακλάσεις ως προς οποιοδήποτε άξονα. Πράγματι, αν σκεφτούμε ένα διάνυσμα και το "καθρεφτίσουμε" ως προς κάποιον άξονα ή επίπεδο, προφανώς το μήκος του παραμένει ίδιο, ενώ αν έχουμε δύο διανύσματα που σχηματίζουν κάποια γωνία, μετά την ανάκλασή τους η γωνία αυτή θα πρέπει να παραμένει επίσης ίδια. Έχουμε ήδη μιλήσει για το πόσο διευκολύνει συχνά τους σχεδιαστές η ανάκλαση: για αντικείμενα που είναι συμμετρικά, όπως ένας άνθρωπος, αρκεί να σχεδιάσουν το μισό αντικείμενο και κατόπιν να ανακτήσουν το υπόλοιπο μισό μέσω κατάλληλης ανάκλασης. Επομένως, βρήκαμε έναν τρόπο μαθηματικοποίησης αυτής της εντελώς εικονικής διαδικασίας.

Το ίδιο θα συμβεί και αν προβούμε σε κάποια στροφή. Πράγματι, αν έχουμε δύο διανύσματα τα οποία σχηματίζουν κάποια γωνία και τα στρέψουμε γύρω από τυχόν άξονα κατά τυχούσα γωνία, προφανώς τόσο τα μήκη τους όσο και η μεταξύ τους γωνία θα παραμείνουν ίδιες.

Τέλος, ενθυμούμενοι ότι το γινόμενο δύο ορθογώνιων μετασχηματισμών είναι κι αυτό ορθογώνιος, συνάγουμε ότι κάθε συνδυασμός στροφών και ανακλάσεων είναι, εν τέλει, ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός.

Έτσι, έχουμε καταφέρει να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά, σε έναν ικανοποιητικό βαθμό, το τι ακριβώς σημαίνουν κάποιοι γραμμικοί μετασχηματισμοί. Προφανώς, ο γενικότερος δυνατός γραμμικός μετασχηματισμός δε θα είναι τόσο συγκεκριμένος: θα περιέχει συνδυασμό στροφών, ανακλάσεων, τεντωμάτων ή σμικρύνσεων και αλλαγών σχετικών γωνιών ή και προωθήσεις (για τις οποίες θα μιλήσουμε αργότερα). Ωστόσο, οι μετασχηματισμοί που έχουμε εντοπίσει και ο τρόπος που τους ερμηνεύσαμε μέσω της έκφρασής τους υπό μορφή πινάκων, μας επιτρέπει να διαχειριστούμε ορισμένες βασικές διαδικασίες που αφορούν τη γεωμετρία.

Στις επόμενες δύο ενότητες, θα περάσουμε στο διδιάστατο και στον τρισδιάστατο χώρο και, στη δεύτερη περίπτωση, θα μιλήσουμε πιο συγκεκριμένα για τον τρόπο που οι πίνακες υπεισέρχονται στην κατασκευή γραφικών και στη χειραγώγησή τους, βασισμένοι κατά πολύ στην ερμηνεία και διαχείριση των γραμμικών μετασχηματισμών, όπως παρουσιάστηκε σε αυτή την ενότητα.

3.2 Γραμμικοί μετασχηματισμοί σε 2D

Παρόλο που κυρίως ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση των 3D γραφικών, θα προτιμήσουμε πριν περάσουμε στους τρισδιάστατους χώρους να ασχοληθούμε πρώτα με τους διδάστατους. Έτσι, αυτή η ενότητα θα λειτουργήσει προπαρασκευαστικά για την επόμενη (και πάντα σε σύνδεση και με την προηγούμενη, όπου εξηγήσαμε γεωμετρικά κάποια είδη μετασχηματισμών-πινάκων), όπου θα μιλήσουμε για τα 3D γραφικά, από την άποψη ότι θα παρουσιάσουμε παραδείγματα της ίδιας ακριβώς λογικής, πλην όμως στο επίπεδο, δηλαδή σε έναν απλούστερο χώρο που είναι πολύ πιο εύκολο να τον φανταστούμε εικονικά.

Οι μετασχηματισμοί που διατηρούν την αρχή των αξόνων είναι συνήθως γραμμικοί (μπορεί κανείς να αποδείξει το αντίστροφο εύκολα από τον ορισμό των γραμμικών μετασχηματισμών, ότι δηλαδή όλοι τους διατηρούν την αρχή των αξόνων). Με τέτοιους θα ασχοληθούμε σε αυτή την ενότητα και, εφόσον είμαστε σε διδιάστατο χώρο (Ευκλείδειο), θα τους κωδικοποιούμε με 2×2 πίνακες.

Α) Το *τέντωμα* στο επίπεδο είναι μια διαδικασία που μεγαλώνει όλες τις αποστάσεις κατά μήκος ενός άξονα και αφήνει αναλλοίωτες τις αποστάσεις στον άξονα που είναι κάθετος σε αυτόν. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα ασχοληθούμε με τεντώματα κατά μήκος του x-άξονα (τεντώματα κατά μήκος οποιουδήποτε άλλου προκύπτουν με στροφή, την οποία θα δούμε σε λίγο). Άρα, θέλουμε να μεγαλώσουμε κατά έναν σταθερό παράγοντα k όλες τις αποστάσεις κατά μήκος του άξονα x και να αφήσουμε όλες τις αποστάσεις κατά μήκος του άξονα y αναλλοίωτες. Άρα, σε μαθηματική γλώσσαα, θέλουμε $x' = kx$, $y' = y$ (σημειώνεται ότι μόνο αν $k > 1$ είναι όντως τέντωμα· αν $k < 1$ είναι σμίκρυνση, παρ΄ όλα αυτά το αποκαλούμε ακόμη και τότε τέντωμα, ενώ αν $k = 1$ έχουμε την τετριμμένη περίπτωση). Θεωρώντας το αρχικό και το τελικό τυχόν διάνυσμα $(x, y)^T$, $(x', y')^T$

αντίστοιχα, είναι προφανές ότι η παραπάνω σχέσεις γράφονται συμπτυγμένα

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Επόμενως, ο πίνακας τεντώματος κατά μήκος του x-άξονα είναι $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Είναι απολύτως προφανές, ότι αν θέλουμε το τέντωμα να είναι κατά μήκος του άξονα y, λόγω ισοδυναμίας των δύο διαστάσεων, εύκολα βρίσκουμε κατευθείαν τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$. Παρατηρούμε ότι αυτοί οι πίνακες είναι διαγώνιοι, σε απόλυτη συμφωνία με τα όσα είπαμε για τους διαγώνιους στην προηγούμενη ενότητα.

Β) Μια άλλη ενδιαφέρουσα κατηγορία είναι το *στύψιμο*. Αυτό προκύπτει με τη λογική του να βρούμε έναν μετασχηματισμό ο οποίος να διατηρεί τα εμβαδά των ορθογώνιων παραλληλογράμμων. Δηλαδή, αν έχουμε έναν τυχόν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές x, y, θέλουμε το εμβαδό του να διατηρείται και αφότου δράσει ο μετασχηματισμός σε αυτές, δηλαδή $x'y' = xy$, με το νέο σχήμα να παραμένει παραλληλόγραμμο, παρότι διαφορετικών διαστάσεων από τον αρχικό. Προφανώς, ο απλούστερος τρόπος να συμβεί αυτό είναι με τέντωμα της μίας διάστασης κατά έναν παράγοντα k και σμίκρυνση της άλλης διάστασης κατά τον ίδιο παράγοντα, δηλαδή $x' = kx$, $y' = \frac{1}{k}y$ (ή με τις x, y ανταλλαγμένες). Τότε, είναι εμφανές ότι ο πίνακας στυψίματος είναι ο $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix}$, ο οποίος είναι και αυτός διαγώνιος.

Γ) Μια από τις σημαντικότερες κατηγορίες είναι η *στροφή*. Αν υποθέσουμε ότι ψάχνουμε τη στροφή γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ, είναι μια απλή άσκηση γεωμετρίας να δείξουμε ότι:

-για στροφή αντιρολογιακής φοράς (θετική κατεύθυνση), $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$, $y' = y\cos\theta + x\sin\theta$,

-για στροφή ρολογιακής φοράς (αρνητική κατεύθυνση), $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$, $y' = y\cos\theta - x\sin\theta$.

Έτσι, οι αντίστοιχοι πίνακες στροφής είναι:

-για στροφή αντιρολογιακής φοράς (θετική κατεύθυνση), $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$,

-για στροφή ρολογιακής φοράς (αρνητική κατεύθυνση), $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι πολλαπλασιάζοντας αυτούς τους πίνακες με τον ανάστροφό τους λαμβάνουμε τη μονάδα, οπότε ο ανάστροφός τους ισούται με τον αντίστροφό τους, είναι δηλαδή ορθογώνιοι, ακριβώς όπως είχαμε προαναγγείλει για πίνακες στροφών στην προηγούμενη ενότητα.

Δ) Επόμενη κατηγορία είναι η *λόξωση*, η οποία μοιάζει με την κλίση. Αν είναι παράλληλη με τον άξονα x δίνεται από τις $x' = x + ky$, $y' = y$, και, εντελώς αντίστοιχα, αν είναι παράλληλη με τον άξονα των y από τις $x' = x$, $y' = y + kx$.

Οι αντίστοιχοι πίνακες εύκολα προκύπτουν να είναι $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$, δηλαδή ένας άνω διαγώνιος και ένας κάτω διαγώνιος.

Ε) Μια από τις πιο σημαντικές κατηγορίες μετασχηματισμών, πολύ σχετική και με τα γραφικά, είναι οι *ανακλάσεις*. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια γραμμή που περνά από την αρχή των αξόνων και στην οποία ανήκει το διάνυσμα (l_x, l_y) και ότι θέλουμε να "καθρεφτίσουμε" το τυχόν δίανυσμα (x, y) ως προς αυτή τη γραμμή. Μέσω γεωμετρικών θεωρήσεων (παρότι η διαδικασία είναι σχετικά επίπονη), μπορούμε να βρούμε τη σχέση που θα έχουν οι κατοπτρισμένες συνιστώσες σε σχέση με τις αρχικές, και από αυτές να ανακτήσουμε τον πίνακα ανάκλασης. Ο πίνακας αυτός προκύπτει ότι είναι ο

$$\frac{1}{l^2}\begin{bmatrix} l_x^2 - l_y^2 & 2l_x l_y \\ 2l_x l_y & -(l_x^2 - l_y^2) \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Μπορούμε να δείξουμε έυκολα ότι το γινόμενο αυτού με τον ανάστροφό του ισούται με την ταυτότητα, οπότε και αυτός είναι ορθογώνιος, όπως είχαμε προαναγγείλει για πίνακες που κωδικοποιούν ανακλάσεις.

Στ) Τέλος, αναφέρουμε και την ορθογώνια *προβολή*, όπου προβάλουμε ένα διάνυσμα επάνω σε μια γραμμή που περνά από την αρχή των αξόνων (υποθέτουμε και πάλι διάνυσμα (l_x, l_y) επί της γραμμής). Με παρόμοια λογική με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι ο πίνακας που δίνει τις συντεταγμένες της προβολής είναι:

$$\frac{1}{l^2}\begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y \\ l_x l_y & l_y^2 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Από αυτήν εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το νέο διάνυσμα ανήκει στην εύθεια (ως όφειλε ως προβολή), καθώς και ότι το τετράγωνο αυτού του πίνακα ισούται με τον ίδιο, μια ειδική ιδιότητα που ισχύει για όλους τους προβολικούς τελεστές (λογικό, από την άποψη ότι όσες φορές και να προβάλλουμε ένα διάνυσμα σε μια ευθεία, πάντα την προβολή θα παίρνουμε, εφόσον έχουμε προβάλει ήδη μία φορά).

3.3 Εφαρμογές σε 3D γραφικά

Τώρα, περνάμε να δούμε παρόμοιες διαδικασίες στην περίπτωση του τρισδιάστατου χώρου.

Όσον αφορά τις διαδικασίες τεντώματος, στυψίματος και λόξωσης, οι επιλογές μας είναι πολύ περισσότερες λόγω της έξτρα διάστασης αυτού του χώρου. Ωστόσο, έχουμε ήδη υποδείξει τη λογική που λειτουργούν και, αναλόγως του τι ακριβώς θέλουμε να κάνουμε, δεν είναι δύσκολο να εντοπίσουμε το δρόμο που πρέπει να ακολουθήσουμε.

Αν υποθέσουμε, πχ ότι κάποιος θέλει να τεντώσει τις αποστάσεις στον y-άξονα, τότε, κατ΄ αναλογία με την προηγούμενη ενότητα, ο αντίστοιχος πίνακας είναι προφανές ότι θα είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Αν, πάλι, θέλουμε, για παράδειγμα, να στύψουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τρόπο ώστε να μείνει σταθερός ο όγκος του και οι αποστάσεις στο x-άξονα να τεντώνονται κατά έναν παράγοντα διπλάσιο απ΄ ό,τι στον y, ο πίνακας θα είναι ο $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 1/2k^2 \end{bmatrix}$. Μπορούμε, δηλαδή, αναλόγως του τι θέλουμε να κάνουμε, να επεκτείνουμε απευθείας τις θεωρήσεις του προηγούμενου κεφαλαίου.

Από την αλλή, οι διαδικασίες της στροφής και της ανάκλασης, λόγω της επιπλέον διάστασης σε αυτό το χώρο, δεν είναι τόσο απλό να επεκταθούν απευθείας, όπως το τέντωμα, το στύψιμο και η λόξωση. Ωστόσο, επισημαίνουμε ότι η εύρεση των κατάλληλων πινάκων είναι και εδώ στην ουσία μια άσκηση γεωμετρίας, πλην όμως λίγο πιο περίπλοκη από ό,τι στην περίπτωση των 2 διαστάσεων.

Α) Για τη *στροφή*, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να στρίψουμε αντιρολογιακά (δηλαδή με τον κανόνα του δεξιού χεριού) ένα διάνυσμα κατά μια γωνία θ γύρω από κάποιον άξονα. Ο άξονας αυτός μπορεί να οριστεί μαθηματικώς από ένα μοναδιαίο διάνυσμα (l, m, n) (δηλαδή $l^2 + m^2 + n^2 = 1$), το οποίο κείτεται επί του άξονα και μας προσδιορίζει μονοσήμαντα τη διεύθυνσή του (υπάρχει και ένα ακριβώς αντίθετο μοναδιαίο που ορίζει την ίδια διεύθυνση αλλά, εφόσον δουλεύουμε με τον κανόνα του δεξιού χεριού, η χρήση αυτού του αντίθετου μοναδιαίου δίνει απλώς τη στροφή γύρω από τον ίδιο άξονα κατά γωνία $-\theta$, ή, με άλλα λόγια, την αμφιβολία σχετικά με την κατεύθυνση του μοναδιαίου μέσω του οποίου ορίζουμε τη διεύθυνση την αποδίδουμε στη γωνία επιτρέποντας και αρνητικές γωνίες). Τότε, μπορούμε να δείξουμε ότι ο γενικός πίνακας στροφής είναι ο

$$\begin{bmatrix} l^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & lm(1-\cos\theta)-n\sin\theta & ln(1-\cos\theta)+m\sin\theta \\ lm(1-\cos\theta)+n\sin\theta & m^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & mn(1-\cos\theta)-l\sin\theta \\ ln(1-\cos\theta)-m\sin\theta & nm(1-\cos\theta)+l\sin\theta & n^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Δεν είναι δύσκολο να πιστοποιήσουμε ότι αυτός ο πίνακας είναι ορθογώνιος, ως όφειλε ως πίνακας στροφής.

Κάποιες ενδιαφέρουσες υποπεριπτώσεις αυτού είναι οι στροφές γύρω από τους βασικούς άξονες x, y, z, με μοναδιαία διανύσματα $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, αντίστοιχα. Οι αντίστοιχοι πίνακες προκύπτουν:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

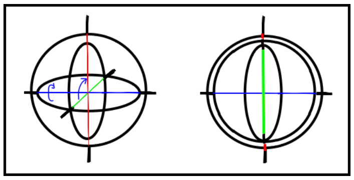
Ένας ακόμη χρήσιμος πίνακας που εμφανίζεται συχνά σε εφαρμογές είναι η διαδοχική στροφή γύρω από τους τρεις άξονες. Αν κάνουμε στροφή κατά γωνία α γύρω από το x, κατά β γύρω από τον y και κατά γ γύρω από το z, προκύπτει ο πίνακας

$$R = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha) =$$
$$\begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \cos\beta\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma \\ -\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Πριν προχωρήσουμε, υπάρχει μια μικρή αλλά σημαντική επισήμανση που πρέπει να κάνουμε σχετικά με την τελευταία σχέση. Στην πράξη, είναι πάρα πολύ βολικό να ασχολούμαστε με στροφές ως προς τρεις αμοιβαία κάθετους άξονες όταν μοντελοποιούμε αντικείμενα. Για παράδειγμα, η άρθρωση του ώμου έχει πράγματι τρεις διαφορετικούς άξονες κάθετους -ή τρία επίπεδα κάθετα- μεταξύ τους ως προς τους οποίους μπορεί να στρίψει. Στην παραπάνω λογική, μοιάζει σαν οι στροφές ως προς αυτούς τους τρεις άξονες να είναι απολύτως ανεξάρτητες μεταξύ τους. Υπάρχει, όμως, ένα λεπτό σημείο που στην πράξη μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα, όταν αναφερόμαστε σε στερεά σώματα με διαστάσεις.

Παρατηρούμε ότι στο αντικείμενο δρα πρώτος ο R_x, δηλαδή γίνεται πρώτα η στροφή ως προς το x-άξονα. Κατόπιν δρα ο R_y, πλην όμως δρα στο ήδη στραμμένο σώμα. Αυτό είναι πάρα πολύ σημαντικό: οι δύο στροφές είναι ως προς κάθετους άξονες, αλλά δεν είναι ανεξάρτητες, από την άποψη ότι δε θα πάρουμε απαραίτητα το ίδιο αποτέλεσμα αν πρώτα κάνουμε τη δεύτερη στροφή και μετά την πρώτη, διότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός! Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτούμε τη στροφή R_x ως μια στροφή ολόκληρου του επιπέδου που είναι κάθετο στον άξονα αυτό, δηλαδή του yz-επιπέδου, και παρομοίως τις στροφές γύρω από όλους τους άλλους άξονες. Πράγματι, μια στροφή όλου του yz-επιπέδου κατά γωνία θ θα φέρει το διάνυσμα ακριβώς στην ίδια θέση που θα το φέρει ο $R_x(\theta)$. Έτσι, με αυτή τη λογική, προκύπτει κάτι σαν γυροσκόπιο: το εσωτερικό δαχτυλίδι κείτεται αρχικά στο yz-επίπεδο, όπου στρέφεται ελεύθερα. Το επόμενο δαχτυλίδι (αφορά τη στροφή γύρω από τον άξονα των y) κείτεται στο xz-επίπεδο, πλην όμως, όταν στρίβει, στρίβει μαζί του και το εσωτερικό του δαχτυλίδι (αυτό είναι το νόημα του ότι η R_y δρα στο στραμμένο διάνυσμα και όχι στο αρχικό). Τέλος, το απώτερο εξωτερικό δαχτυλίδι (αφορά τον R_z), κείτεται στο xy-επίπεδο και με τη στροφή του στρέφει και τα δύο εσωτερικά δαχτυλίδια, εφόσον ο R_z δρα στο διάνυσμα που έχει ήδη πραγματοποιήσει δύο στροφές ως προς τους άλλους δύο άξονες.

Τώρα, σε εφαρμογές τέτοιου είδους, είναι γνωστό από τα αρχαία χρόνια ότι μπορεί να συμβεί το, συχνά ανεπιθύμητο, φαινόμενο που ονομάζεται "κλείδωμα



Σχήμα 3.1: *Αριστερά μια εικονική απόδοση των τριών δαχτυλιδιών-επιπέδων και δεξιά το κλείδωμα αντίζυγων (πηγή stackoverflow.com).*

αντιζύγων". Αυτό προκύπτει ως εξής: τα δαχτυλίδια-επίπεδα είναι εξ ορισμού αναγκασμένα όταν στρίβουν να επιβάλλουν κάποια στροφή και σε όσα βρίσκονται εσωτερικά τους. Μπορεί να συμβεί -και συχνά συμβαίνει- το εσωτερικό επίπεδο-δαχτυλίδι να συμπέσει (να έρθει σε παραλληλία) με το εξωτερικό, λόγω της συνολικής περιστροφής και των τριών. Σε αυτή την περίπτωση, όπως και να στρίψουμε οποιοδήποτε από τα τρία δαχτυλίδια, κανένα από αυτά δε μπορεί να αλλάξει το επίπεδό του -η διάταξη έχει κλειδώσει. Το αποτέλεσμα είναι το αντικείμενο ενδιαφέροντος να είναι αναγκασμένο να περιστρέφεται συνεχώς σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο.

Αυτό είναι προβληματικό σε πάρα πολλές εφαρμογές όπου υπάρχουν αντίζυγα (όπως αποκαλούνται αυτά τα δαχτυλίδια). Στο δικό μας πλαίσιο, ας επανέλθουμε στο παράδειγμα της άρθρωσης του ώμου, όπου ένας σχεδιαστής θέλει να αποτυπώσει μια ρεαλιστική κίνηση του μπράτσου, για παράδειγμα να παρουσιάσει τη φιγούρα του να κάνει jumping jacks. Τότε, θα βάλει στο πρόγραμμα μια περιστροφή του χεριού κατά συγκεκριμένη γωνία ως προς τον αντίστοιχο άξονα. Όμως, αν έχει επέλθει κλείδωμα αντιζύγων σε κάποιο άλλο επίπεδο από αυτό στο οποίο θέλει ο σχεδιαστής να έχει την περιστροφή, το χέρι θα εμφανιστεί να εκτελεί μια κίνηση διαφορετική από την επιθυμητή. Συχνά, μάλιστα, εμφανίζονται και παράλογες καταστάσεις λόγω αυτού του φαινομένου, όπως ένα χέρι σε αφύσικη γωνία ή ένα χέρι που διαπερνά τον κορμό!

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι θεραπείας αυτού του προβλήματος. Ένας πολύ ενδιαφέρων είναι η χρήση των λεγόμενων quaternions, που είναι στην ουσία ποσότητες τεσσάρων συντεταγμένων. Η λογική αυτής της μεθόδου είναι να τοποθετείται ακόμη ένα εξωτερικό αντίζυγο που στρέφεται ως προς άξονα κάθετο στους άλλους τρεις (φυσικά τότε ο χώρος είναι τετραδιάστατος και δεν μπορούμε να φανταστούμε εικονικά αυτό που συμβαίνει, όμως ο υπολογιστής δεν έχει κανένα τέτοιο πρόβλημα, το μόνο που κάνει είναι να υπολογίζει τι θα συμβεί). Έτσι, το βοηθητικό -και ανύπαρκτο- αντίζυγο θεραπεύει το πρόβλημα ξεκλειδώνοντας τη διάταξη και επιτρέποντας στο σχεδιαστή να σχεδιάσει την κίνηση όπως θέλει. Εκτός αυτού, σε πολλά προγράμματα υπάρχουν τοποθετημένα και διάφορα φίλτρα που επανυπολογίζουν την κίνηση, προσπαθώντας, στην περίπτωση ενός προβληματικού κλειδώματος, να βρουν την πλέον φυσιολογική διαδρομή παρακάμπτοντας το κλείδωμα.

Β) Για την *ανάκλαση*, στην περίπτωση των δύο διαστάσεων αναφερθήκαμε σε ανάκλαση ως προς ευθεία. Ο λόγος είναι προφανής: εφόσον είχαμε δύο διαστάσεις, δεν έχει νόημα η ανάκλαση ως προς επίπεδο (ο ίδιος ο χώρος ήταν ένα επίπεδο και δεν υπήρχε άλλο ως προς το οποίο να μπορούσαμε να ανακλάσουμε). Το πιο ενδιαφέρον αντικείμενο ως προς το οποίο μπορούσαμε να εφαρμόσουμε ανάκλαση ήταν η ευθεία.

Τώρα που είμαστε σε 3D χώρο, κατ΄ αναλογία, το πιο ενδιαφέρον αντικείμενο ως προς το οποίο μπορούμε να ανακλάσουμε -και το οποίο είναι και το πλέον σχετικό στο πλαίσιο των 3D γραφικών- είναι το επίπεδο. Η μαθηματική εξίσωση που ορίζει ένα επίπεδο, το οποίο περιέχει την αρχή των αξόνων, στον τρισδιάστατο χώρο είναι της μορφής $ax + by + cz = 0$, a, b, c παράμετροι. Ο λόγος που εδώ θα αναφερθούμε σε ανακλάσεις μόνο ως προς επίπεδα τα οποία περιέχουν την αρχή των αξόνων, είναι ότι οι ανακλάσεις ως προς άλλα επίπεδα που δεν την περιέχουν δεν είναι γραμμικοί, αλλά αφινικοί μετασχηματισμοί. Αυτοί διατηρούν μεν την παραλληλία, αλλά δε διατηρούν απαραίτητα τις αποστάσεις και τις γωνίες, επομένως δε θα αναλωθούμε εδώ περεταίρω σε αυτό το θέμα, τουλάχιστον όχι από τη θεωρητική του σκοπιά.

Ο γενικότερος τρόπος για να περιγραφεί μια ανάκλαση ως προς ένα επίπεδο (ή υπερεπίπεδο αν είμαστε σε χώρο διάστασης μεγαλύτερης του 3) που περιέχει την αρχή των αξόνων, στο πλαίσιο της γραμμικής άλγεβρας, είναι ο λεγόμενος μετασχηματισμός Householder. Αυτός ο μετασχηματισμός παρουσιάζει με πολύ γενικό τρόπο τη συνθήκη της ανάκλασης και γενικεύει στις μεγάλες διαστάσεις την απλή γεωμετρία που μπορεί κανείς να εντοπίσει όταν οι διαστάσεις είναι μικρές και εικονικά διαχειρίσιμες.

Για την πραγμάτωσή του, ορίζεται το υπερεπίπεδο μέσω του "κανονικού" του διανύσματος, δηλαδή ενός μοναδιαίου $\hat{v}$ που είναι ορθογώνιο σε αυτό το υπερεπίπεδο. Ο γραμμικός μετασχηματισμός που δίνει το διάνυσμα $\vec{x}'$, το οποίο είναι η ανάκλαση του διανύσματος $\vec{x}$ ως προς το υπερεπίπεδο, δίνεται από τη

$$\vec{x}' = \vec{x} - 2(\vec{x}\hat{v})\hat{v}. \tag{3.11}$$

Αν επιστρατεύσουμε και την αναπαράσταση των διανυσμάτων ως πίνακες στήλες, η παραπάνω μπορεί να ξαναγραφτεί υπό μορφή πινάκων ως

$$x' = x - 2v(v^H x), \tag{3.12}$$

όπου v^H είναι ο ερμητιανός ανάστροφος του διανύσματος-στήλη v, που στην περίπτωση πραγματικών πινάκων είναι απλώς ο ανάστροφος.

Αυτή είναι η πλέον γενική περιγραφή του μετασχηματισμού Householder και ισχύει οποιαδήποτε διάσταση κι αν έχει ο χώρος. Αν επικεντρωθούμε, τώρα, στην περίπτωση των τριών διαστάσεων που μας ενδιαφέρει, μπορούμε από την παραπάνω να ανακτήσουμε τον πίνακα ο οποίος, όταν δράσει σε τυχόν διάνυσμα, μας δίνει την ανάκλαση ως προς το επίπεδο $ax+by+cz=0$. Αυτός θα είναι ο $A = I - 2NN^T$, όπου I είναι ο μοναδιαίος 3×3 και N το τρισδιάστατο μοναδιαίο διάνυσμα-στήλη που είναι κάθετο στο επίπεδο. Τότε, αν κάνουμε τις πράξεις, μπορούμε να λάβουμε τον πίνακα ανάκλασης

$$A = \begin{bmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι αυτός ο πίνακας ισούται με τον ανάστροφό του, και επιπλέον ότι είναι ορθογώνιος, ως όφειλε ως πίνακας ανάκλασης.

Πλέον έχουμε στα χέρια μας μια αρκετά πλήρη ανάλυση του μαθηματικού υποβάθρου των 3D γραφικών. Ίσως, όμως, να μην έχει γίνει ακόμα ξεκάθαρη η χρησμότητά της, από την απόψη του αν είναι πράγματι αυτός ο βέλτιστος τρόπος διαχείρισης των γραφικών.

Πράγματι, οι πίνακες όπως τους εξετάσαμε, στην ουσία, δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια περίτεχνη κωδικοποίηση πράξεων πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης, με χρήση κάποιων συντεταγμένων. Για ποιο λόγο αυτό είναι, τελικά, τόσο βολικό; Ο λόγος μπορεί να εντοπιστεί στην προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων. Ρεαλιστικά, όταν κάποιος θέλει να σχεδιάσει ένα 3D μοντέλο και να το προβάλλει σε μια 2D οθόνη, πρέπει να το υποβάλλει σε πάρα πολλούς μετασχηματισμούς -δηλαδή, να δράσει επάνω του με πάρα πολλούς πινακές, και φυσικά αυτό να το κάνει για όλα τα σημεία του μοντέλου. Οι πίνακες παρέχουν μια εξαιρετικά βολική παράκαμψη σε αυτή τη διαδικασία: αντί να δρα κανείς με τους πίνακες έναν έναν, μπορεί, εναλλακτικά, να εκμεταλλευτεί την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού τους, να σχηματίσει έναν "συνολικό" πίνακα ο οποίος κωδικοποιεί όλες τις διαδικασίες που θέλει να κάνει, και τότε να δράσει απλώς με αυτόν σε όλα τα σημεία του μοντέλου.

3.4 Η αρχή των αξόνων

Τώρα, θα επισημάνουμε κάποιες λεπτομέρειες που αφορούν την αρχή των αξόνων. Σε όλες τις παραπάνω διαδικασίες, υπήρχε μια πάρα πολύ σημαντική λεπτομέρεια: όλα έγιναν, κατά κάποιο τρόπο, με την αρχή των αξόνων ως ένα προεξάρχον σημείο στην ανάλυση. Ρεαλιστικά, αυτό δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει πάντα. Για να το αποσαφηνίσουμε, θα ξεκινήσουμε και πάλι από την περίπτωση του 2D χώρου, όπου τα πράγματα είναι πιο απλά.

Όπως είπαμε, κάθε σημείο του χώρου μπορεί να αναπαρασταθεί ως διάνυσμα και κάθε διάνυσμα ως πίνακας, επομένως θα χρησιμοποιούμε τις έννοιες του σημείου και του πίνακα αξεδιάκριτα. Ένα πρόβλημα που υπάρχει σε αυτά που έχουμε πει ως τώρα, είναι ότι δεν μπορούμε να γράψουμε υπό μορφή πίνακα το μετασχηματισμό της απλής μετάβασης, δηλαδή τη μετακίνηση από ένα σημείο (x, y) σε ένα άλλο $(x+\delta x, y+\delta y)$. Ο λόγος που δεν μπορούμε να το κάνουμε αυτό είναι προφανής: αυτή η διαδικασία δεν περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό των συντεταγμένων με κάτι, επομένως ό,τι πίνακα και να βάλουμε μπροστά στο διάνυσμα-στήλη δε θα καταφέρουμε να προωθήσουμε τις συντεταγμένες. Αντίθετα, φαίνεται να πρέπει να προσθέσουμε έναν πίνακα-στήλη, το οποίο δυσχεραίνει το έργο μας, διότι όπως είπαμε είναι πολύ σημαντικό για την ανάλυσή μας να μπορούμε να γράφουμε όλες τις διαδικασίες υπό μορφή ενός σύνθετου πίνακα ο οποίος προκύπτει από πολλαπλασιασμό άλλων πινάκων, και μετά να πολλαπλασιάζουμε αυτό τον πίνακα με το κάθε διάνυσμα. Την ίδια στιγμή, οι προωθήσεις είναι πρακτικά πάρα πολύ σημαντικές για εφαρμογές -δε μπορούμε απλά να μην τις συμπεριλάβουμε στο οικοδόμημά μας.

Ευτυχώς, υπάρχει ένας πάρα πολύ απλός τρόπος να παρακάμψουμε το πρόβλημα και να εκφράσουμε τη μεταβολή $(x, y) \to (x + \delta x, y + \delta y)$ υπό μορφή πολλαπλασιασμού με έναν πίνακα. Αυτός είναι να θεωρήσουμε μια έξτρα εικονική διάσταση, δηλαδή αντί να γράψουμε το διάνυσμα-στήλη μας ως $(x, y)^T$, να το γράψουμε ως $(x, y, 1)^T$. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση είναι πάρα πολύ απλό να δείξουμε ότι

$$\begin{bmatrix} x+\delta x \\ y+\delta y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta x \\ 0 & 1 & \delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \equiv T_{\delta x, \delta y} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

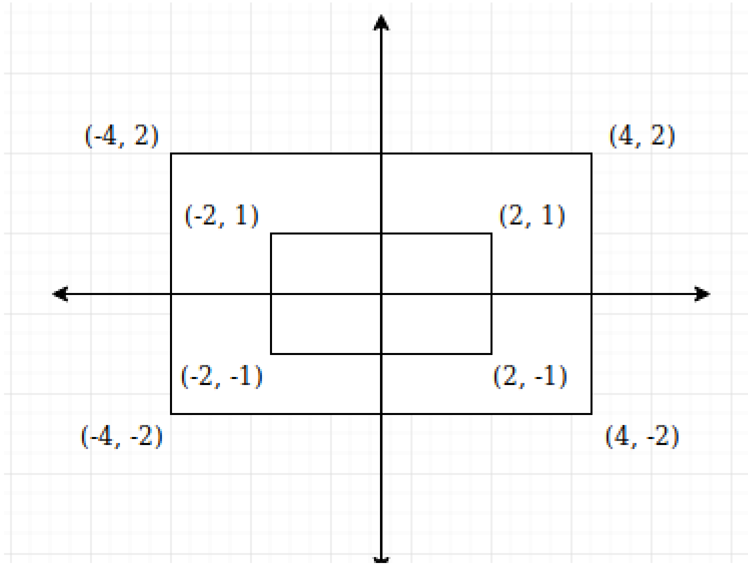
Πράγματι, αφενός πετύχαμε αυτό που θέλαμε, δηλαδή να γράψουμε τις μετατοπίσεις υπό μορφή πολλαπλασιασμού με κάποιου πίνακα, αφετέρου η βοηθητική διάσταση δε μας δημιούργησε καθόλου προβλήματα: ήταν 1 και στην αρχή και στο τέλος, παραμένοντας πάντα εικονική.

Το γιατί είναι σημαντικές οι μετατοπίσεις, είναι πανεύκολο να φανεί. Ας σκεφτούμε την -εξαιρετικά συνηθισμένη σε γραφικά- διαδικασία του ζουμ. Διαισθητικά, μπορεί κανείς πάρα πολύ εύκολα να καταλάβει τι σημαίνει αυτό μαθηματικώς: είναι η κλιμάκωση, που ήδη έχουμε συζητήσει. Πράγματι, αν θέλουμε να κάνουμε ζουμ τέτοιο ώστε να μας δείχνει ένα αντικείμενο διπλάσιο, είναι εμφανές ότι το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να διπλασιάσουμε τα μήκη του αντικειμένου σε κάθε διεύθυνση, δηλαδή σύμφωνα με όσα έχουμε πει παραπάνω, να δράσουμε με τον πίνακα $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Πράγματι, αυτή η διαδικασία δίνει το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Υπάρχει όμως μια μικρή λεπτομέρεια: αν έχουμε πχ ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, όλα λειτουγούν σωστά όταν η αρχή των αξόνων είναι το βαρύκεντρο του παραλληλογράμμου (το σημείο τομής των διαγωνίων του). Αντίθετα, όταν δε συμβαίνει κάτι τέτοιο, αρχίζουν τα προβλήματα: για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται από τα σημεία $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$ (το βαρύκεντρο αυτού του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $(2.5, 1.5)$ και οι δύο πλευρές του έχουν μήκη 1 και 3, αντίστοιχα). Τότε, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι, υπό τη δράση του πίνακα S, αυτά τα σημεία χαρτογραφούνται στα $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(8, 2)$, $(8, 4)$. Το νέο παραλληλόγραμμο που προέκυψε έχει μήκη πλευρών 2 και 6 αντίστοιχα, οπότε πράγματι το ζουμ πέτυχε όπως έπρεπε. Όμως το βαρύκεντρο του νέου σχήματος βρίσκεται στο σημείο $(5, 4)$, δηλαδή το σχήμα, εκτός του ότι μεγάλωσε, μετακινήθηκε κιόλας!

Αυτό, προφανώς, σε ρεαλιστικές εφαρμογές, είναι προβληματικό. Όταν κάποιος θέλει να κάνει ζουμ σε ένα αντικείμενο δεν είναι απαραίτητο ότι θέλει να το μετακινεί κιόλας. Επομένως, αυτό πρέπει να διορθωθεί.

Ο τρόπος είναι πολύ απλός: το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να φέρουμε το βαρύκεντρο του οποιουδήποτε σχήματος ακριβώς στην αρχή των αξόνων -που, όπως είπαμε, γίνεται μέσω του πίνακα μετατόπισης-, κατόπιν να ζουμάρουμε και,



Σχήμα 3.2: *Το ζουμ όταν το βαρύκεντρο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων (πηγή medium.com).*

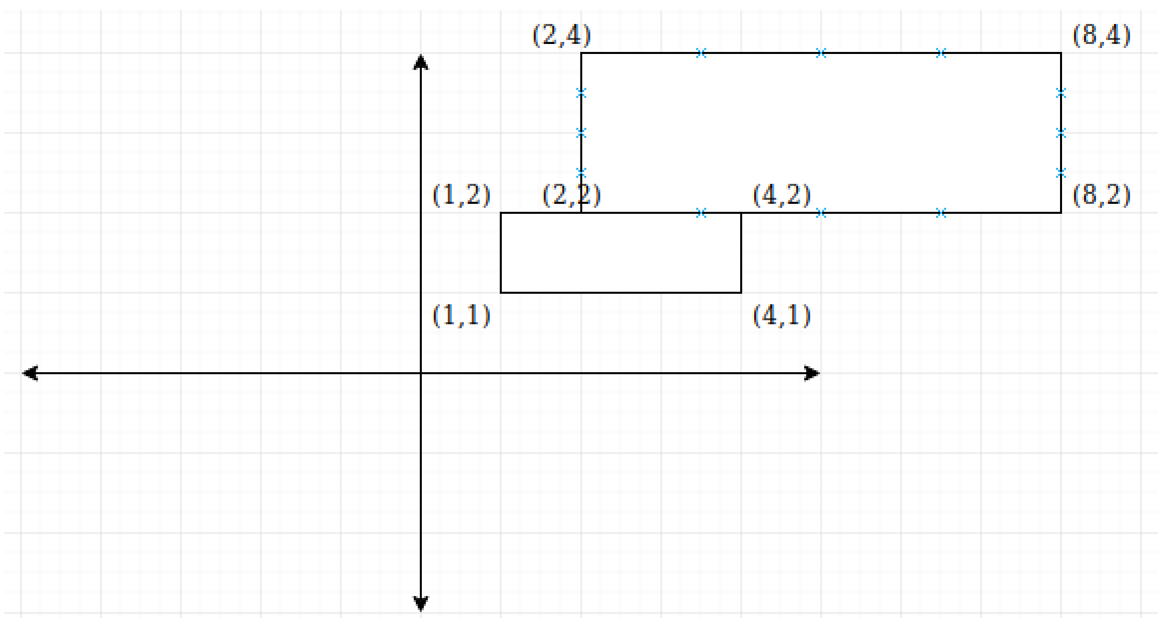
τέλος, να επαναφέρουμε το αντικείμενο στην αρχική του θέση. Έτσι, ο γενικότερος τρόπος να γράψουμε τον πίνακα που θα επιτύχει το επιθυμητό αποτέλεσμα είναι $T_{-c_x,-c_y} S_k T c_x, c_y$, όπου (c_x, c_y) είναι το βαρύκεντρο του σχήματος και S_k ο πίνακας που κάνει ζουμ k φορές. Φυσικά, αυτός ο πίνακας θα πρέπει να δράσει πάνω στο διάνυσμα $(x, y, 1)^T$ που περιέχει και την εικονική διάσταση, ώστε να έχει νόημα ο πίνακας μετατόπισης.

Παρόμοιες διαδικασίες θα πρέπει να γίνουν και για τις στροφές -όσα έχουμε πει αφορούν μόνο στροφές γύρω από την αρχή των αξόνων ή γύρω από άξονες που περνούν από αυτή-, αλλά και για τις ανακλάσεις -έχουμε μιλήσει μόνο για ανακλάσεις ως προς ευθείες ή επίπεδα που περιέχουν την αρχή των αξόνων. Έτσι, πχ για τις στροφές στο 2D επίπεδο γύρω από τυχόν σημείο (c_x, c_y), είναι προφανές από την ανάλυση του ζουμ ότι ο πίνακας που χρειαζόμαστε είναι ο $T_{-c_x,-c_y} R(\theta) T c_x, c_y$.

Η επέκταση αυτών των θεωρήσεων για τη 3D περίπτωση είναι σχεδόν τετριμμένη. Κατ' αναλογία, θα θεωρήσουμε ακόμα μια εικονική διάσταση και έτσι όλα τα διανύσματα θα είναι στη μορφή $(x, y, z, 1)^T$, ενώ προφανώς ο πίνακας μετατόπισης θα είναι

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta x \\ 0 & 1 & 0 & \delta y \\ 0 & 0 & 1 & \delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Όπως ακριβώς στην περίπτωση του 2D, μπορούμε να φτιάξουμε τώρα τους κατάλληλους πολλαπλασιασμών βασικών πινάκων, αναλόγως των απαιτήσεων.



Σχήμα 3.3: *Η μετακίνηση του παραλληλογράμμου μετά τη διαδικασία του ζουμ, όταν το βαρύκεντρο δε βρίσκεται στην αρχή των αξόνων (πηγή medium.com).*

3.5 Προβολή

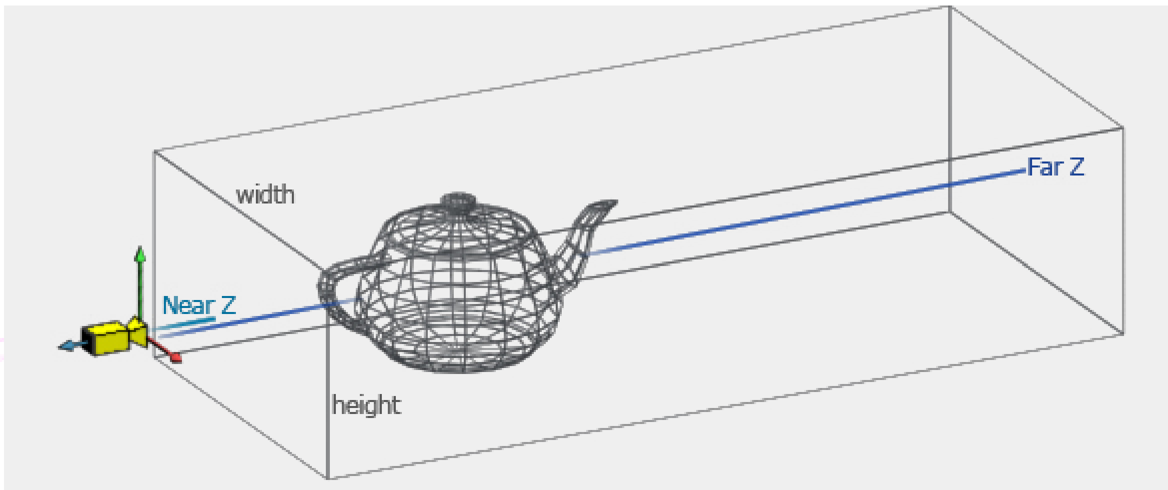
Γενικά, κάθε μοντέλο που σχεδιάζουμε βρίσκεται σε ένα διανυσματικό χώρο, το χώρο μοντέλων. Φυσικά, σε ρεαλιστικές εφαρμογές, πολύ συχνά χρειάζεται να τοποθετήσουμε πολλά μοντέλα σε έναν χώρο, τον λεγόμενο κοσμικό χώρο. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του λεγόμενου πίνακα μοντέλου. Επειδή κάθε αντικείμενο θέλουμε, εν γένει, να τοποθετηθεί σε διαφορετική θέση και με διαφορετικό προσανατολισμό στον κόσμο που δημιουργούμε, το καθένα απ΄ αυτά θα έχει το δικό του πίνακα μοντέλου. Η σχέση όλης της παραπάνω ανάλυσης με αυτό, είναι έκδηλη: πχ, αν θέλουμε ένα αντικείμενο να είναι μακριά θα πρέπει να του κάνουμε σμίκρυνση, ενώ αν θέλουμε να είναι στραμμένο προς τα πάνω θα του κάνουμε περιστροφή ως προς κάποιον άξονα. Όταν όλα τα μοντέλα έχουν τοποθετηθεί σε έναν "φυσιολογικό" χώρο, οι άξονές τους πλέον σχετίζονται με τον κοσμικό χώρο.

Πολύ συχνά στις εφαρμογές γραφικών, ειδικά όταν πρόκειται για βιντεοπαιχνίδια ή ταινίες, χρειαζόμαστε την ψευδαίσθηση της θέασης. Τότε, χρησιμοποιούμε τον πίνακα θέασης ο οποίος δημιουργεί έναν νέο χώρο -το λεγόμενο χώρο θέασης. Στην ουσία, αυτό που κάνουμε τότε είναι να αντιμετωπίζουμε τον κοσμικό χώρο σαν να τον κοιτάμε μέσα από κάμερα. Είναι εμφανής η σχέση του πίνακα προβολής σε αυτή τη διαδικασία -αυτό που στην ουσία θέλουμε να κάνουμε είναι να προβάλλουμε όλα μας τα αντικείμενα σε ένα επίπεδο, όπως είναι η ψευδαίσθηση που δίνει ο φακός της κάμερας ή το μάτι.

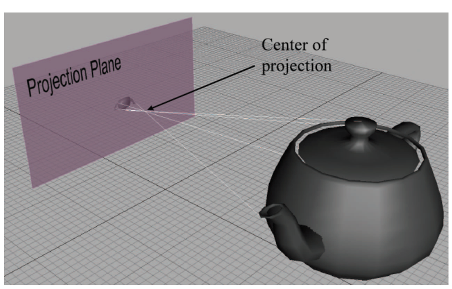
Με τον όρο κορεσμένη θέαση εννοούμε τον όγκο του χώρου που μπορεί να είναι ορατός από την κάμερα. Αυτός ο χώρος είναι προφανές ότι -εφόσον σκεφτόμαστε ορθογώνιες οθόνες- θα ορίζεται από έξι επίπεδα: το πάνω, το κάτω, το δεξί, το αριστερό, το εμπρόσθιο (κοντινό) και το πίσω (μακρινό). Ο λόγος που λαμβάνουμε υπ΄ όψιν και το μακρινό επίπεδο είναι για να υπάρχει ένα οπτικό κατώφλι, πίσω από το οποίο δε μπορούμε να δούμε αντικείμενα (κάτι που, βέβαια, ισχύει και ρεαλιστικά, και είναι πολύ σημαντικό ιδιαίτερα όταν μοντελοποιούμε εξωτερικά περιβάλλοντα). Με χρήση, λοιπόν, του πίνακα προβολής, χαρτογραφούμε όλη την κορεσμένη θέαση επάνω στον ομογενή χώρο του κλιπ.

Στην ορθογραφική ή παράλληλη προβολή, οι γραμμές από τα σημεία του αντικειμένου στα αντίστοιχα σημεία προβολής στην κάμερα είναι παράλληλες με τον άξονα της κατεύθυνσης της οπτικής γωνίας της κάμερας. Με την προοπτική προβολή, οι γραμμές αυτές τέμνονται σε ένα σημείο, που ονομάζεται κέντρο προβολής. Αυτή είναι που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για ρεαλιστικές εφαρμογές, διότι όσο απομακρύνουμε ένα αντικείμενο, η προοπτική προβολή του στην κάμερα μικραίνει -αντίθετα, η παράλληλη προβολή του παραμένει σταθερή σε μέγεθος. Σημειώνεται ότι η προοπτική προβολή εμφανίζει το αντικείμενο αντεστραμμένο επάνω στο επίπεδο προβολής, λόγω της τομής των προβολικών γραμμών στο κέντρο προβολής.

Έτσι, προκύπτει ο χώρος οθόνης. Οι 3D συντεταγμένες του αρχικού χώρου πλέον αναπαριστώνται στα 2D σημεία επί της οθόνης, με τους αντίστοιχους άξονες να αντιστοιχούν στο μήκος και στο ύψος της οθόνης, ενώ στην εικόνα είναι



Σχήμα 3.4: *Η ορθογραφική προβολή (πηγή vitaminac.github.io).*



Σχήμα 3.5: *Η προοπτική προβολή και το κέντρο προβολής (πηγή vitaminac.github.io).*

‘έμβαπτισμένο” και το βάθος (ο τρίτος άξονας, κάθετος στο επίπεδο του φακού της κάμερας). Για να μεταφραστεί αυτό σε πίξελ στη συσκευή όπου παρακολουθείται το τελικό αποτέλεσμα,γίνεται άλλος ένας μετασχηματισμός στις (κανονικοποιημένες λόγω της δομής σε πίξελ) συντεταγμένες της οθόνης θέασης.

Βιβλιογραφία

[1] D.J. Griffiths, Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική, απόδοση Σ. Αρβανιτίδης

[2] Θ. Χρυσάκης, Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία

[3] S. Axler, Linear Algebra Done Right

[4] Ν. Πανουσάκης, Μ. Αγιοπούλου, Γ. Βολλάς, Γραμμική Άλγεβρα Ι

[5] G. Strang, Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές, μετάφραση Π. Πάμφιλος

[6] pixelperfect-studios.com/history-of-3d-rendering/

[7] marketing.istockphoto.com/blog/vector-graphics/

[8] www.cfm.brown.edu/people/dobrush/cs52/Mathematica/Part7/graphics.html

[9] ufo3d.com/history-of-3d-modeling/

[10] medium.com/swlh/understanding-3d-matrix-transforms-with-pixijs-c76da3f8bd8

[11] vitaminac.github.io/Matrices-in-Computer-Graphics/